

## 热源和初始分布同时反演的 Tikhonov 正则化方法

王泽文<sup>1,2\*</sup>, 王梓鉴<sup>2,3</sup>, 陈国林<sup>4</sup>, 邱淑芳<sup>1,2</sup>

(1. 广州航海学院 基础教学部, 广东 广州 510725;

2. 东华理工大学 理学院, 江西 南昌 330013;

3. 赣南师范大学 生命科学学院, 江西 赣州 341000;

4. 赣东学院 基础部, 江西 抚州 340000)

**摘要:**研究了有界域中热传导方程源项和初始分布同时反演问题。通过热传导定解问题的特征系统, 结合分离变量的思想方法, 构造了一种能同时重建热传导方程源项和初始分布的 Tikhonov 正则化方法, 证明了正则化解的收敛性, 给出了正则化参数选取的后验策略及其正则化解的误差估计。最后, 对提出的正则化方法进行了数值模拟, 研究结果表明正则化方法是有效的。

**关键词:**热传导方程; 反问题; 正则化方法; 源项; 初始分布

**中图分类号:**O175.26 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2024)02-0302-11

## Tikhonov Regularization Method for Simultaneous Reconstruction of Heat Conduction Source and Initial Distribution

WANG Zewen<sup>1,2\*</sup>, WANG Zijian<sup>2,3</sup>, CHEN Guolin<sup>4</sup>, QIU Shufang<sup>1,2</sup>

(1. Department of Basic Courses, Guangzhou Maritime University, Guangzhou 510725, China;

2. School of Science, East China University of Technology, Nanchang 330013, China;

3. College of Life Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, China;

4. Department of Basic Courses, Gandong University, Fuzhou 344000, China)

**Abstract:** The problem of simultaneous inversion of the source term and initial distribution of heat conduction equation in bounded domains is studied. Through the characteristic system of the heat conduction problem, combined with the idea of separating variables, the Tikhonov regularization method that can simultaneously reconstruct the source term and initial distribution of heat conduction equation, is constructed. The convergence of the regularization solution is proved, and the posterior strategy of regularization parameter selection is given with error estimation of the regularization solutions. Finally, numerical simulations for the proposed regularization method are carried out, and the results show that the regularization method is effective.

**Key words:** heat conduction equation; inverse problem; regularization method; source term; initial distribution

### 0 引言

近年来, 随着反问题理论和方法的不断发展, 很多学者对热传导方程的源项和初始分布同时反演问题进行了研究<sup>[1-20]</sup>。其中, 文献[1]研究了一般抛物型方程中利用两个时刻的测量数据同

收稿日期:2022-07-18;接受日期:2023-02-07

基金项目:国家自然科学基金(12261004;12171248;11961002);江西省自然科学基金(20212ACB201001);东华理工大学研究生创新项目(DHYC-2022);广州航海学院(广州交通大学(筹))科研启动项目

\* 通信作者:王泽文(1974-),男,江西上饶人,教授,研究方向为反问题建模与算法。E-mail:zwwang6@163.com

引文格式:王泽文,王梓鉴,陈国林,等. 热源和初始分布同时反演的 Tikhonov 正则化方法[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(2):302-312. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023013

时重建仅依赖空间变量的源项和初始分布的反演问题,提出了一种将初始分布转移到源项后的同时反演正则化方法。利用某个终值时刻的温度和某个空间位置的温度,文献[2]考虑了同时确定仅依赖于时间变量的源项和初始分布的反问题,其中的数值反演算法归结为一个基于基本解的逆时问题和两次数值微分。文献[3]利用基本解方法研究了标准热传导中同时重建仅依赖空间变量的源项和初始分布的反演问题,该反问题被分解为一个齐次逆时反问题和一个 Poisson 方程边值问题,利用 Tikhonov 正则化方法和广义交叉验证(Generalized Cross-Validation, GCV)方法选择一个恰当的正则化参数来重构空间源项和初始分布。文献[4]利用两个不同时刻的附加测量数据,基于边界元方法给出了源项和初始分布的一种迭代反演算法。文献[5]则研究了一类时间分数阶扩散方程中源项和初始分布的同时反演问题,给出了一种正则化的反演算法。上述关于热传导方程源项和初始分布同时反演的研究,常常将同时反演转化两个问题后分阶段进行求解,或者是利用优化思想将同时反演转化为间接的正则化泛函极小化问题<sup>[1]</sup>,实际上这两种情况往往不是算法意义上的同时反演,且一般很难给出正则化解的收敛性和误差估计。为此,本文旨在构建一种在算法意义上能真正同时反演源项和初始分布的正则化方法,并且给出先验和后验选取正则化参数下正则化解的收敛性。另外,许多学者对于热传导方程中单个源项的反演或者单个初始分布的反演进行了丰富的研究。例如,文献[6]研究了对流-扩散方程的初始分布反演问题,通过有限差分的 Crank-Nicolson 格式将方程离散后构造了带正则化项的目标函数,然后利用伴随同化方法稳定地反演出了初始分布。文献[7]研究一维热传导方程的热源反演问题,给出了一种基于最小二乘支持向量机的反演方法,数值实验表明该方法具有较高的数值精度和稳定性。

考虑下述非齐次标准热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x), & (x, t) \in (0, \pi) \times [0, T], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (1)$$

本文考虑的反问题是:由两个附加的终值数据

$$u(x, T_1) = g_1(x), \quad u(x, T_2) = g_2(x), \quad T_1 < T_2, \quad (2)$$

反演定解问题(1)中未知的初始分布  $\varphi(x)$  和源项  $f(x)$ , 其中  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  满足相容性条件 ( $g_1(0) = g_1(\pi) = 0, g_2(0) = g_2(\pi) = 0$ )。实际应用中,终值数据  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  往往是带有噪声的测量数据,分别记为  $g_1^\delta(x)$  和  $g_2^\delta(x)$ , 且满足

$$\|g_1^\delta(x) - g_1(x)\| \leq \delta, \quad \|g_2^\delta(x) - g_2(x)\| \leq \delta, \quad (3)$$

其中  $\|\cdot\|$  为  $L^2(0, \pi)$  范数。本文依据正则化的思想方法,建立了一种在计算方法上能同时重建源项和初始分布的 Tikhonov 正则化方法,即利用该方法能同时反演出源项和初始分布。

## 1 同时反演的 Tikhonov 正则化方法

### 1.1 同时反演的不适定性

假设  $f(x)$  和  $\varphi(x)$  具有必要的光滑性,则利用分离变量法易得问题(1)的解为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( f_k \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} + \varphi_k e^{-k^2 t} \right) X_k(x), \quad (4)$$

其中  $f_k = (f, X_k(x)), \varphi_k = (\varphi, X_k(x)), X_k(x) = \sin(kx), (\cdot, \cdot)$  表示  $L^2(0, \pi)$  空间上的内积。于是,有

$$g_i(x) = u(x, T_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( f_k \frac{1 - e^{-k^2 T_i}}{k^2} + \varphi_k e^{-k^2 T_i} \right) X_k(x), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

从而有

$$g_{ik} = f_k \frac{1 - e^{-k^2 T_i}}{k^2} + \varphi_k e^{-k^2 T_i}, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

由上式可解出  $f_k$  和  $\varphi_k$ , 得

$$f_k = \frac{k^2}{e^{-k^2 T_2} - e^{-k^2 T_1}} (e^{-k^2 T_2} g_{1k} - e^{-k^2 T_1} g_{2k}),$$

$$\varphi_k = \frac{1}{e^{-k^2 T_2} - e^{-k^2 T_1}} ((1 - e^{-k^2 T_2}) g_{1k} - (1 - e^{-k^2 T_1}) g_{2k}).$$

故反演出的源项和初始分布分别为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^{-k^2 T_2} - e^{-k^2 T_1}} (e^{-k^2 T_2} g_{1,k} - e^{-k^2 T_1} g_{2,k}) X_k(x), \tag{7}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{-k^2 T_2} - e^{-k^2 T_1}} ((1 - e^{-k^2 T_2}) g_{1,k} - (1 - e^{-k^2 T_1}) g_{2,k}) X_k(x). \tag{8}$$

由以上表达式可知, 若  $g_{1k}$  和  $g_{2k}$  分别是噪声数据  $g_1^\delta(x)$  和  $g_2^\delta(x)$  的 Fourier 系数, 则在反演初始分布时噪声将被  $e^{k^2 T_1}$  放大; 而在重建源项时, 由于  $\frac{k^2}{e^{-k^2 T_2} - e^{-k^2 T_1}} e^{-k^2 T_2}$  是有界的, 且随着  $k \rightarrow \infty$  而趋于零, 故重建源项的不适定性主要是数据  $g_2^\delta(x)$  中的噪声被  $k^2$  放大所致。因此, 由式(7)和(8)同时反演源项和初始分布是不适定的。

1.2 同时反演的正则化方法

为建立同时反演的正则化方法, 引进正问题算子  $K_i, i = 1, 2$ , 即

$$K_i = [k_{i1}, k_{i2}]: \begin{bmatrix} f \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto u(x, T_i), i = 1, 2. \tag{9}$$

针对噪声数据  $g_1^\delta(x)$  和  $g_2^\delta(x)$ , 为克服同时反演问题的不适定性, 本文提出的 Tikhonov 正则化方法是极小化正则化泛函

$$J(f, \varphi) = \|K_1 [f, \varphi]^T - g_1^\delta\|^2 + \|K_2 [f, \varphi]^T - g_2^\delta\|^2 + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [f, \varphi]^T, \tag{10}$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0$  是正则化参数, 内积  $([f, \varphi]^T, [f, \varphi]^T)$  定义为

$$([f, \varphi]^T, [f, \varphi]^T) = (f, f) + (g, g).$$

记  $H_0([0, \pi]) = \{\psi(x) | \psi(x) \in L^2([0, \pi]), \psi(0) = \psi(\pi) = 0\}$ 。

**定理 1** 设  $K_i: [f, \varphi]^T \in H_0([0, \pi]) \times H_0([0, \pi]) \mapsto u(x, T_i)$  是由(9)式定义的算子。对于给定的正则化参数  $\alpha > 0, \beta > 0$ , 正则化泛函  $J(f, \varphi)$  存在唯一极小元  $[f^\delta, \varphi^\delta]^T$ , 且该极小元  $[f^\delta, \varphi^\delta]^T$  等价于正规方程

$$K^* K \begin{bmatrix} f^\delta \\ \varphi^\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^\delta \\ \varphi^\delta \end{bmatrix} = K^* \begin{bmatrix} g_1^\delta \\ g_2^\delta \end{bmatrix} \tag{11}$$

的解, 其中  $K^*$  为  $K = [K_1, K_2]^T$  的伴随算子, 即

$$\begin{cases} (K_{11}^* K_{11} + K_{21}^* K_{21}) f^\delta + (K_{11}^* K_{12} + K_{21}^* K_{22}) \varphi^\delta + \alpha f^\delta = K_{11}^* g_1^\delta + K_{21}^* g_2^\delta, \\ (K_{12}^* K_{11} + K_{22}^* K_{21}) f^\delta + (K_{12}^* K_{12} + K_{22}^* K_{22}) \varphi^\delta + \beta \varphi^\delta = K_{12}^* g_1^\delta + K_{22}^* g_2^\delta. \end{cases} \tag{12}$$

**证明** 显然,  $K_i$  是  $H_0([0, \pi]) \times H_0([0, \pi])$  上的有界线性算子。

设  $\{[f_n, \varphi_n]^T\}_{n=1}^\infty \subset H_0([0, \pi]) \times H_0([0, \pi])$  为正则化泛函(10)的极小化序列, 即当  $n \rightarrow \infty$  时有  $J(f_n, \varphi_n) \rightarrow \inf J(f, \varphi)$ 。经简单计算, 可得

$$J(f_n, \varphi_n) + J(f_m, \varphi_m) = 2J\left(\frac{f_n + f_m}{2}, \frac{\varphi_n + \varphi_m}{2}\right) + \frac{1}{2} \|K_1 [f_n - f_m, \varphi_n - \varphi_m]^T\|^2 + \frac{1}{2} \|K_2 [f_n - f_m, \varphi_n - \varphi_m]^T\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|(f_n - f_m)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|(\varphi_n - \varphi_m)\|^2 \geq$$

$$2\inf J(f, \varphi) + \frac{\alpha}{2} \|(f_n - f_m)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|(\varphi_n - \varphi_m)\|^2。$$

当  $n, m$  趋于无穷时, 上式左边收敛于  $2\inf J(f, \varphi)$ , 这表明序列  $\{f_n\}$  和  $\{\varphi_n\}$  是 Cauchy 序列。于是, 由平方可积函数空间的完备性, 可知存在  $f^\delta \in H_0([0, \pi])$  和  $\varphi^\delta \in H_0([0, \pi])$  有  $f^\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  和  $\varphi^\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ 。由  $J(f, \varphi)$  的连续性可知  $J(f_n, \varphi_n) \rightarrow J(f^\delta, \varphi^\delta) = \inf J(f, \varphi)$ 。这证明了正则化泛函(10)存在极小元。

另一方面, 根据实线性空间中的内积运算, 对于任意的  $(f, \varphi)$  有

$$\begin{aligned} J(f, \varphi) - J(f^\delta, \varphi^\delta) &= 2(K_1[f^\delta, \varphi^\delta]^T - g_1^\delta, K_1[f - f^\delta, \varphi - \varphi^\delta]^T) + \\ &\quad 2(K_2[f^\delta, \varphi^\delta]^T - g_2^\delta, K_2[f - f^\delta, \varphi - \varphi^\delta]^T) + \\ &2\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [f^\delta, \varphi^\delta]^T, [f - f^\delta, \varphi - \varphi^\delta]^T\right) + \|K_1[f - f^\delta, \varphi - \varphi^\delta]^T\|^2 + \|K_2[f - f^\delta, \varphi - \varphi^\delta]^T\|^2 + \\ &\quad \left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [\hat{f} - f^\delta], [\hat{\varphi} - \varphi^\delta]\right) = \\ &\left(\begin{bmatrix} (K_{11}^* K_{11} + K_{21}^* K_{21}) f^\delta + (K_{11}^* K_{12} + K_{21}^* K_{22}) \varphi^\delta + \alpha f^\delta - K_{11}^* g_1^\delta - K_{21}^* g_2^\delta \\ (K_{12}^* K_{11} + K_{22}^* K_{21}) f^\delta + (K_{12}^* K_{12} + K_{22}^* K_{22}) \varphi^\delta + \beta \varphi^\delta - K_{12}^* g_1^\delta - K_{22}^* g_2^\delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f - f^\delta \\ \varphi - \varphi^\delta \end{bmatrix}\right) + \\ &\quad \|K_1[f - f^\delta, \varphi - \varphi^\delta]^T\|^2 + \|K_2[f - f^\delta, \varphi - \varphi^\delta]^T\|^2 + \left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [\hat{f} - f^\delta], [\hat{\varphi} - \varphi^\delta]\right)。 \end{aligned}$$

由上式易知求解正规方程与极小化泛函  $J(f, \varphi)$  是等价的。显然, 若  $(\hat{f}, \hat{\varphi})$  也是正则化泛函  $J(f, \varphi)$  的极小元, 则由上式可得

$$0 = \|K_1[\hat{f} - f^\delta, \hat{\varphi} - \varphi^\delta]^T\|^2 + \|K_2[\hat{f} - f^\delta, \hat{\varphi} - \varphi^\delta]^T\|^2 + \left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [\hat{f} - f^\delta], [\hat{\varphi} - \varphi^\delta]\right),$$

故知  $\hat{f} = f^\delta, \hat{\varphi} = \varphi^\delta$ , 即得唯一性成立。

接下来, 根据正规方程组(12)给出正则化解的表达式。首先, 我们记

$$F_{1k} = \frac{1 - e^{-k^2 T_1}}{k^2}, F_{2k} = \frac{1 - e^{-k^2 T_2}}{k^2}, \Phi_{1k} = e^{-k^2 T_1}, \Phi_{2k} = e^{-k^2 T_2}。$$

然后, 将  $f^\delta, \varphi^\delta, g_1^\delta$  和  $g_2^\delta$  按特征函数系  $X_k(x)$  作 Fourier 展开, 带入正规方程组(12), 即可得 Fourier 系数满足以下方程组:

$$\begin{cases} (F_{1k}^2 + F_{2k}^2) f_k^\delta + (F_{1k} \Phi_{1k} + F_{2k} \Phi_{2k}) \varphi_k^\delta + \alpha f_k^\delta = F_{1k} g_{1k}^\delta + F_{2k} g_{2k}^\delta, \\ (\Phi_{1k} F_{1k} + \Phi_{2k} F_{2k}) f_k^\delta + (\Phi_{1k}^2 + \Phi_{2k}^2) \varphi_k^\delta + \beta \varphi_k^\delta = \Phi_{1k} g_{1k}^\delta + \Phi_{2k} g_{2k}^\delta \end{cases} \quad (13)$$

令

$$\begin{aligned} P_1 &= (F_{1k}^2 + F_{2k}^2) + \alpha, P_2 = F_{1k} \Phi_{1k} + F_{2k} \Phi_{2k}, \\ P_3 &= (\Phi_{1k}^2 + \Phi_{2k}^2) + \beta, \\ B_1 &= F_{1k} g_{1k}^\delta + F_{2k} g_{2k}^\delta, B_2 = \Phi_{1k} g_{1k}^\delta + \Phi_{2k} g_{2k}^\delta \end{aligned}$$

于是, 从测量数据  $g_1^\delta$  和  $g_2^\delta$  反演源项和初始分布的正则化解分别为

$$f_{\alpha, \beta}^\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_3 B_1 - P_2 B_2}{P_1 P_3 - P_2^2} X_k(x), \varphi_{\alpha, \beta}^\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_1 B_2 - P_2 B_1}{P_1 P_3 - P_2^2} X_k(x)。 \quad (14)$$

记

$$P_{10} = F_{1k}^2 + F_{2k}^2, P_{30} = \Phi_{1k}^2 + \Phi_{2k}^2, B_{10} = F_{1k} g_{1k} + F_{2k} g_{2k}, B_{20} = \Phi_{1k} g_{1k} + \Phi_{2k} g_{2k},$$

其中  $g_{1k}$  和  $g_{2k}$  分别是精确数据  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  的 Fourier 系数。再记对应于精确数据的正则化解为  $f_{\alpha, \beta}$  和  $\varphi_{\alpha, \beta}$ , 则

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_3 B_{10} - P_2 B_{20}}{P_1 P_3 - P_2^2} X_k(x), \varphi_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_1 B_{20} - P_2 B_{10}}{P_1 P_3 - P_2^2} X_k(x), \tag{15}$$

以及(7)和(8)式则可改写成

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{30} B_{10} - P_2 B_{20}}{P_{10} P_{30} - P_2^2} X_k(x), \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{10} B_{20} - P_2 B_{10}}{P_{10} P_{30} - P_2^2} X_k(x). \tag{16}$$

**定理2** 若精确源项 $f(x)$ 和精确初始分布 $\varphi(x)$ 的Fourier系数满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2)^{2p} f_k^2 < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} (k^2)^2 \varphi_k^2 < \infty, p > 0,$$

则存在常数 $C_1, C_2$ 和 $C_3$ 使得

$$\|f^\delta - f\| \leq 2C_1 \frac{\delta}{\alpha} + C_2 \alpha^{p/2} + C_3 \beta^{1/2},$$

即当 $\frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0$ ,且 $\alpha \rightarrow 0$ 和 $\beta \rightarrow 0$ 时,正则化解 $f^\delta(x) \rightarrow f(x)$ 。

**证明** 由三角不等式,可知

$$\|f^\delta - f\| \leq \|f^\delta - f_{\alpha,\beta}\| + \|f_{\alpha,\beta} - f\|.$$

经简单计算,可得

$$P_1 P_3 - P_2^2 \geq \beta F_{1k}^2 + \beta F_{2k}^2 + \alpha \Phi_{1k}^2 + \alpha \Phi_{2k}^2 + \alpha \beta,$$

和

$$P_3 B_1 - P_2 B_2 = \Phi_{2k} (F_{1k} \Phi_{2k} - F_{2k} \Phi_{1k}) g_{1k}^\delta + \Phi_{1k} (F_{2k} \Phi_{1k} - F_{1k} \Phi_{2k}) g_{2k}^\delta + \beta F_{1k} g_{1k}^\delta + \beta F_{2k} g_{2k}^\delta,$$

其中

$$|F_{1k} \Phi_{2k} - F_{2k} \Phi_{1k}| = \frac{e^{-k^2 T_1} - e^{-k^2 T_2}}{k^2} \leq e^{-k^2 T_1}.$$

于是

$$\begin{aligned} \|f^\delta - f_{\alpha,\beta}\|^2 &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_{1k}^4 |g_{1k}^\delta - g_{1k}|^2 + \Phi_{1k}^4 |g_{2k}^\delta - g_{2k}|^2 + \beta^2 |g_{1k}^\delta - g_{1k}|^2 + \beta^2 |g_{2k}^\delta - g_{2k}|^2}{(\beta F_{1k}^2 + \beta F_{2k}^2 + \alpha \Phi_{1k}^2 + \alpha \Phi_{2k}^2 + \alpha \beta)^2} \leq \\ &\frac{2C_1^2}{\alpha^2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |g_{1k}^\delta - g_{1k}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{2k}^\delta - g_{2k}|^2 \right), \end{aligned}$$

即

$$\|f^\delta - f_{\alpha,\beta}\| \leq \frac{2C_1 \delta}{\alpha}. \tag{17}$$

另一方面,注意到 $T_1 < T_2$ ,  $P_{10} P_{30} - P_2^2 = \left( \frac{e^{-k^2 T_1} - e^{-k^2 T_2}}{k^2} \right)^2$ ,经细致计算可得

$$\begin{aligned} \|f_{\alpha,\beta} - f\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{P_3 B_{10} - P_2 B_{20}}{P_1 P_3 - P_2^2} - \frac{P_{30} B_{10} - P_2 B_{20}}{P_{10} P_{30} - P_2^2} \right)^2 = \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(P_3 B_{10} - P_2 B_{20})(P_{10} P_{30} - P_2^2) - (P_1 P_3 - P_2^2)(P_{30} B_{10} - P_2 B_{20})}{((P_{10} P_{30} - P_2^2) + \alpha P_{30} + \beta P_{10} + \alpha \beta)(P_{10} P_{30} - P_2^2)} \right)^2 = \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\beta B_{10} (P_{10} P_{30} - P_2^2) - (\alpha P_{30} + \beta P_{10} + \alpha \beta)(P_3 B_{10} - P_2 B_{20})}{((P_{10} P_{30} - P_2^2) + \alpha P_{30} + \beta P_{10} + \alpha \beta)(P_{10} P_{30} - P_2^2)} \right)^2 = \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\beta P_2 (P_{10} B_{20} - P_2 B_{10}) - (\alpha P_{30} + \alpha \beta)(P_3 B_{10} - P_2 B_{20})}{((P_{10} P_{30} - P_2^2) + \alpha P_{30} + \beta P_{10} + \alpha \beta)(P_{10} P_{30} - P_2^2)} \right)^2 \leq \\ &2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\beta P_2}{(P_{10} P_{30} - P_2^2) + \alpha P_{30} + \beta P_{10} + \alpha \beta} \right)^2 \left( \frac{P_{10} B_{20} - P_2 B_{10}}{P_{10} P_{30} - P_2^2} \right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha P_{30}}{(P_{10}P_{30} - P_2^2) + \alpha P_{30} + \beta P_{10} + \alpha\beta} \right)^2 \left( \frac{P_{30}B_{10} - P_2B_{20}}{P_{10}P_{30} - P_2^2} \right)^2 + \\
 & 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha\beta}{(P_{10}P_{30} - P_2^2) + \alpha P_{30} + \beta P_{10} + \alpha\beta} \right)^2 \left( \frac{P_{30}B_{10} - P_2B_{20}}{P_{10}P_{30} - P_2^2} \right)^2 \leq \\
 & 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2\beta e^{k^2 T_1}}{(1 - e^{-k^2(T_2 - T_1)})^2 + 2(1 - e^{-k^2 T_1})^2 \beta (e^{k^2 T_1})^2} \right)^2 (k^2)^2 \varphi_k^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2\alpha (k^2)^{2-p}}{(1 - e^{-k^2(T_2 - T_1)})^2 + \alpha (k^2)^2} \right)^2 (k^2)^{2p} f_k^2 + \\
 & 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha\beta (k^2)^{2-p}}{2\beta(1 - e^{-k^2 T_1}) + \alpha\beta (k^2)^2} \right)^2 (k^2)^{2p} f_k^2 \leq O(\alpha^p) + O(\beta). \tag{18}
 \end{aligned}$$

综合(17)和(18)式,即得

$$\|f^\delta - f\| \leq \frac{2C_1\delta}{\alpha} + C_2\alpha^{p/2} + C_3\beta^{1/2}.$$

注1 类似于定理2,可以得到正则化解  $\varphi^\delta(x)$  的收敛性。

### 1.3 正则化参数的后验选取

正则化参数在不适应问题的数值算法中有着非常重要的作用,其取值是否合适直接关系到解的反演效果。在实际应用中,由于很难获知解的先验信息,故一般采用后验策略选取正则化参数策略。本文采用基于 Morozov 偏差原理的后验选取准则来确定正则化参数  $\alpha$  和  $\beta$  的近似值,即选取正则化参数  $\alpha$  和  $\beta$  满足偏差方程

$$\|K_1[f^\delta, \varphi^\delta]^T - g_1^\delta\|^2 + \|K_2[f^\delta, \varphi^\delta]^T - g_2^\delta\|^2 = 2\delta^2. \tag{19}$$

**定理3** 设  $[f^\delta, \varphi^\delta]^T$  是正则化泛函(11)的极小元,也即是正规方程(12)的正则化解,且满足偏差方程(19)。记对应精确数据  $g_1(x)$  和  $g_2(x)$  的反问题真解为  $[f^*, \varphi^*]^T$ 。不妨设正则化参数  $\beta = \tau\alpha$ ,且设存在  $z = [z_1, z_2]^T$  使得  $[f^*, \tau\varphi^*]^T = K^*z$ ,其中  $\|z\| \leq M$ ,  $K^*$  是算子  $K = [K_1, K_2]^T$  的伴随算子,  $M$  是个正常数,则正则化解  $[f^\delta, \varphi^\delta]^T$  有以下误差估计

$$\|[f^\delta, \sqrt{\tau}\varphi^\delta]^T - [f^*, \sqrt{\tau}\varphi^*]^T\|^2 \leq C\delta, \tag{20}$$

其中  $C$  是依赖于  $M$  的常数。

**证明** 因为  $[f^\delta, \varphi^\delta]^T$  是正则化泛函(11)的极小元,且正则化参数  $\alpha$  和  $\beta$  是由偏差方程(19)决定的,故有

$$\begin{aligned}
 2\delta^2 + \alpha\|f^\delta\|^2 + \beta\|\varphi^\delta\|^2 & \leq \|K_1[f^*, \varphi^*]^T - g_1^\delta\|^2 + \|K_2[f^*, \varphi^*]^T - g_2^\delta\|^2 + \alpha\|f^*\|^2 + \beta\|\varphi^*\|^2 = \\
 & \|g_1 - g_1^\delta\|^2 + \|g_2 - g_2^\delta\|^2 + \alpha\|f^*\|^2 + \beta\|\varphi^*\|^2 = 2\delta^2 + \alpha\|f^*\|^2 + \beta\|\varphi^*\|^2.
 \end{aligned}$$

由关系  $\beta = \tau\alpha$  和上述不等式,可得

$$\|f^\delta\|^2 + \tau\|\varphi^\delta\|^2 \leq \|f^*\|^2 + \tau\|\varphi^*\|^2. \tag{21}$$

于是,有

$$\begin{aligned}
 & \|[f^\delta, \sqrt{\tau}\varphi^\delta]^T - [f^*, \sqrt{\tau}\varphi^*]^T\|^2 = \\
 & (f^\delta, f^\delta) - 2(f^\delta, f^*) + (f^*, f^*) + \tau(\varphi^\delta, \varphi^\delta) - 2\tau(\varphi^\delta, \varphi^*) + \tau(\varphi^*, \varphi^*) \leq \\
 & 2((f^* - f^\delta, f^*) + (\varphi^* - \varphi^\delta, \tau\varphi^*)) = 2([f^* - f^\delta, \varphi^* - \varphi^\delta]^T, K^*z) \leq \\
 & 2(K[f^* - f^\delta, \varphi^* - \varphi^\delta]^T, z) = 2(K[f^*, \varphi^*]^T - [g_1^\delta, g_2^\delta]^T, z) + ([g_1^\delta, g_2^\delta]^T - K[f^\delta, \varphi^\delta]^T, z) \leq \\
 & 2(\sqrt{2}\delta\|z\| + \sqrt{2}\delta\|z\|) \leq 4\sqrt{2}M\delta.
 \end{aligned}$$

证毕。

注2 根据式(4)和(5),存在  $z = [z_1, z_2]^T$  使得  $[f^*, \tau\varphi^*]^T = K^*z$  的假设条件是合理的,其中  $\|z\| \leq M$ ,  $K^*$  是算

子  $K=[K_1, K_2]^T$  的伴随算子,  $M$  是个正常数。

由于偏差方程 (19) 不方便求解, 故在数值实验中一般采用上述正则化参数选取方法的实用形式: 给定  $\alpha_0 \in (0, 1)$  和  $\beta_0 \in (0, 1)$ , 选取正则化参数  $\alpha = \alpha_0^{k^* - 1}$  和  $\beta = \beta_0^{k^* - 1}$  使得恰好第  $k^*$  步有

$$\|K_1[f_{\alpha, \beta}^\delta, \varphi_{\alpha, \beta}^\delta]^T - g_1^\delta\| \leq \delta, \|K_2[f_{\alpha, \beta}^\delta, \varphi_{\alpha, \beta}^\delta]^T - g_2^\delta\| \leq \delta, \tag{22}$$

其中正则化解在实际计算中取前  $N$  项截断为

$$f_{\alpha, \beta}^\delta(x) = \sum_{k=1}^N \frac{P_3 B_1 - P_2 B_2}{P_1 P_3 - P_2^2} X_k(x), \varphi_{\alpha, \beta}^\delta(x) = \sum_{k=1}^N \frac{P_1 B_2 - P_2 B_1}{P_1 P_3 - P_2^2} X_k(x). \tag{23}$$

## 2 数值模拟

在以下数值模拟中, 按以下方式

$$g_1^\delta(x) = g_1(x) + \delta(2r_1(x) - 1)g_1(x), g_2^\delta(x) = g_2(x) + \delta(2r_2(x) - 1)g_2(x),$$

得到带有随机噪声的测量数据, 其中  $\delta$  是相对误差水平,  $r_1(x)$  和  $r_2(x)$  是两个独立的取值于  $(0, 1)$  的随机函数。测量数据的 Fourier 系数  $g_{1k}^\delta$  和  $g_{2k}^\delta$  均按数值积分的梯形公式计算得到。记源项和初始分布的正则化解的相对误差分别为

$$\epsilon_1 = \frac{\|f_{\alpha, \beta}^\delta(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \text{ 和 } \epsilon_2 = \frac{\|\varphi_{\alpha, \beta}^\delta(x) - \varphi(x)\|}{\|\varphi(x)\|}.$$

为了反映本文所提出的同时反演方法的有效性, 我们将反演结果与文献 [9] 中的方法, 以及以下两阶段反演方法进行相对误差比较 (见表 1—2), 反演中正则化参数的选取均采用式 (22) 的方式, 其中, 两阶段反演方法是: 首先, 利用标准 Tikhonov 正则化方法从定解问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, T_1) = g_1^\delta(x), u(x, T_2) = g_2^\delta(x). \end{cases}$$

反演出源项  $f(x)$  的近似解  $f_\alpha^\delta(x)$ ; 然后, 将  $f_\alpha^\delta(x)$  带入定解问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f_\alpha^\delta(x), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(x, T_1) = g_1^\delta(x). \end{cases}$$

利用标准 Tikhonov 正则化方法反演出初始分布  $\varphi(x)$  的近似解  $\varphi_\beta^\delta(x)$ 。经计算, 两阶段反演方法的正则化解分别为

$$f_\alpha^\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-k^2(T_2 - T_1)}}{k^2} \frac{(g_{2k}^\delta - g_{1k}^\delta e^{-k^2(T_2 - T_1)})}{\left(\frac{1 - e^{-k^2(T_2 - T_1)}}{k^2}\right)^2 + \alpha} X_k(x), \tag{24}$$

$$\varphi_\beta^\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 T_1}}{(e^{-k^2 T_1})^2 + \beta} \left( g_{1k}^\delta - \frac{(g_{2k}^\delta - g_{1k}^\delta e^{-k^2(T_2 - T_1)})(1 - e^{-k^2 T_1})}{1 - e^{-k^2(T_2 - T_1)}} \right) X_k(x), \tag{25}$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别为反演源项和初始分布时的正则化参数。

**算例 1** 考虑同时反演热传导问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

的源项 $f(x)$ 和初始分布 $\varphi(x)$ ,其中 $f(x)=9\sin(3x)$ , $\varphi(x)=\sin(x)+\sin(3x)$ , $u(x,t)=e^{-t}\sin(x)+\sin(3x)$ 。取 $T_1=0.5$ , $T_2=1.0$ , $\alpha_0=\frac{1}{2}$ , $\beta_0=\frac{15}{31}$ ,分别对于相对误差水平 $\delta=0.5\%$ , $1\%$ , $5\%$ 进行数值模拟,取 $N=10$ 得到截断正则化解。数值结果(真解和正则化解的对比)见图1,三种方法所得正则化解的误差对比见表1。

**算例2** 考虑同时反演下列热传导问题中的源项和初始分布

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,1), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in (0,1), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

其中 $f(x)=x(1+\cos(3x))$ 和 $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2(\pi-x)$ 。显然,正演问题没有解析解,故 $u(x,T_1)$ 和 $u(x,T_2)$ 由有限元方法计算所得。取 $T_1=0.5$ , $T_2=1.0$ , $\alpha_0=\frac{1}{2}$ , $\beta_0=\frac{15}{31}$ ,分别对于相对误差水平 $\delta=0.5\%$ , $1\%$ , $5\%$ 进行数值模拟,取 $N=30$ 得到截断正则化解,数值结果(真解和正则化解的对比)见图2,三种方法所得正则化解的误差对比见表2。

从表1和表2中可以看出,对于 $T_1=0.5$ 和 $T_2=1.0$ 两个时刻的测量数据,文献[9]中的方法不能有效实现初始分布的反演,这和初始分布反演更为不适定的结论相符合。实际上,测量数据的时刻 $T$ 越大,初始分布反演的不稳定性越强。为此,分别取两组更小时刻的测量数据对文献[9]中的方法进一步模拟,结果如表3所示,从中可以看出当 $T_1=0.1$ 和 $T_2=0.2$ 时能有效地同时反演源

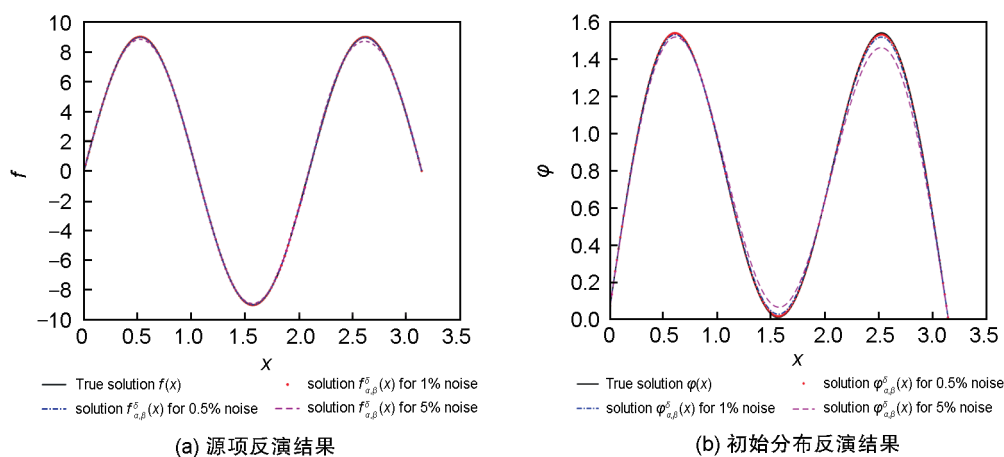


图1 算例1中真解和正则化解的对比图

Fig. 1 Comparison between the true solution and the regularization solutions for example 1

表1 算例1中三种方法在不同噪声水平下的数值反演结果

Table 1 Numerical inversion results of three methods under different noise levels in example 1

方法	$\delta$	$\alpha$	$\beta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$
文献[9]中的方法	0.5%	$2.9104 \times 10^{-11}$	—	$2.3069 \times 10^{-3}$	$2.0168 \times 10^{-1}$
	1%	$5.8208 \times 10^{-11}$	—	$4.6050 \times 10^{-3}$	$3.3355 \times 10^{-1}$
	5%	$2.3283 \times 10^{-10}$	—	$1.8972 \times 10^{-2}$	1.075 1
两阶段反演方法	0.5%	$1.5259 \times 10^{-5}$	$2.1141 \times 10^{-6}$	$3.6238 \times 10^{-3}$	$9.9863 \times 10^{-3}$
	1%	$3.0518 \times 10^{-5}$	$4.3692 \times 10^{-6}$	$6.8799 \times 10^{-3}$	$1.5819 \times 10^{-2}$
	5%	$2.4414 \times 10^{-4}$	$1.8661 \times 10^{-5}$	$2.9988 \times 10^{-2}$	$8.1543 \times 10^{-2}$
同时反演方法	0.5%	$2.4414 \times 10^{-4}$	$1.6472 \times 10^{-4}$	$2.4470 \times 10^{-3}$	$4.5658 \times 10^{-3}$
	1%	$4.8828 \times 10^{-4}$	$3.4043 \times 10^{-4}$	$4.7129 \times 10^{-3}$	$1.3164 \times 10^{-2}$
	5%	$1.9531 \times 10^{-3}$	$1.4540 \times 10^{-3}$	$1.9499 \times 10^{-2}$	$4.3845 \times 10^{-2}$

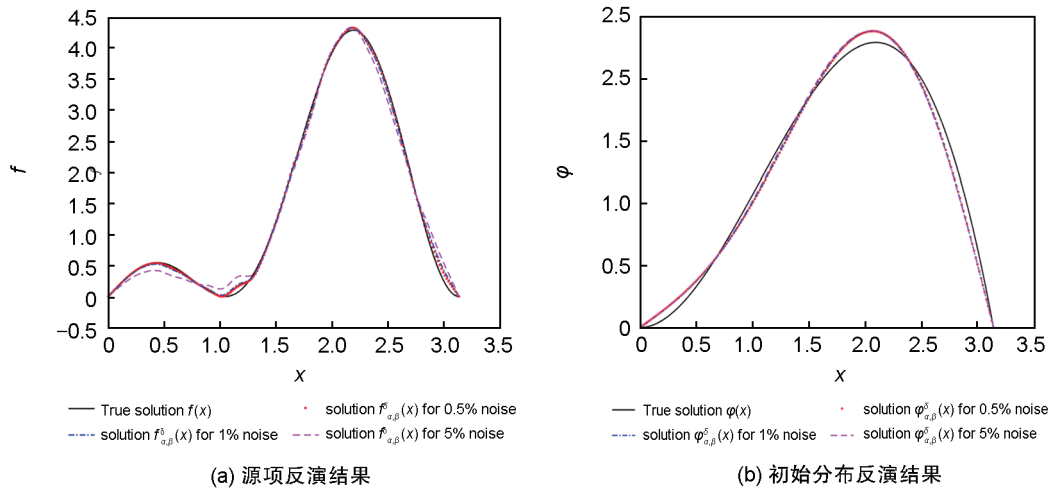


图2 算例2中真解和正则化解的对比图

Fig. 2 Comparison between the true solution and the regularization solutions for example 2

表2 算例2中三种方法在不同噪声水平下的数值反演结果

Table 2 Numerical inversion results of three methods under different noise levels in example 2

方法	$\delta$	$\alpha$	$\beta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$
文献[9]中的方法	0.5%	$4.9304 \times 10^{-32}$	—	$3.3365 \times 10^{-2}$	$4.5932 \times 10^6$
	1%	$1.9722 \times 10^{-31}$	—	$4.2033 \times 10^{-2}$	$1.1571 \times 10^6$
	5%	$4.2352 \times 10^{-22}$	—	$5.6006 \times 10^{-2}$	$1.2139 \times 10^3$
两阶段反演方法	0.5%	$1.2207 \times 10^{-4}$	$9.0297 \times 10^{-6}$	$3.0656 \times 10^{-2}$	$5.2880 \times 10^{-2}$
	1%	$2.4414 \times 10^{-4}$	$2.1141 \times 10^{-6}$	$4.3667 \times 10^{-2}$	$9.9675 \times 10^{-2}$
	5%	$9.7656 \times 10^{-4}$	$2.1141 \times 10^{-6}$	$9.0228 \times 10^{-2}$	$3.2715 \times 10^{-1}$
同时反演方法	0.5%	$2.4414 \times 10^{-4}$	$1.6472 \times 10^{-4}$	$2.0561 \times 10^{-2}$	$4.9767 \times 10^{-2}$
	1%	$4.8828 \times 10^{-4}$	$3.4043 \times 10^{-4}$	$2.9813 \times 10^{-2}$	$5.0482 \times 10^{-2}$
	5%	$1.9531 \times 10^{-3}$	$1.4540 \times 10^{-3}$	$6.2364 \times 10^{-2}$	$5.2260 \times 10^{-2}$

表3 算例2中文献[9]中的方法在不同 $T_1$ 和 $T_2$ 下的数值反演结果

Table 3 Numerical inversion results of the method in ref. [9] under different  $T_1$  and  $T_2$  in example 2

文献[9]中的方法	$\delta$	$\alpha$	$\beta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$
$T_1=0.2$ $T_2=0.3$	0.5%	$3.3881 \times 10^{-21}$	—	$3.2450 \times 10^{-2}$	$4.4963 \times 10^{-1}$
	1%	$1.3553 \times 10^{-20}$	—	$4.1119 \times 10^{-2}$	$8.3363 \times 10^{-1}$
	5%	$1.4211 \times 10^{-14}$	—	$5.6552 \times 10^{-2}$	$5.2654 \times 10^{-1}$
$T_1=0.1$ $T_2=0.2$	0.5%	$2.1684 \times 10^{-19}$	—	$3.5167 \times 10^{-2}$	$2.1257 \times 10^{-2}$
	1%	$8.6736 \times 10^{-19}$	—	$4.3835 \times 10^{-2}$	$2.8985 \times 10^{-2}$
	5%	$1.1369 \times 10^{-13}$	—	$5.0216 \times 10^{-2}$	$4.0575 \times 10^{-2}$

项与初始分布。需要指出的是,对于文献[9]中的算例2,利用 $T_1=0.5$ 和 $T_2=1.0$ 的测量数据能得到比较好的结果,但是文献[9]中的算例相对本文算例来说更为简单。

### 3 结论

本文主要考虑了非齐次热传导方程源项和初始分布同时反演问题,通过热传导方程定解问题的特征系统,结合分离变量方法的思路,给出了能同时反演源项和初始分布的Tikhonov正则化方法,证明了正则化解的收敛性,同时给出正则化参数选取的后验策略及其正则化解的误差估计。数值算例的实验结果表明,在后验选取正则化参数的策略下,同时反演的Tikhonov正则化方法能

有效地同时重建热传导过程中的热传导源项和初始分布。从表1和表2的结果可以看出,本文提出同时反演方法明显比文献[9]中的方法更好,且优于两阶段反演方法。对于本文给出的同时反演的Tikhonov正则化方法,还可被推广解决第二类或第三类边界条件下热传导方程的源项与初始分布同时反演问题,以及相应的非齐次边界问题中的同时反演等。

#### 参考文献:

- [1] WANG Z W, CHEN S L, QIU S F, *et al.* A Non-iterative Method for Recovering the Space-dependent Source and the Initial Value Simultaneously in a Parabolic Equation[J]. *J Inverse Ill Posed Probl*, 2020, **28**(4): 499-516. DOI: 10.1515/jiip-2019-0017.
- [2] WEN J, YAMAMOTO M, WEI T, *et al.* Simultaneous Determination of a Time-dependent Heat Source and the Initial Temperature in an Inverse Heat Conduction Problem [J]. *Inverse Probl Sci Eng*, 2013, **21**(3): 485-499. DOI: 10.1080/17415977.2012.701626.
- [3] WEI T, WANG J C, *et al.* Simultaneous Determination for a Space-dependent Heat Source and the Initial Data by the MFS[J]. *Eng Anal Bound Elem*, 2012, **36**(12): 1848-1855. DOI: 10.1016/j.enganabound.2012.07.006.
- [4] JOHANSSON B T, LESNIC D, *et al.* A Procedure for Determining a Spacewise Dependent Heat Source and the Initial Temperature[J]. *Appl Anal*, 2008, **87**(3): 265-276. DOI: 10.1080/00036810701858193.
- [5] RUAN Z S, YANG J Z, LU X L. Tikhonov Regularisation Method for Simultaneous Inversion of the Source Term and Initial Data in a Time-fractional Diffusion Equation[J]. *East Asian J Appl Math*, 2015, **5**(3): 273-300. DOI: 10.4208/eajam.310315.030715a.
- [6] 吴自库, 范海梅, 陈秀荣. 对流-扩散过程逆过程反问题的伴随同化研究[J]. 水动力学研究与进展A辑, 2008, **23**(2): 121-125. DOI: 10.16076/j.cnki.cjhd.2008.02.010.  
WU Z K, FAN H M, CHEN X R. The Numerical Study of the Inverse Problem in Reverse Process of Convection-diffusion Equation with Adjoint Assimilation Method[J]. *J Hydrodyn*, 2008, **23**(2): 121-125. DOI: 10.16076/j.cnki.cjhd.2008.02.010.
- [7] 吴自库, 李福乐, DO Young Kwak. 一维热传导方程热源反问题基于最小二乘法的正则化方法[J]. 计算物理, 2016, **33**(1): 49-56. DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.2016.01.006.  
WU Z K, LI F L, KWAK D. Least Squares Regularized Method for One-dimensional Source Inverse Heat Conduction Problem[J]. *Chin J Comput Phys*, 2016, **33**(1): 49-56. DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.2016.01.006.
- [8] 彭建梅, 胡彬, 王泽文. 二维热传导方程源项反问题的一类正则化方法[J]. 江西科学, 2017, **35**(1): 57-63. DOI: 10.13990/j.issn1001-3679.2017.01.012.  
PENG J M, HU B, WANG Z W. A Kind of Regularization Method for an Inverse Source Problem of Two-dimensional Heat Equation[J]. *Jiangxi Sci*, 2017, **35**(1): 57-63. DOI: 10.13990/j.issn1001-3679.2017.01.012.
- [9] QIU S F, ZHANG W, PENG J M. Simultaneous Determination of the Space-dependent Source and the Initial Distribution in a Heat Equation by Regularizing Fourier Coefficients of the Given Measurements[J]. *Adv Math Phys*, 2018, **2018**: 1-15. DOI: 10.1155/2018/8247584.
- [10] 于爽. 时间分数阶扩散方程源项与初值反演的指数阶正则化方法[D]. 南昌: 东华理工大学, 2020.  
YU S. Exponential Order Regularization Method for Source Term and Initial Value Inversion of Time Fractional Diffusion Equations[D]. Nanchang: East China Institute of Technology, 2020.
- [11] WANG Z W, QIU S F, RUAN Z S, *et al.* A Regularized Optimization Method for Identifying the Space-dependent Source and the Initial Value Simultaneously in a Parabolic Equation[J]. *Comput Math Appl*, 2014, **67**(7): 1345-1357. DOI: 10.1016/j.camwa.2014.02.007.
- [12] WANG Z W, RUAN Z S, HUANG H L, *et al.* Determination of an Unknown Time-dependent Heat Source from a Nonlocal Measurement by Finite Difference Method[J]. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2020, **36**(1): 151-165. DOI: 10.1007/s10255-020-0918-3.
- [13] 陈树立, 阮周生, 王泽文, 等. 基于时间分数阶扩散方程源项反演的一阶与二阶数值微分方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2019, **41**(3): 244-264.  
CHEN S L, RUAN Z S, WANG Z W, *et al.* First and Second Order Numerical Differentiation Based on the Inverse Source Problem of Time-fractional Diffusion Equation[J]. *Numer Math A J Chin Univ*, 2019, **41**(3): 244-264.
- [14] WU B, CHEN Q, WANG Z W. Carleman Estimates for a Stochastic Degenerate Parabolic Equation and Applications to Null Controllability and an Inverse Random Source Problem[J]. *Inverse Probl*, 2020, **36**(7): 075014. DOI: 10.1088/1361-6420/ab89c3.
- [15] RUAN Z S, WANG Z W. A Backward Problem for Distributed Order Diffusion Equation: Uniqueness and Numerical Solution[J]. *Inverse Probl Sci Eng*, 2021, **29**(3): 418-439. DOI: 10.1080/17415977.2020.1795152.
- [16] 邱淑芳, 王泽文, 曾祥龙, 等. 一类时间分数阶扩散方程

- 中的源项反演解法[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2018, **42**(6): 610-615. DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.11.
- QIU S F, WANG Z W, ZENG X L, *et al.* The Numerical Method for Reconstructing Source Term in a Time Fractional Diffusion Equation[J]. *J Jiangxi Norm Univ Nat Sci Ed*, 2018, **42**(6): 610-615. DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2018.06.11.
- [17] RUAN Z S, WANG Z W. Identification of a Time-dependent Source Term for a Time Fractional Diffusion Problem[J]. *Appl Anal*, 2017, **96**(10): 1638-1655. DOI: 10.1080/00036811.2016.1232400.
- [18] 陆帅, 王彦博. 用 Tikhonov 正则化方法求一阶和两阶的数值微分[J]. 高等学校计算数学学报, 2004, **26**(1): 62-74. DOI: 10.3969/j.issn.1000-081X.2004.01.009.
- LU S, WANG Y B. The Numerical Differentiation of First and Second Order with Tikhonov Regularization[J]. *Numer Math A J Chin Univ*, 2004, **26**(1): 62-74. DOI: 10.3969/j.issn.1000-081X.2004.01.009.
- [19] RUAN Z S, WANG Z W, ZHANG W. A Directly Numerical Algorithm for a Backward Time-fractional Diffusion Equation Based on the Finite Element Method[J]. *Math Probl Eng*, 2015, **2015**: 1-8. DOI: 10.1155/2015/414727.
- [20] WANG Z W, QIU S F, YU S, *et al.* Exponential Tikhonov Regularization Method for Solving an Inverse Source Problem of Time Fractional Diffusion Equation[J]. *J Comput Math*, 2023, **41**(2): 173-190. DOI: 10.4208/jcm.2107-m2020-0133.