

# 具时滞和收获项的捕食-食饵系统Hopf分支分析

吕堂红\*, 王菲, 周林华

(长春理工大学 数学与统计学院, 吉林 长春 130022)

**摘要:** 针对一类具有Leslie-Gower功能反应函数的捕食-食饵系统, 以时滞 $\tau_1, \tau_2$ 为分支参数, 利用比较定理, 分析系统边界平衡点的全局稳定性, 并利用规范型理论以及对特征根实部正负的判断, 剖析系统正平衡点的局部稳定性以及正平衡点处发生Hopf分支的条件和分支方向。最后根据全局分支理论, 将局部Hopf分支的稳定性结论延拓至全局, 并经数值模拟证实结果。

**关键词:** 时滞; Leslie-Gower 捕食-食饵系统; Hopf分支; 稳定性; 周期解

**中图分类号:** O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-2395(2024)01-0140-15

## Hopf Bifurcation Analysis of Predator-Prey System with Time Delay and Harvest Terms

LÜ Tanghong\*, WANG Fei, ZHOU Linhua

(School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

**Abstract:** For a class of predator-prey system with Leslie-Gower functional response function, the global stability of the equilibrium point of the system is analyzed by using the delays  $\tau_1, \tau_2$  bifurcation parameter comparison theory, and the local stability of the positive equilibrium point of the system, the conditions and branching direction of Hopf branching at the positive equilibrium point are analyzed by using the gauge theory and the judgment of the positive and negative real parts of the characteristic root. Finally, according to the global branching theory, the stability conclusion of local Hopf bifurcation is extended to the whole, and the correctness of the conclusion is verified by numerical simulation.

**Key words:** time delays; Leslie-Gower predator-prey system; Hopf bifurcation; stability; periodic solutions

### 0 引言

基于对自然生物相关领域研究的分析, 可以得知当任意两个种群处在同一自然环境中时, 且两个种群又非同一物种, 那么二者之间必然会有四种相互作用关系, 分别为捕食者与被捕食者、寄生物与寄主、两种群相互竞争、两种群互惠共存。而在这四种关系中, 捕食与被捕食关系作为其中最为关键的一种关系, 关乎着两个种群在同一空间内的地位, 以及资源的分配, 同时也对于研究各种生物的更新迭代有着至关重要的作用。现如今, 有关于捕食-食饵模型以及其他模型形式的研究已取得了丰硕的研究成果<sup>[1-5]</sup>, 如避难所对系统动力学行为的影响, 高芳等<sup>[6]</sup>考虑了具有食饵避难的Leslie-Gower捕食-食饵扩散系统及其最优税收, 通过对模型进行定性分析, 阐明了

收稿日期: 2022-04-18; 接受日期: 2022-09-19

基金项目: 国家自然科学基金(11426045); 吉林省自然科学基金(20180101229JC)

\* 通信作者: 吕堂红(1979-), 女, 吉林长春人, 硕士, 教授, 主要研究方向为常微分方程定性理论及分支理论。E-mail: lvtanghong@163.com

引文格式: 吕堂红, 王菲, 周林华. 具时滞和收获项的捕食-食饵系统Hopf分支分析[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(1): 140-154. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2022084

齐次 Neumann 边界条件下扩散产生的影响,证明了正平衡点的全局稳定性,并利用 Pontryagin 最大值原理得到最优平衡解。

影响种间关系的因素甚多,随着研究深入,为更加深刻确切地研究种间关系,Allee 最初在文献 [7] 中提出了著名的 Allee 效应,当种群数量过低时,种群迁移个体数量也较小,大大增加迁移过程的死亡率,削弱种群交流,同时使种群的个体寻找配偶困难以及遗传变异的丧失,导致灭绝。Allee 效应的提出,为防止其他物种入侵、原有物种的灭绝提供了解决措施,由此也涌现了众多卓绝的研究成果,如 Eduardo<sup>[8]</sup> 证明了系统中的参数子集的存在,以及最内层的稳定性和最外层的不稳定性,描述了其动力学行为的复杂性。

由最初 Leslie 提出 Leslie-Gower 功能反应函数后,许多学者认识到 Leslie-Gower 同样适用于捕食-食饵系统的研究。继而学者们发掘了以 Leslie-Gower 功能反应函数来构造捕食-食饵系统的方式,经研究得出此种形式具有广泛的实际用途,如 Ma 等<sup>[9]</sup> 研究了一类分数阶奇异 Leslie-Gower 捕食-食饵生物经济模型,通过分析得到了模型系统的可解性条件和稳定性,并讨论了奇异诱导分支现象,继而引入状态反馈控制器来消除奇异诱导分支现象,并讨论了最优控制问题。

在考虑了影响种间关系的因素以及实际意义的前提下,文献 [10] 提出了以下具有时滞和 Allee 效应的 Leslie-Gower 捕食-食饵模型:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) \left(\frac{x_1}{b} - m\right) - qx_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = Sx_2 \left(1 - \frac{x_2(t-\tau)}{x_1(t-\tau)}\right), x_1(\theta) = \varphi_1(\theta), x_2(\theta) = \varphi_2(\theta), \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x_1, x_2$  分别代表食饵种群和捕食者种群在  $t$  时刻的种群密度,时滞  $\tau$  代表捕食者种群的成熟期时滞,其他参数意义如文献 [10]。

文献 [10] 阐述了系统的平衡稳态及其延伸出的其他性质,如吸引力等,讨论了平衡点附近局部 Hopf 分支的存在性。在现实生活中,影响食饵种群和捕食者种群数量的因素众多,除被捕食以及自身繁衍之外,人类对种群的捕获也是重要的影响因素。因此,本文在模型 (1) 的基础之上,考虑食饵种群  $x_1$  的成熟期以及捕食者种群  $x_2$  的成熟期,以及食饵种群和捕食者种群会被人类的收获、开采等影响,引入食饵种群  $x_1$  的线性收获项  $h_1x_1$  和捕食者种群  $x_2$  的线性收获项  $h_2x_2$ , 提出如下具有时滞和线性收获项的 Leslie-Gower 捕食-食饵系统:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) \left(\frac{x_1}{b} - m\right) - qx_1x_2 + h_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = Sx_2 \left(1 - \frac{x_2(t-\tau_2)}{x_1(t-\tau_1)}\right) + h_2x_2, x_1(\theta) = \varphi_1(\theta), x_2(\theta) = \varphi_2(\theta), \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\tau_1$  表示食饵种群的成熟期,  $\tau_2$  表示捕食者种群的成熟期,  $h_1x_1$  表示食饵种群的线性收获项,  $h_2x_2$  表示捕食者种群的线性收获项,且  $h_1 < 0, h_2 < 0$ , 其他参数意义如文献 [10]。

令  $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{K}, \bar{r} = \frac{r}{b}, \bar{m} = \frac{b}{K}, \bar{t} = rt, \bar{q} = \frac{q}{r}, \bar{S} = \frac{S}{r}, \bar{h}_1 = \frac{h_1}{r}, \bar{h}_2 = \frac{h_2}{r}$ 。对模型 (2) 进行化简得:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (1 - x_1)(x_1 - m) - qx_1x_2 + h_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = Sx_2 \left(1 - \frac{x_2(t-\tau_2)}{x_1(t-\tau_1)}\right) + h_2x_2, x_1(\theta) = \varphi_1(\theta), x_2(\theta) = \varphi_2(\theta). \end{cases} \quad (3)$$

目前对于系统 (3) 的研究中,缺乏利用数值模拟来分析周期解的研究,使研究过于抽象化,导致有关部门无法掌握生物种群在开采等外界因素的干扰下的发展规律,进而造成无节制开采使得生物种群走向灭绝。本文将考虑这一问题,以时滞  $\tau_1, \tau_2$  为参数,应用零点定理<sup>[11]</sup>、规范型理论和

中心流形定理来对系统(3)的动力学行为进行分析。

## 1 平衡点的存在性

现将根据参数满足的两种不同条件

$$(H_1): (m + h_1 + 1)^2 > 4m \text{ 且 } m > 1 + h_1。$$

$$(H_2): (1 + m + h_1)^2 > 4m \left(1 + q + \frac{qh_2}{S}\right) \text{ 且 } 1 + m + h_1 > 0。$$

对系统(3)存在的平衡点进行阐述证明,得到如下两个结论:

**结论 1** 当 $(H_1)$ 条件成立时,系统(3)存在唯一非负边界平衡点

$$E_1 = (x_1, 0) = \left( \frac{1 + m + h_1 + \sqrt{(1 + m + h_1)^2 - 4m}}{2}, 0 \right)。$$

验证可得,结论1显然成立。

**结论 2** 当 $(H_2)$ 条件成立时,系统(3)有正平衡点

$$E^* = (x_1^*, x_2^*) = \left( x_1^*, x_1^* + \frac{h_2 x_1^*}{S} \right)。$$

**证明** 如果系统(3)存在平衡点,则应满足方程组

$$\begin{cases} (1 - x_1)(x_1 - m) - qx_1x_2 + h_1x_1 = 0, \\ Sx_2 \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) + h_2x_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)中的第二个方程可得

$$x_2 = \left(1 + \frac{h_2}{S}\right)x_1。 \quad (5)$$

将式(5)带入式(4)中的第一个方程,有

$$Q_1x_1^2 + Q_2x_1 + Q_3 = 0, \quad (6)$$

其中

$$Q_1 = -1 - q - \frac{qh_2}{S}, Q_2 = 1 + m + h_1, Q_3 = -m。$$

当 $(1 + m + h_1)^2 > 4m \left(1 + q + \frac{qh_2}{S}\right)$ 且 $1 + m + h_1 > 0$ 时,结论2成立。

**引理 1** 系统(3)总存在一个平凡平衡点 $E(0, 0)$ ;当 $(m + h_1 + 1)^2 > 4m$ 时,系统(3)存在非负边界平衡点 $E_1(x_1, 0)$ ,该平衡点为系统(3)的捕食者灭绝平衡点;当 $(1 + m + h_1)^2 > 4m \left(1 + q + \frac{qh_2}{S}\right)$

且 $1 + m + h_1 > 0$ 时,存在一正平衡点 $E^*(x_1^*, x_1^* + \frac{h_2 x_1^*}{S})$ 。

## 2 边界平衡点的全局稳定性

**引理 2**<sup>[12]</sup> 当系统(3)无时滞时,初值的解在 $R_+^2$ 全域内最终有界。

首先,利用文献[12]类似的证明方法,令

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f(x_1, x_2) = (1 - x_1)(x_1 - m) - qx_1x_2 + h_1x_1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= g(x_1, x_2) = Sx_2 \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) + h_2x_2. \end{aligned}$$

对于非负连续函数  $f(x_1, x_2)$ , 因  $h_1 < 0$  且  $q > 0$ , 则有

$$f(x_1, x_2) \leq (1 - x_1)(x_1 - m).$$

因  $m \geq 0$ , 故  $x_1 - m \leq x_1$ , 则有

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f(x_1, x_2) \leq (1 - x_1)x_1.$$

由比较定理可知,  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq 1$ ,  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \leq 1$ , 故存在  $\exists \delta \in (0, 1)$ , 使得对充分大的  $T$ , 当  $t > T$  时, 有  $x_1(t) < 1 + \delta$ ,  $x_2(t) < 1 + \delta$ , 且有:

$$\begin{aligned} \frac{d(x_1(t) + x_2(t))}{dt} &= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = \\ &= (1 - x_1)(x_1 - m) - qx_1x_2 + h_1x_1 + Sx_2 \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) + h_2x_2 < \\ &= x_1(1 - x_1) + Sx_2 + h_1 + h_2. \end{aligned}$$

因此存在一个正常数  $N = 1 + \delta + S + h_1 + h_2 > 0$ , 使得  $\forall \varepsilon > 0$ , 从  $R_+^2$  内部出发的轨线最终都进入区域  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in R_+^2; x_1 + x_2 \leq N + \varepsilon\}$ .

综上, 满足初值条件的解在  $R_+^2$  内是最终有界的。

**定理 1** 当  $S + h_2 \leq S(1 + m + h_1)$  时,  $E_1(x_1, 0)$  是全局渐近稳定的。

**证明** 经判断, 当  $S + h_2 \leq S(1 + m + h_1)$  时,  $E_1(x_1, 0)$  是局部渐近稳定的, 利用与文献[13]的类似方法来证明:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (x_1, 0).$$

在引理 1 的条件下, 将系统 (3) 中的第一个方程放缩:

$$\dot{x}_1(t) \leq (1 - x_1(t))(x_1(t) - m) + h_1x_1(t) = -x_1^2(t) + (1 + m + h_1)x_1(t) - m.$$

由比较定理得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \leq \frac{1 + m + h_1 + \sqrt{(1 + m + h_1)^2 - 4m}}{2} = x_1,$$

则对  $\forall \varepsilon > 0, \exists T_1 > 0$ , 当  $t > T_1$  时,  $0 < x_1(t) < x_1 + \varepsilon$ .

对于系统 (3) 中的第二个方程, 当  $t > T_1 + \tau_1$  时, 有  $\dot{x}_2(t) \leq \left(S + h_2 - \frac{Sx_2(t)}{x_1 + \varepsilon}\right)x_2(t)$ . 因  $S + h_2 \leq$

$S(1 + m + h_1)$ , 即  $S + h_2 - \frac{Sx_2(t)}{x_1 + \varepsilon} < 0$ .

由比较定理与解的非负性知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0,$$

即对  $\forall \varepsilon > 0, \exists T_2 > T_1$ , 当  $t > T_2$  时,  $0 < x_2(t) < \varepsilon$ .

当  $t > T_2 + \tau_1$  时, 有

$$\dot{x}_1(t) \geq (1 - x_1(t))(x_1(t) - m) + h_1x_1(t) - q\varepsilon x_1(t) = -x_1^2(t) + (1 + m + h_1 - q\varepsilon)x_1(t) - m.$$

则由比较定理与  $\varepsilon$  的任意性知:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \geq \frac{1 + m + h_1 + \sqrt{(1 + m + h_1)^2 - 4m}}{2} = x_1.$$

综上, 定理 1 成立。证毕。

### 3 正平衡点的局部稳定性及Hopf分支

现令系统 (3) 在正平衡点  $E^*$  处的 Jacobi 矩阵表示为

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21}'e^{-\lambda\tau} & P_{22} + P_{22}'e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{11} &= -2x_1^* - qx_2^* + m + h_1 + 1, \\ P_{12} &= -qx_1^*, P_{21}' = \frac{Sx_2^{*2}}{x_1^*}, \\ P_{22} &= S\left(1 - \frac{x_2^*}{x_1^*}\right) + h_2, \\ P_{22}' &= -\frac{Sx_2^*}{x_1^*}, P_{21} = P_{11}' = P_{12}' = 0. \end{aligned}$$

则有系统(3)的特征方程:

$$\lambda^2 + A\lambda + Be^{-\lambda\tau_1} + (C\lambda + D)e^{-\lambda\tau_2} + E = 0, \quad (8)$$

其中

$$A = -(P_{11} + P_{22}), B = -P_{12}P_{21}', C = -P_{22}', D = P_{11}P_{22}', E = P_{11}P_{21}'.$$

下面,针对时滞的不同组合,考虑以下五种情况:

**情形1**  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 。

此时,系统(3)的特征方程(8)变为:

$$\lambda^2 + (A + C)\lambda + B + D + E = 0. \quad (9)$$

因  $A + C > 0$ , 若:

(H<sub>3</sub>):  $B + D + E > 0$ ,

则特征方程的所有的根均具有负实部<sup>[14]</sup>, 则系统(3)的正平衡点的稳定性是局部渐近稳定的。于是有如下定理。

**定理2** 若  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , 即系统(3)无时滞时, 当  $B + D + E > 0$  时, 系统(3)的平衡点  $E^*(x_1^*, x_2^*)$  是局部渐近稳定的。

**情形2**  $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$ 。

此时,系统(3)的特征方程(8)变为:

$$\lambda^2 + (A + C)\lambda + Be^{-\lambda\tau_1} + D + E = 0. \quad (10)$$

令  $\lambda = i\omega_1 (\omega_1 > 0)$  是此方程的根, 代入(10)有:

$$\begin{cases} \omega_1^2 - (D + E) = B \cos \omega_1 \tau_1, \\ (A + C)\omega_1 = B \sin \omega_1 \tau_1. \end{cases} \quad (11)$$

两边分别平方相加可得:

$$\omega_1^4 + [(A + C)^2 - 2(D + E)]\omega_1^2 + (D + E)^2 - B^2 = 0. \quad (12)$$

令  $\omega_1^2 = u_1$ , 则式(12)变为  $u_1^2 + p_1u_1 + q_1 = 0$ , 其中,

$$p_1 = (A + C)^2 - 2(D + E), q_1 = (D + E)^2 - B^2.$$

令  $f(u_1) = u_1^2 + p_1u_1 + q_1$ 。

假设

(H<sub>4</sub>):  $p_1 > 0, q_1 > 0$ 。

如果(H<sub>2</sub>)和(H<sub>4</sub>)成立, 式(12)无正根, 进而可得(10)的任一根的实部皆为负, 则系统(3)的平衡点是局部渐近稳定的。

假设

(H<sub>5</sub>):  $q_1 < 0$ 。

如果 (H<sub>2</sub>) 和 (H<sub>5</sub>) 成立时, 式 (10) 有唯一正根  $\omega_1^{*2}$ 。将  $\omega_1^{*2}$  代入 (11) 有:

$$\tau_{1k} = \frac{1}{\omega_1^*} \arccos \frac{\omega_1^{*2} - (D+E)}{B} + \frac{2k\pi}{\omega_1^*}, k=0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

假设

(H<sub>6</sub>):  $p_1 < 0, q_1 > 0, p_1^2 > 4q_1$ 。

如果 (H<sub>2</sub>) 和 (H<sub>6</sub>) 成立, 式 (10) 有两个正根  $\omega_{\pm}^2$ 。将  $\omega_{\pm}^2$  代入 (11) 有:

$$\tau_{1n}^{\pm} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \arccos \frac{\omega_{\pm}^2 - (D+E)}{B} + \frac{2n\pi}{\omega_{\pm}}, n=0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

对式 (8) 关于  $\tau_1$  求导, 有

$$\left( \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right)^{-1} = \frac{2\lambda + (A+C)}{\lambda B e^{-\lambda\tau_1}} - \frac{\tau_1}{\lambda}, \quad (15)$$

计算后有

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\omega_1} = \frac{a_1 a_2 - a_2 a_3}{a_1^2 + a_3^2} > 0. \quad (16)$$

假设

(H<sub>7</sub>):  $a_1 a_2 - a_2 a_3 > 0$ 。

如果 (H<sub>7</sub>) 成立, 那么横截性条件便成立:

$$\operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right) \Big|_{\tau_1=\tau_{1k}, \omega=\omega_1^*} \right\} > 0, \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right) \Big|_{\tau_1=\tau_{1n}^{\pm}, \omega=\omega_{\pm}} \right\} > 0, \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right) \Big|_{\tau_1=\tau_{1n}^{\pm}, \omega=\omega_{\pm}} \right\} > 0.$$

于是得到如下定理:

**定理3** 若  $\tau_1 + \tau_2 \neq 0$ , 当  $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$  时, 有如下结论:

1) 当  $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$  时, 如果 (H<sub>2</sub>) 和 (H<sub>3</sub>)、(H<sub>4</sub>) 成立, 则系统 (3) 的平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的;

2) 当  $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$  时, 如果 (H<sub>2</sub>) 和 (H<sub>3</sub>)、(H<sub>6</sub>) 以及横截性条件  $\operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_1} \right) \Big|_{\tau_1=\tau_{1k}, \omega_1=\omega_1^*} \right\} > 0$  成

立, 则存在  $\tau_1^*$ , 当  $\tau_1 \in (0, \tau_1^*)$  时, 平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的; 当  $\tau_1 > \tau_1^*$  时, 平衡点  $E^*$  稳定性被破坏; 当  $\tau_1 = \tau_1^*$  时, 系统 (3) 在此处会发生 Hopf 分支。

**情形3** 当  $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$  时。

利用与情形2同样的分析过程, 得到定理4。

**定理4** 若  $\tau_1 + \tau_2 \neq 0$ , 当  $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$  时, 如果 (H<sub>2</sub>) 成立, 则系统 (3) 的平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的。

**情形4** 当  $\tau_1 = \tau_2 = \tau > 0$ 。

利用与情形2同样的分析过程, 得到定理5。

**定理5** 若  $\tau_1 = \tau_2 = \tau > 0$ , 则当  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  时, 存在一个  $\tau_0$ , 当  $\tau \in (0, \tau_0)$  时, 平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的; 当  $\tau > \tau_0$  时, 平衡点  $E^*$  是不稳定的; 此外在  $\tau = \tau_0$  处, 发生 Hopf 分支, 其中,

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{[(B+D) - AC]\omega_0^2 - E(B+D)}{C^2\omega_0^2 + (B+D)^2}. \quad (17)$$

**情形5**  $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ 。

固定  $\tau_1$  在稳定的区间,  $\tau_2$  为参数。设  $\lambda = i\omega_4$  为 (8) 的根, 代入到 (8) 有:

$$\begin{cases} \omega_4^2 - B \sin \omega_4 \tau_1 - E = C \omega_4 \sin \omega_4 \tau_2 + D \cos \omega_4 \tau_2, \\ -A \omega_4 \sin \omega_4 \tau_1 = C \omega_4 \cos \omega_4 \tau_2 - D \sin \omega_4 \tau_2. \end{cases}$$

消去  $\tau_2$ , 有

$$g_1(\omega_4) - 2g_2(\omega_4)\sin \omega_4\tau_1 + 2g_3(\omega_4)\cos \omega_4\tau_1 = 0, \tag{18}$$

其中,

$$g_1(\omega_4) = \omega_4^4 + (A^2 - C^2 - 2E)\omega_4^2 + (B^2 + E^2 - D^2), g_2(\omega_4) = AB\omega_4, g_3(\omega_4) = B(E - \omega_4^2).$$

假设

(H<sub>8</sub>): 式(18)至少具有有限正根。

若(H<sub>8</sub>)成立, 则式(18)的根可以表示为 $\omega_4^1, \omega_4^2, \dots, \omega_4^j$ 。对任一个固定的 $\omega_4^i (i = 1, 2, \dots, j)$ , 皆可由式(17)求出与之相应的 $\tau_4^k$ 。

$$\tau_4^k = \frac{1}{\omega_4^i} \arccos \frac{2h_2(\omega_4^i)\sin \omega_4^i\tau_1 - h_1(\omega_4^i)}{2h_3(\omega_4^i)} + \frac{2k\pi}{\omega_4^i}, i = 1, 2, \dots, j, k = 0, 1, 2, \dots \tag{19}$$

令 $\tau^* = \min \{ \tau_4^k; i = 1, 2, \dots, j, k = 0, 1, 2, \dots \}$ ,  $\omega^* = \omega_4^i$ , 对式(8)关于 $\tau_2$ 求导, 有

$$\left( \frac{d\lambda}{d\tau_2} \right)^{-1} = - \frac{2\lambda + A + \tau_1 B e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda(\lambda^2 + A\lambda + B e^{-\lambda\tau_1} + E)} - \frac{\tau_2}{\lambda}, \tag{20}$$

经计算有

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_2} \right)^{-1} \Big|_{\tau_2 = \tau^*} = \frac{Q}{P}, \tag{21}$$

其中,

$$Q = a_4 a_5 + a_6 a_7, P = a_5^2 + a_7^2, a_4 = A - \tau_1 B \cos \omega^* \tau_1, a_5 = A \omega^{*2} + \omega^* \sin \omega^* \tau_1, \\ a_6 = 2\omega^* \tau_2 + \tau_1 B \sin \omega^* \tau_1, a_7 = \omega^{*3} - B \omega^* \cos \omega^* \tau_1 - E \omega^*.$$

又因为 $P > 0$ , 假设

(H<sub>9</sub>):  $Q > 0$ 。

$$\text{则 } \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_2} \right) \Big|_{\tau_2 = \tau^*} \right\} > 0.$$

于是得到定理6。

**定理 6** 当 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ 时, 针对系统(3), 保持 $\tau_1 \in (0, \tau_1^*)$ , 若(H<sub>2</sub>)、(H<sub>8</sub>)、(H<sub>9</sub>)以及 $\operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau_2} \right) \Big|_{\tau_2 = \tau^*} \right\} > 0$ 成立, 则存在 $\tau_2$ 使 $\tau_2 \in (0, \tau^*)$ 时, 平衡点 $E^*$ 是局部渐近稳定的; 若 $\tau_2 > \tau^*$ , 平衡点 $E^*$ 不稳定, 当 $\tau_2 = \tau^*$ , 系统(3)发生Hopf分支。

#### 4 Hopf分支方向及其稳定性

本节研究在 $\tau > 0$ 的前提下, 运用文献[15]中提出的理论, 得到确定系统(3)的Hopf分支方向的表达式。

令 $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T \in R^2$ , 其中 $u_1(t) = x_1(\tau t), u_2(t) = x_2(\tau t), \tau = \tau_0 + \mu, \mu \in R$ , 则系统(3)在 $C = C([-1, 0], R^2)$ 上变为一般的泛函微分方程

$$\dot{u}(t) = L_\mu(u_t) + F(\mu, u_t), \tag{22}$$

其中,  $L_\mu: C \rightarrow R^2, F: R \times C \rightarrow R^2$  分别由以下形式给出:

$$L_\mu \phi = (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} + (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_{21}' & P_{22}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

和

$$F(\mu, \phi) = (\tau_0 + \mu)(F_1(\mu, \phi), F_2(\mu, \phi))^T, \tag{24}$$

因此, 由Riesz表示定理, 存在:

$$\eta(\theta, \mu): [-1, 0] \rightarrow R^2.$$

此有界变差矩阵满足:

$$L_\mu(\phi) = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta), \quad (25)$$

这里,

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \delta(\theta) + (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_{21}' & P_{22}' \end{pmatrix} \delta(\theta + 1).$$

其中, 上式中的  $\delta(\theta)$  是 Dirac-delta 函数。

根据  $\phi \in C^1([-1, 0], R^2)$ , 现有

$$A(\mu)\phi(\theta) = \begin{cases} \dot{\phi}(\theta), & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta), & \theta = 0, \end{cases}$$

和

$$R(\mu)\phi(\theta) = \begin{cases} (0, 0)^T, & \theta \in [-1, 0), \\ F(\mu, \theta), & \theta = 0. \end{cases}$$

由此可得, 系统(22)的表达形式变为:

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t. \quad (26)$$

这里,  $u = (u_1, u_2)$ ,  $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-1, 0]$ 。

对于  $\psi \in C^1([-1, 0], (R^2)^*)$ , 定义  $A = A(0)$  的伴随算子  $A^*$ :

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 \psi(-s) d\eta(s, \mu), & s = 0. \end{cases}$$

对于  $\phi \in C^1([-1, 0], (R^2)^*)$ , 定义一个双线性形式:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}^T(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi.$$

设  $A$  和  $A^*$  对应于特征根  $i\omega_0\tau_0$  与  $-i\omega_0\tau_0$  的特征向量分别为  $q(\theta)$  和  $q^*(s)$ 。于是

$$A(0)q(\theta) = i\omega_0\tau_0 q(\theta), A^*(0)q^*(s) = -i\omega_0\tau_0 q^*(s).$$

通过计算, 可以得到:

$$q(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i\omega_0\tau_0\theta}, \theta \in [-1, 0); q^*(s) = D \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0\tau_0 s}, s \in (0, 1],$$

其中,

$$\alpha = \frac{i\omega_0 - P_{11}}{P_{12}}, \beta = \frac{-i\omega_0 - (P_{22} + P_{22}'e^{i\omega_0\tau_0})}{P_{12}}, D = \frac{1}{\beta + \bar{\alpha} + \tau_0(P_{21}' + P_{22}'\bar{\alpha})e^{i\omega_0\tau_0}},$$

则有  $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ ,  $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$ 。

利用文献 [15-16] 等类似算法, 可以得到刻画 Hopf 分支方向以及分支周期解稳态的系数。

$$\begin{aligned} g_{20} &= \tau_0 \bar{D} [\bar{\beta}(a_{11} + 2a_{12}\alpha) + b_{11}e^{-2i\omega_0\tau_0} + 2b_{12}\alpha e^{-i\omega_0\tau_0} + 2b_{13}\alpha e^{-2i\omega_0\tau_0} + 2b_{14}\alpha^2 e^{-i\omega_0\tau_0}], \\ g_{11} &= \tau_0 \bar{D} \{ \bar{\beta}[a_{11} + a_{12}(\alpha + \bar{\alpha})] + b_{11} + b_{12}(\bar{\alpha}e^{-i\omega_0\tau_0} + \alpha e^{i\omega_0\tau_0}) + b_{13}(\alpha + \bar{\alpha}) + b_{14}\bar{\alpha}(e^{-i\omega_0\tau_0} + e^{i\omega_0\tau_0}) \}, \\ g_{02} &= \tau_0 \bar{D} [\bar{\beta}(a_{11} + 2a_{12}\bar{\alpha}) + b_{11}e^{2i\omega_0\tau_0} + 2b_{12}\bar{\alpha}e^{i\omega_0\tau_0} + 2b_{13}\bar{\alpha}e^{2i\omega_0\tau_0} + 2b_{14}\bar{\alpha}^2 e^{i\omega_0\tau_0}], \\ g_{21} &= \tau_0 \bar{D} \left\{ \beta \left[ a_{11} \left( W_{11}^{(1)}(0) + \frac{1}{2} W_{20}^{(1)}(0) \right) + a_{12} \left( \alpha W_{11}^{(1)}(0) + \frac{1}{2} \bar{\alpha} W_{20}^{(1)}(0) + W_{11}^{(2)}(0) + \frac{1}{2} W_{20}^{(2)}(0) \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ b_{11} \left( e^{-i\omega_0\tau_0} W_{11}^{(1)}(-1) + \frac{1}{2} e^{i\omega_0\tau_0} W_{20}^{(1)}(-1) \right) + b_{12} \left( \alpha W_{11}^{(1)}(-1) + \frac{1}{2} \bar{\alpha} W_{20}^{(1)}(-1) + e^{-i\omega_0\tau_0} W_{11}^{(2)}(0) + \frac{1}{2} e^{i\omega_0\tau_0} W_{20}^{(2)}(-1) \right) + \right. \\ & \quad b_{13} \left( \alpha e^{-i\omega_0\tau_0} W_{11}^{(1)}(-1) + \frac{1}{2} \bar{\alpha} e^{i\omega_0\tau_0} W_{20}^{(1)}(-1) + e^{-i\omega_0\tau_0} W_{11}^{(2)}(-1) + \frac{1}{2} e^{i\omega_0\tau_0} W_{20}^{(2)}(-1) \right) + \\ & \quad \left. b_{14} \left( \alpha e^{-i\omega_0\tau_0} W_{11}^{(2)}(0) + \frac{1}{2} \bar{\alpha} e^{i\omega_0\tau_0} W_{20}^{(2)}(0) + \frac{1}{2} \bar{\alpha} W_{20}^{(2)}(-1) + \alpha W_{11}^{(2)}(-1) \right) \right], \end{aligned}$$

其中,  $W_{20}(\theta), W_{11}(\theta)$  的计算结果如下:

$$W_{20}(\theta) = -\frac{g_{20}}{i\omega_0\tau_0} q(\theta) - \frac{\bar{g}_{02}}{3i\omega_0\tau_0} \bar{q}(\theta) + E e^{2i\omega_0\tau_0\theta},$$

$$W_{11}(\theta) = \frac{g_{11}}{i\omega_0\tau_0} q(\theta) - \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_0\tau_0} \bar{q}(\theta) + G.$$

$E = (E_1, E_2)^T \in R^2, G = (G_1, G_2)^T \in R^2$  是常向量, 它们分别为以下两个代数方程的解:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2i\omega_0 - P_{11} & -P_{12} \\ -P_{21}' e^{-2i\omega_0\tau_0} & 2i\omega_0 - P_{22} - P_{22}' e^{-2i\omega_0\tau_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{12}\alpha \\ b_{11} e^{-2i\omega_0\tau_0} + 2b_{12}\alpha e^{-i\omega_0\tau_0} + 2b_{13}\alpha e^{-2i\omega_0\tau_0} + 2b_{14}\alpha^2 e^{-i\omega_0\tau_0} \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21}' & P_{22} + P_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} - a_{12}(\alpha + \bar{\alpha}) \\ -b_{11} - b_{12}(\alpha e^{i\omega_0\tau_0} + \bar{\alpha} e^{-i\omega_0\tau_0}) - b_{13}(\alpha + \bar{\alpha}) - b_{14}\alpha\bar{\alpha}(e^{i\omega_0\tau_0} + e^{-i\omega_0\tau_0}) \end{bmatrix}^0 \end{aligned}$$

显而易见, 我们可以得到:

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0\tau_0} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{1}{2}g_{21}, \tag{27}$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}\{C_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\tau_0)\}}, \beta_2 = 2\text{Re}C_1(0), T_2 = -\frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\{\lambda'(\tau_0)\}}{\omega_0\tau_0}, \tag{28}$$

这里,  $C_1(0)$  由式(27)给出, 易得出  $\mu_2, \beta_2, T_2$  的值。因此有

**定理 7** 当  $\tau = \tau_0$  时, 式(28)的  $\mu_2, \beta_2, T_2$  表达式刻画了分支周期解在中心流形上的状态, 因此:

- (1)  $\mu_2$  确定分支的方向。如果  $\mu_2 > 0$  ( $\mu_2 < 0$ ), 则 Hopf 分支是超临界的 (次临界的);
- (2)  $\beta_2$  确定分支周期解的稳定性。如果  $\beta_2 < 0$  ( $\beta_2 > 0$ ), 则分支周期解是稳定的 (不稳定的);
- (3)  $T_2$  确定分支周期解的周期。如果  $T_2 > 0$  ( $T_2 < 0$ ), 则分支周期解的周期增加 (减少)。

### 5 全局 Hopf 分支

接下来, 本节将根据 Wu 的理论<sup>[17]</sup>, 针对时滞  $\tau_1, \tau_2, \tau$  的不同组合情形, 以情形 4 和情形 5 为例, 阐述 Hopf 分支的全局延拓结果。

情形 5 下, 令  $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T = (x_1(t), x_2(t))^T$ , 将系统改写成为泛函微分方程  $\dot{z}(t) = F(z_t, \tau, p)$ , 其中  $z_t = (z_{1t}(\theta), z_{2t}(\theta))^T = (z_1(t+\theta), z_2(t+\theta))^T \in C([- \tau, 0], R^2)$ 。显然存在一个正平衡点  $E^*(x_1^*, x_1^* + \frac{h_2 x_1^*}{S})$  和一个边界平衡点  $E_1(x_1, 0)$ 。

由此定义

$$X = C([- \tau, 0], R^2), \Gamma = C\ell\{(z, \tau, p) \in X \times R \times R_+\}, N = \{(\bar{z}, \tau, p) | F(\bar{z}, \tau, p) = 0\},$$

其中,  $z$  为系统的非恒定周期解,  $\bar{z}$  为系统的平衡点,  $\Gamma$  为给定的关于  $(z, \tau, p)$  空间, 那么系统在  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)^T$  处的特征矩阵可以表示为

$$\Delta(\bar{z}, \tau, p)(\lambda) = \lambda \mathbf{Id} - DF(\bar{z}, \tau, p) e^{\lambda \cdot} \mathbf{Id} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\bar{z}_1 + q\bar{z}_2 - (m+1+h_1) & q\bar{z}_1 \\ -\frac{S\bar{z}_2^2}{\bar{z}_1^2} e^{-\lambda\tau_1} & \lambda - (S+h_2) + \frac{S\bar{z}_2}{\bar{z}_1} e^{-\lambda\tau_2} \end{pmatrix},$$

式中,  $\mathbf{Id}$  是单位矩阵,  $\mathbf{Id}$  是  $F$  相对于  $z_t$  的 Fréchet 导数在  $(\bar{z}, \tau, p)$  处求值。当  $(\bar{z}, \tau, p) \in N$  且  $\Delta(\bar{z}, \tau, p) =$

0时,称 $(\bar{z}, \tau, \rho)$ 为中心;当中心 $(\bar{z}, \tau, \rho)$ 是其某个邻域中的唯一的中心时,称 $(\bar{z}, \tau, \rho)$ 为孤立中心。

**引理3**<sup>[17]</sup> 若 $\tau$ 是有界的,那么系统(3)的所有周期解一致有界。

若 $x_1(t) > 0, x_2(t) > 0$ 为系统的解,那么易证明存在 $T > 0, x_1(t) < \varphi$ ,对于 $t > T + \tau$ 时,可得到:

$$\dot{x}_2(t) < Sx_2(t) \left( 1 - \frac{x_2(t)}{2\varphi} \right).$$

显而易见,当 $t$ 足够大时, $x_2(t) < 2\varphi$ ,因此,系统位于第一象限内的周期解必然是一致有界的。

**引理4** 系统(3)没有非平凡 $\tau^-$ 周期解。

**证明** 设 $x_1(t), x_2(t)$ 是系统的解,那么

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) \exp \left\{ \int_0^t [(m+1+h_1) - x_1(s) - qx_1(s)x_2(s)] ds \right\}, \\ x_2(t) = x_2(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[ (S+h_2) - \frac{Sx_2(s-\tau_2)}{x_1(s-\tau_1)} \right] ds \right\}, \end{cases}$$

这意味着,系统的解不能穿过两个坐标轴,因此,非平凡周期轨道必须位于每个象限的内部。假设 $x_1(t), x_2(t)$ 是系统的一个非平凡周期解,则 $x_1(t) > 0, x_2(t) > 0$ ,否则由系统的两个方程得出与 $x_1(t), x_2(t)$ 是周期解的事实矛盾,即系统的周期解只能在第一象限内。此时,不存在非平凡 $\tau^-$ 周期解。证毕。

由Wu<sup>[17]</sup>提出的泛函微分方程的全局Hopf分支理论阐述如下。

**引理5** 假设孤立中心 $(\bar{z}, \tau, \rho)$ 满足文<sup>[17]</sup>中的 $(A_1 - A_4)$ 条件,令 $\ell_{(\bar{z}, \tau, \rho)}$ 表示 $\Gamma$ 内过 $(\bar{z}, \tau, \rho)$ 的连通分支,那么有以下结论:

(1) 连通分支 $\ell_{(\bar{z}, \tau, \rho)}$ 是无界的;

(2)  $\ell_{(\bar{z}, \tau, \rho)}, \ell_{(\bar{z}, \tau, \rho)} \cap \Gamma$ 是有界的,且  $\sum_{(\bar{z}, \tau, \rho) \in \ell_{(\bar{z}, \tau, \rho)} \cap \mathbb{N}} \gamma_m(\bar{z}, \tau, \rho) = 0$ 。

对于所有的 $m = 1, 2, 3, \dots, \gamma_m(\bar{z}, \tau, \rho)$ 是 $(\bar{z}, \tau, \rho)$ 的第 $m$ 阶横截数。

若引理5中的2)不成立,那么连通分支 $\ell_{(\bar{z}, \tau, \rho)}$ 是无界的, $\ell_{(\bar{z}, \tau, \rho)}$ 在 $\tau^-$ 空间上的投影是无上界的,即 $\tau^-$ 上的投影为区间 $[\tau, \infty)$ 。

**引理6** 假设 $(H_1)$ 成立,则对于定理5中定义的 $\tau^*, \omega^*$ ,对于每一个 $\tau > \tau^*$ 至少存在 $j - 1$ 个周期解。

**证明** 显然, $(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*})$ 是系统的一个孤立中心。设 $\ell_{(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*})}$ 为在 $\Gamma$ 内通过 $(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*})$ 的连通分支,由定理4易知, $(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*})$ 非空,因此,连通分支 $\ell_{(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*})}$ 在 $\tau^-$ 上的投影是区间 $[\bar{\tau}, \infty)$ ,其中 $j \geq 0, \bar{\tau} \leq \tau^*$ 。

系统在 $E_1$ 处的特征矩阵为

$$\mathbf{\Delta}(\bar{z}, \tau, \rho)(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\bar{z}_1 - (m+1+h_1) & q\bar{z}_1 \\ 0 & \lambda - (S+h_2) \end{pmatrix}.$$

由此可见, $E_1$ 并非系统中心。

由定理4知,易证 $(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*})$ 是系统的孤立中心,且存在 $\epsilon > 0, \delta > 0$ 及光滑函数 $\lambda: (\tau^* - \delta, \tau^* + \delta) \rightarrow C$ ,使得对 $\forall \tau \in [\tau^* - \delta, \tau^* + \delta)$ ,有 $|\mathbf{\Delta}(\lambda(\tau))| = 0, |\lambda(\tau) - i\omega^*| < \epsilon$ ,且 $\lambda(\tau^*) =$

$$\omega^*, \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{dt} \Big|_{\tau=\tau^*} > 0.$$

令  $\Omega_{\epsilon, \frac{2\pi}{\omega^*}} = \left\{ (\eta, p) \mid 0 < \eta < \epsilon, \left| p - \frac{2\pi}{\omega^*} \right| < \epsilon \right\}$ , 则易证得, 在  $[\tau^* - \delta, \tau^* + \delta] \times \partial\Omega_{\epsilon, \frac{2\pi}{\omega^*}}$  内,

$$\left| \Delta(E^*, \tau^*, p) \left( \eta + i \frac{2\pi}{p} \right) \right| = 0 \text{ 的充要条件为 } \eta = 0, \tau = \tau^*, p = \frac{2\pi}{\omega^*}.$$

因此, 若定义

$$H^\pm \left( E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*} \right) (\eta, p) = \left| \Delta(E^*, \tau^* \pm \delta, p) \left( \eta + i \frac{2\pi}{p} \right) \right|,$$

可计算孤立中心  $(E^*, \tau^* \pm \delta, p)$  的横截数为:

$$\gamma \left( E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*} \right) = \deg_B \left( H^- \left( E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*} \right), \Omega_\epsilon \right) - \deg_B \left( H^+ \left( E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*} \right), \Omega_\epsilon \right) = -1,$$

其中, 有

$$\sum_{(\bar{z}, \tau, p) \in \ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}} \gamma(\bar{z}, \tau, p) < 0.$$

由引理 3 知, 在  $\Gamma$  内经过  $\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)$  的连通分支  $\ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  是无界的。可以证明当  $\tau < \tau^*$  时, 连通分支  $\ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  在  $\tau^-$  空间上的投影是区间  $[\bar{\tau}, \infty)$ 。从引理 4 的证明中可以看出, 系统 (3) 无时滞时没有非平凡的周期解, 因此连通分支  $\ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  在  $\tau^-$  空间上的投影无上界。

相反地, 假设连通分支  $\ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  在  $\tau^-$  空间上的投影是有界的, 这意味着连通分支  $\ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  在  $\tau^-$  空间上的投影包含区间  $(0, \tau_*)$ , 由  $\tau^* > \frac{2\pi}{\omega^*}$  以及引理 5 知, 当  $(z(t), \tau, p) \in \ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  时, 存在一个特殊值  $\tau_*$ , 使得  $\tau_* > p$ 。这表明连通分支  $\ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  在  $p^-$  空间的投影是有界的, 由此矛盾, 即对于任何  $j \geq 0, \bar{\tau} \leq \tau^*$ , 连通分支  $\ell_{\left(E^*, \tau^*, \frac{2\pi}{\omega^*}\right)}$  在  $\tau^-$  空间上的投影是区间  $[\tau^*, \infty)$ 。证毕。

情形 4 下, 此时系统在  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)^T$  处的特征矩阵可以表示为

$$\Delta(\bar{z}, \tau, p)(\lambda) = \lambda \operatorname{Id} - DF(\bar{z}, \tau, p) e^\lambda \cdot \operatorname{Id} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\bar{z}_1 + q\bar{z}_2 - (m + 1 + h_1) & q\bar{z}_1 \\ -\frac{S\bar{z}_2^2}{\bar{z}_1^2} e^{-\lambda\tau} & \lambda - (S + h_2) + \frac{S\bar{z}_2}{\bar{z}_1} e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix},$$

由情形 5 同样证明方法可以得出, 引理 3—6 及定理 4 都成立, 由此可证全局 Hopf 分支的存在性仍成立。

### 6 局部及全局 Hopf 分支数值模拟

为了验证理论分析的结果, 选取  $m = 0.1, q = 0.2, h = -0.1, h_2 = -0.9, S = 1.8$ , 此时系统 (3) 为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (1 - x_1)(x_1 - 0.1) - 0.2x_1x_2 - 0.1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 1.8x_2 \left( 1 - \frac{x_2(t - \tau_2)}{x_1(t - \tau_1)} \right) - 0.9x_2. \end{cases} \quad (29)$$

通过计算可得, 满足定理 1, 系统 (3) 的正平衡点  $E^* = (0.7947, 0.3973)$ 。

现将对  $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$  和  $\tau_1 = \tau_2 = \tau > 0$  两种情况所得的局部以及全局 Hopf 分支稳定性结论进

行数值模拟。

1) 当  $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$  时, 固定  $\tau_1 = 1.2$ , 通过计算可得  $\tau^* \approx 1.8842$ 。因此当  $\tau_2 = 1.5 < \tau^* \approx 1.8842$  时, 平衡点  $E^*$  是渐近稳定的, 见图 1; 当  $\tau_2 = 1.9 > \tau^* \approx 1.8842$  时, 平衡点  $E^*$  失去稳定性, 见图 2; 随着时滞变大, 即  $\tau = 2.8 > \tau^* \approx 1.8842$  时, 系统仍然存在着稳定的周期解, 且在正平衡点附近产生波动, 呈现出多周期变化趋势, 此时的轨线和相图如图 3 所示, 也验证了全局 Hopf 分支的存在性结果。

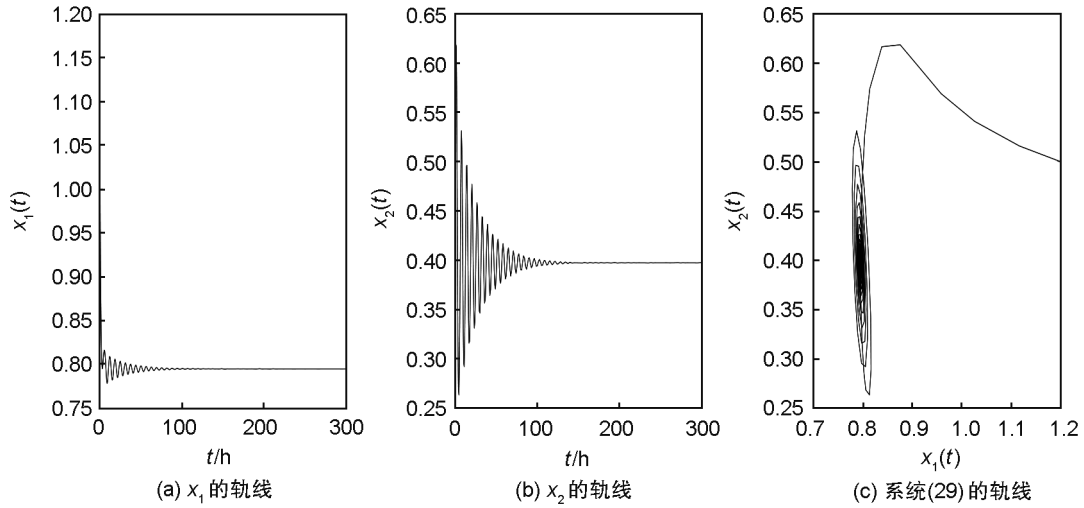


图 1 当  $\tau_1 = 1.2, \tau_2 = 1.5 < \tau^* \approx 1.8842$  时, 系统(29)的轨线和相图

Fig. 1 Trajectory and phase diagram of the system (29) when  $\tau_1 = 1.2, \tau_2 = 1.5 < \tau^* \approx 1.8842$

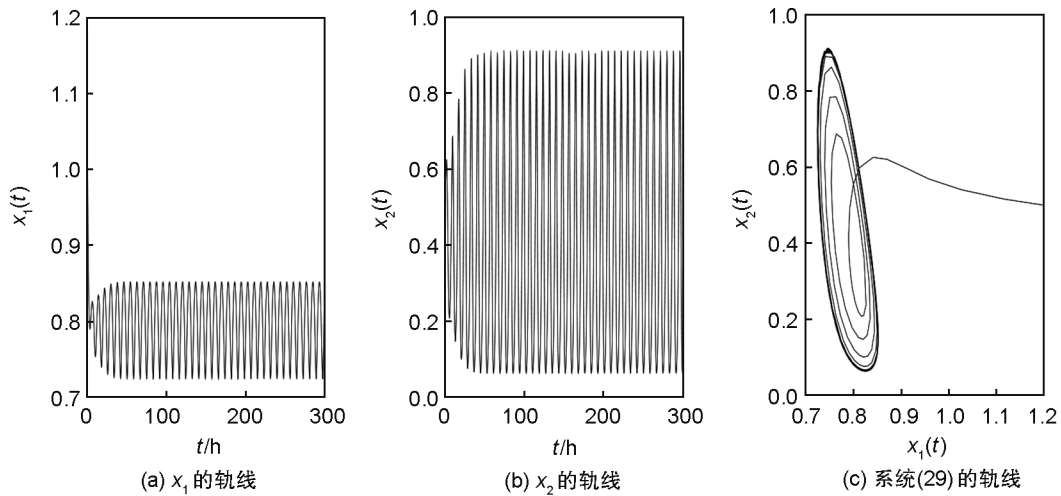


图 2 当  $\tau_1 = 1.2, \tau_2 = 1.9 > \tau^* \approx 1.8842$  时, 系统(29)的轨线和相图

Fig. 2 Trajectory and phase diagram of the system (29) when  $\tau_1 = 1.2, \tau_2 = 1.9 > \tau^* \approx 1.8842$

2) 当  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  时,  $E^2 - (B + D)^2 \approx -0.7194 < 0$ , 系统有正根, 通过计算可得  $\omega_3 \approx 0.7752$ ,  $\tau_0 \approx 1.3701, C_1(0) \approx 0.0278 + 0.0014i, \mu_2 \approx -0.0410, \beta_2 \approx 0.0556, T_2 \approx 0.0390$ 。

由定理 7 可知, 系统(29)的 Hopf 分支的方向为次临界, 分支的周期解是失稳的, 且分支的周期逐增。当  $\tau = 1.36 < \tau_0 \approx 1.3701$  时, 平衡点  $E^*$  是渐近稳定的, 见图 4; 当  $\tau = 1.62 > \tau_0 \approx 1.3701$  时, 平衡点  $E^*$  失去稳定性, 见图 5; 随着时滞变大, 即  $\tau = 2.8 > \tau_0 \approx 1.3701$  时, 系统的周期解稳定性及变化趋势同 1), 此时的轨线和相图如图 6 所示, 即验证了全局 Hopf 分支的存在性结果。

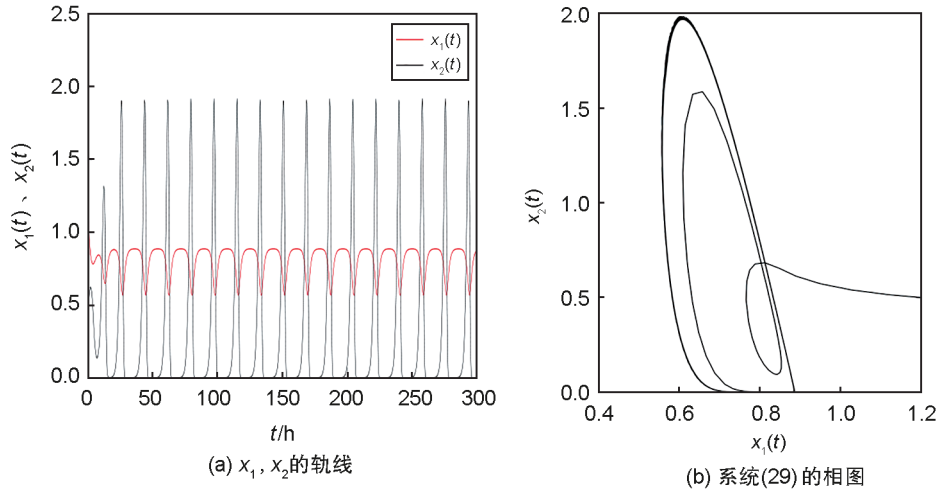


图3 当  $\tau = 2.8 > \tau^* \approx 1.8842$  时, 系统(29)的轨线和相图

Fig. 3 Trajectory and phase diagram of the system (29) when  $\tau = 2.8 > \tau^* \approx 1.8842$

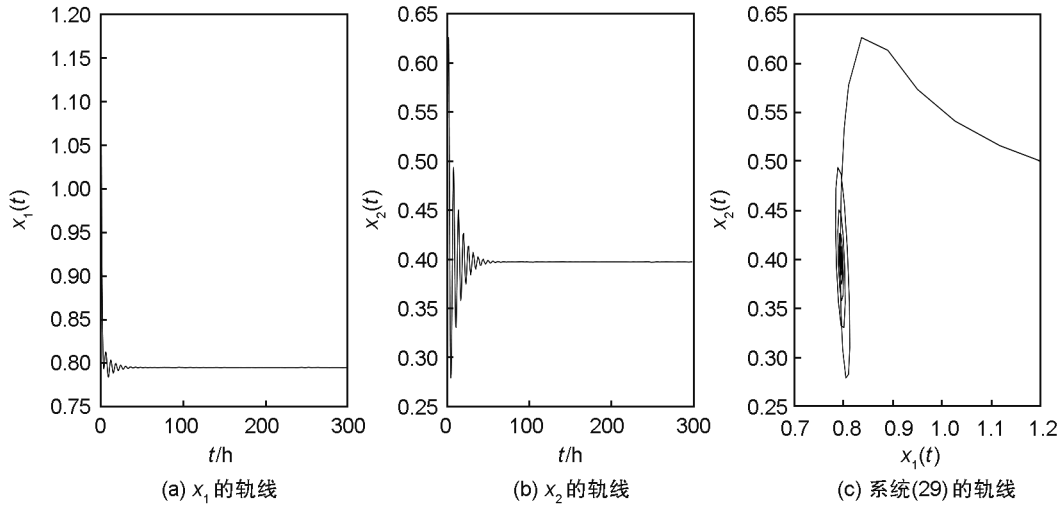


图4 当  $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.36 < \tau_0 \approx 1.3701$  时, 系统(29)的轨线和相图

Fig. 4 Trajectory and phase diagram of the system (29) when  $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.36 < \tau_0 \approx 1.3701$

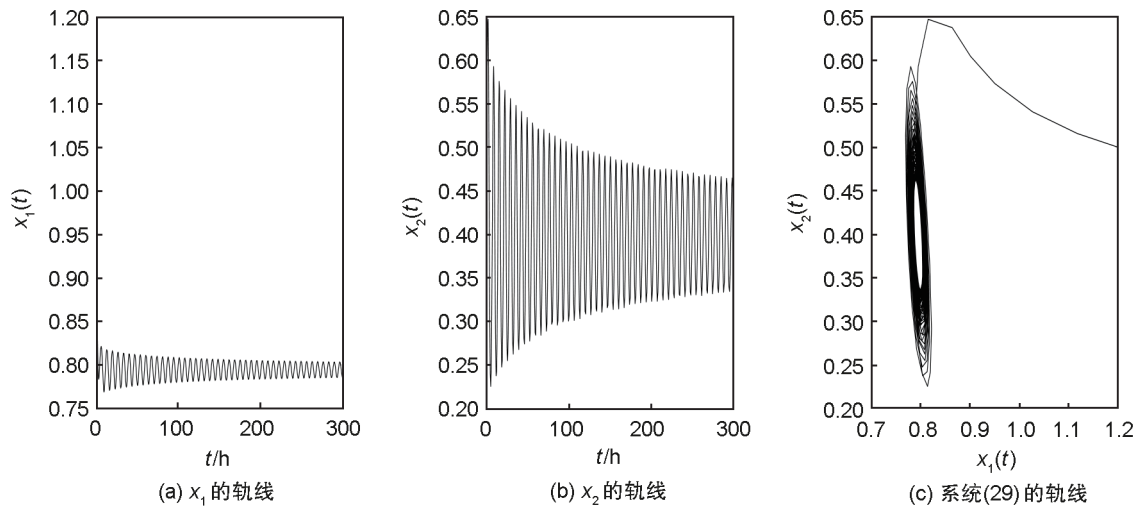


图5 当  $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.62 > \tau_0 \approx 1.3701$  时, 系统(29)的轨线和相图

Fig. 5 Trajectory and phase diagram of the system (29) when  $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.62 > \tau_0 \approx 1.3701$

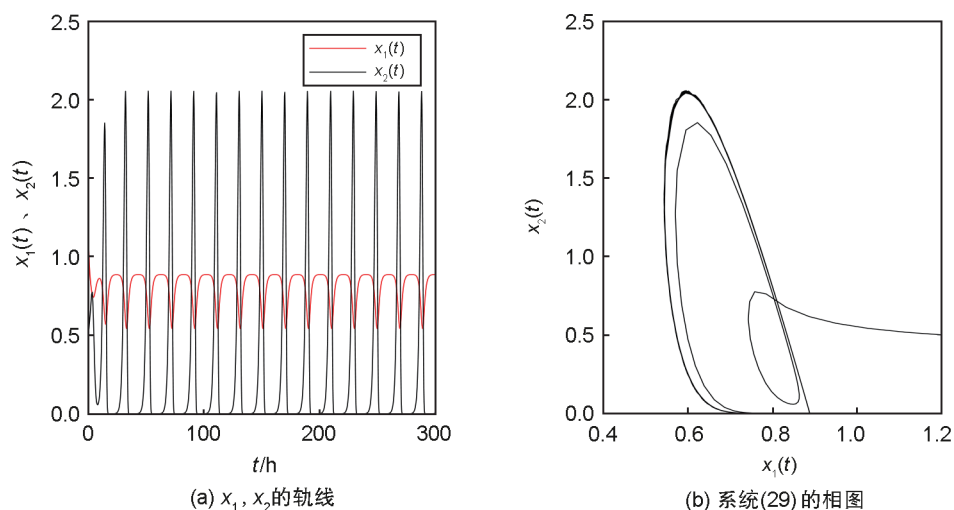


图6 当 $\tau = 2.8 > \tau_0 \approx 1.3701$ 时,系统(29)的轨线和相图

Fig. 6 Trajectory and phase diagram of the system (29) when  $\tau = 2.8 > \tau_0 \approx 1.3701$

## 7 结论

本文利用中心流形定理和规范型理论计算捕食-食饵系统Hopf分支的具体表达式,并证明了分支的存在条件以及平衡点稳定性问题,同时通过全局分支理论将稳定性结论延拓至全局。经理论研究以及数值模拟验证可知,系统在时滞未达到临界值 $\tau_0, \tau^*$ 时,保持稳态;在时滞超越临界值 $\tau_0, \tau^*$ 时,系统失稳,伴随着发生了局部的Hopf分支,产生了周期解,甚至使系统产生混沌。随着时滞的逐渐增大,系统在正平衡点附近呈现波动状态,并表现出明显的多周期变化,证实了全局延拓的结果。本文直观体现种群数量在时滞项以及收获项的影响下呈现出的变化规律,为相关部门及生态环境保护行业人员对诸如此类种群的资源利用提供了理论参考。

## 参考文献:

- [1] MA Z H, WANG S F. Stability Analysis: The Effect of Prey Refuge in Predator-prey Model[J]. *Ecol Model*, 2012, **247**: 95-97. DOI:10.1016/j.ecolmodel.2012.08.013.
- [2] WANG X, ZOU X. Modeling the Fear Effect in Predator-prey Interactions with Adaptive Avoidance of Predators[J]. *Bull Math Biol*, 2017, **79**(6): 1325-1359. DOI: 10.1007/s11538-017-0287-0.
- [3] SINGH T, BANERJEE S. Spatial Aspect of Hunting Cooperation in Predators with Holling Type II Functional Response[J]. *J Biol Syst*, 2018, **26**(4): 511-531. DOI: 10.1142/s0218339018500237.
- [4] ZHANG Y X, RONG X M, ZHANG J M. A Diffusive Predator-prey System with Prey Refuge and Predator Cannibalism[J]. *Math Biosci Eng*, 2019, **16**(3): 1445-1470. DOI:10.3934/mbe.2019070.
- [5] 马战平,霍海峰,向红.具Michaelis-Menten型收获的Leslie-Gower捕食-食饵扩散模型的动力学和模式[J]. *数学物理学报*, 2022, **42**(5): 1575-1591.
- [6] 高芳,王文爽,王静.带有食饵避难的Leslie-Gower捕食者-食饵扩散系统的稳定性及最优税收[J]. *东北师大学报(自然科学版)*, 2014, **46**(2): 1-8. DOI:10.11672/dbsdzk2014-01-001.
- [7] ALLEE W C. Animal Aggregations, a Study in General Sociology[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1931. DOI:10.5962/bhl.title.7313.
- [8] GONZÁLEZ-OLIVARES E, MENA-LORCA J, ROJAS-PALMA A, et al. Dynamical Complexities in the Leslie-Gower Predator-prey Model as Consequences of the Allee Effect on Prey[J]. *Appl Math Model*, 2011, **35**(1): 366-381. DOI:10.1016/j.apm.2010.07.001.
- [9] MA L J, LIU B. Dynamic Analysis and Optimal Control of a Fractional Order Singular Leslie-Gower Prey-predator Model[J]. *Acta Math Sci*, 2020, **40**(5): 1525-1552. DOI:

- 10.1007/s10473-020-0520-z.
- [10] 常笑源, 汪红, 杨鸿飞, 等. 具时滞和Leslie-Gower功能反应函数的捕食者-食饵系统的Hopf分支分析[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2020, **37**(1): 39-44. DOI:10.13482/j.issn1001-7011.2019.04.206.
- CHANG X Y, WANG H, YANG H F, *et al.* Analysis of Hopf Bifurcation on the Leslie-Gower Predator-prey System with Time Delay[J]. *J Nat Sci Heilongjiang Univ*, 2020, **37**(1): 39-44. DOI: 10.13482/j.issn1001-7011.2019.04.206.
- [11] COOKE K L, GROSSMAN Z. Discrete Delay, Distributed Delay and Stability Switches[J]. *J Math Anal Appl*, 1982, **86**(2): 592-627. DOI:10.1016/0022-247X(82)90243-8.
- [12] 张晓朋, 白玉真. 具有收获率和Michaelis-Menten功能性反应的捕食系统的稳定性和Hopf分支[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2011, **37**(3): 21-25.
- ZHANG X P, BAI Y Z. Stability and Hopf Bifurcation of a Predator-prey System with Michaelis-menten Functional Response and Harvesting[J]. *J Qufu Norm Univ Nat Sci*, 2011, **37**(3): 21-25.
- [13] 袁媛, 林汉燕, 董锦华. 时滞捕食系统的全局稳定性与Hopf分支[J]. 郑州大学学报(理学版), 2015, **47**(1): 55-58. DOI: 10.3969/j.issn.1671-6841.2015.01.012.
- YUAN Y, LIN H Y, DONG J H. Global Stability and Hopf Bifurcation for a Delayed Predator-prey System[J]. *J Zhengzhou Univ Nat Sci Ed*, 2015, **47**(1): 55-58. DOI: 10.3969/j.issn.1671-6841.2015.01.012.
- [14] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [15] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [16] SONG Y L, WEI J J. Local Hopf Bifurcation and Global Periodic Solutions in a Delayed Predator-prey System[J]. *J Math Anal Appl*, 2005, **301**(1): 1-21. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.06.056.
- [17] WU J H. Symmetric Functional Differential Equations and Neural Networks with Memory[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1998, **350**(12): 4799-4838. DOI:10.1090/s0002-9947-98-02083-2.
- [18] MA Y F. Global Hopf Bifurcation in the Leslie-Gower Predator-prey Model with Two Delays[J]. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2012, **13**(1): 370-375. DOI:10.1016/j.nonrwa.2011.07.045.