

时间约束下最优时变后向超路近似算法设计

邢治乐,张淑蓉*

(太原理工大学 数学学院,山西 太原 030000)

摘要:时变最短路径设计是网络优化的一类重要问题。特别是针对结构复杂的网络,通常采用时变超图作为网络拓扑结构,所以在时变超图中研究路径优化问题受到广泛关注。时变后向超图(TVBH)是一类特殊的时变超图。文章主要是研究了在TVBH中构建满足时间约束的给定源点与所有网络节点间的最优时变后向超路(TV-B超路)问题。由于该类问题是NP(Non-deterministic Polynomial)完全的,文章利用时间离散的方法设计了伪多项式时间算法,并进一步提出了有效近似算法得到了 $(1+\epsilon)$ 近似解。最后通过实例仿真表明了利用近似算法能够显著降低运算复杂性。

关键词:时变后向超图;时间约束下的最优超路;近似算法;伪多项式时间算法;时间离散

中图分类号:O157 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2024)01-0112-10

Approximate Algorithm Design of Optimal Time-varying Backward Hyperpaths with Time Constraints

XING Zhile, ZHANG Shurong*

(School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030000, China)

Abstract: Time-varying shortest path design is an important problem in network optimization. Especially for networks with complex structures, time-varying hypergraph is usually used as the network topology, so the research of path optimization in time-varying hypergraph has received wide attention. Time-varying backward hypergraph (TVBH) is a special kind of time-varying hypergraph. In this paper, we mainly studies the problem of constructing the optimal time-varying backward hyperpath (TV-B hyperpath) between a given source node and all network nodes satisfying time constraints in TVBH. Because this kind of problem is NP (Non-deterministic Polynomial) complete, we design a pseudopolynomial time algorithm using the method of time discretization, and further propose an effective approximation algorithm to obtain the $(1+\epsilon)$ approximate solution. Finally, an example simulation shows that using the approximation algorithm can significantly reduce the computational complexity.

Key words: time-varying backward hypergraph; optimal hyperpath with time constraints; approximate algorithm; pseudopolynomial time algorithm; time discretization

0 引言

时变网络中具有时间限制的最短路径问题在交通运输以及通讯网络等方面均具有广泛应

用。当前对于该问题的研究通常是在一般图中进行,但在现实生活中,时变网络中各对象之间的关系往往是更为复杂的多元关联关系,所以此类问题通常会在超图^[1]中进行研究。有向

收稿日期:2022-10-07;接受日期:2023-02-20

基金项目:山西省自然科学基金(202103021224058)

作者简介:邢治乐(1998-),女,山西朔州人,硕士研究生,研究方向为组合优化。E-mail:1634761743@qq.com

* 通信作者:张淑蓉(ZHANG Shurong),E-mail:zhangshurong@tyut.edu.cn

引文格式:邢治乐,张淑蓉.时间约束下最优时变后向超路近似算法设计[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(1):112-121. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023026

超图^[2]作为有向图^[3]的扩展,经常在多个领域被用作建模和算法设计的理论工具。因此,本文主要是在时变后向超图中对具有时间限制的最短后向超路问题求解。

在一般的动态网络中具有时间限制的最短路径问题(TV-SP问题)最早是由Cooke和Halsey在文献[4]中提出的,即当延迟和能耗随时间发生连续变化时,在有效时间段 $[0, T]$ 内查找从源顶点到目标顶点的总成本最小的路径。Ahuja等^[5]在连续时间下的图模型中研究了时变最短路径优化问题^[6-7]。朱建明等^[8]在离散时间下的图模型中考虑了一点到其他所有点的最短路问题^[9-13]。其中朱建明等^[8]提出了零等待时间最短路的对偶问题并给出了能够在伪多项式时间内解决该问题的近似算法,Cai等^[9]研究了能够在各点任意等待的情况下的TV-SP问题并证明了该问题是NP(Non-deterministic Polynomial)完全的,Shirdel等^[11]在Cai等^[9]的基础上进一步给出该问题的近似算法。对于超图模型,本文将在离散时间下对问题进行研究。

在复杂网络中,主要采用有向超图模型,针对该问题的求解算法有很多种。Gallo等^[14]对有向超图进行了介绍并给出了适用于一般超图的静态最短超路算法。Knuth^[15]通过对Dijkstra算法的扩展设计了适用于一类特殊超图的算法。进一步地,Ausiello等在文献[16]和Gao等在文献[17]中提出了一种用于查找有向超图中动态最短超路算法。然而当同时考虑路径的传输时间(延迟)和运送成本(能耗)时,上述文献并不能在这样的超图中进行最短超路的求解。因此基于一类重要的超图:后向超图(BH)^[2, 14, 18-20],本文进一步定义并研究时变后向超图(TVBH)。该超图中每条超弧均赋权两个时变的权值函数(时变延迟函数和时变能耗函数)并且具有多个尾节点和一个头节点。这种拓扑结构能够被广泛应用于许多实际问题,例如:在交通网络中,一个区域(超弧)内各供货商(尾节点)需要运送货物到这个区域的中心站点(头节点),运送时间和运送成本会随时间发生连续性变化,因此需要制定在截止日期 T 之前的高效低成本多区域货物运输方案。此

类问题在通讯网络中也有广泛的应用背景。所以本文主要在TVBH中研究时间约束下的从源点到其余所有点的最优TV-B超路问题。

本文首先根据时变网络的应用背景以及超图结构特点,在第1节中对TVBH进行了详细定义,并进一步结合后向超路的概念提出了时变后向超路(TV-B超路)的模型结构。其次,在第2节中利用时间离散的技术方法设计了伪多项式时间算法。然后,为进一步优化运算结果并降低运算时间,在第3节中在该算法的基础上采用权函数取整的方法设计近似算法,有效降低数据的存储和运算量,并得到 $(1 + \epsilon)$ 近似解。最后在第4节中总结全文。

1 模型建立

1.1 有向超图及相关定义

下面有关于超图的术语和符号均来自于论文[14]中。一个超图可以记为 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示超图中点的集合, $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ 表示超图中超弧的集合,并且每条超弧 $E_i \subseteq \mathcal{V}$ 。若一条超弧可以表示成 $E = (T(E), H(E))$, $T(E)$ 是 E 的尾节点集, $H(E)$ 是 E 的头节点集,则 E 就是一条有向超弧。当超图 \mathcal{H} 中所有超弧均为有向超弧时, \mathcal{H} 为有向超图。进一步, $|H(E)| = 1$ 的超弧 $E = (T(E), H(E))$ 被定义为后向超弧(B弧),所有超弧均为B弧的有向超图为后向超图(B超图),如图1所示。

令点 v 的前向星和后向星分别为 $FS(v) = \{E \in \mathcal{E} | v \in T(E)\}$ 和 $BS(v) = \{E \in \mathcal{E} | v \in H(E)\}$ 。在超图 \mathcal{H} 中,一条长度为 q 的超路定义为 $P_{v_s, v_t} = (v_s = v_1, E_1, v_2, E_2, \dots, E_q, v_{q+1} = v_t)$,其中 $v_s \in T(E_1)$, $v_t \in H(E_q)$,并且对 $i \in [2, q]$, $v_i \in H(E_{i-1}) \cap T(E_i)$ 。若 $v_t \in T(E_1)$,那么超路 P_{v_s, v_t} 是一个圈。若一条超路 P_{v_s, v_t} 的任意子超路均不是圈,那么我们称该超路为无圈超路。

1.2 时变B超图和时变B超路

由于本文主要是在时变B超图中研究满足时间约束的最优时变后向超路问题,所以下面我们先给出时变B超图的概念。

定义1 时变B超图(TVBH):给定一个B超图 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathcal{E} =$

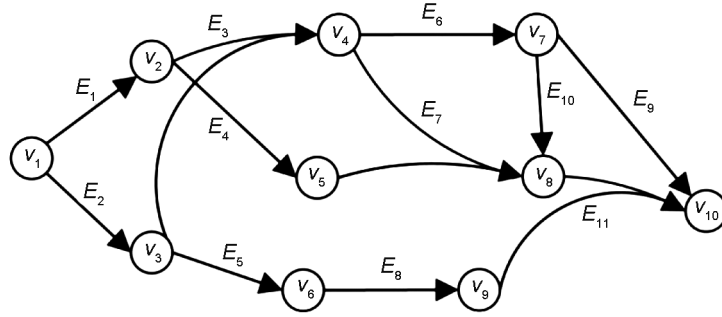


图1 一个有11条B超弧和10个点的B超图

Fig. 1 A B hypergraph with 11 B hyperarcs and 10 nodes

$\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$, 则时变B超图 $\mathcal{H}^0 = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, T^*, \Delta, \Lambda)$, 其中:

(1) T^* 是时间域,

(2) $\Delta = \{b(E_i, t) : E_i \in \mathcal{E}\}$ 是B弧 E_i 的时变传输时间函数, 其中 $b(E_i, t) > 0, t \in [0, T^*]$,

(3) $\Lambda = \{c(E_i, t) : E_i \in \mathcal{E}\}$ 是B弧 E_i 的时变传输成本函数, 其中 $c(E_i, t) > 0, t \in [0, T^*]$.

根据引言中提到的货物运输的应用背景, 在时变B超图中货物的运送不再是一个区域的中心站点收到货物就能够立即将其运送到其他点, 而是要等到区域中其他站点都运送到中心站点之后才能继续将货物运送出去, 因此我们需要针对此类超路的结构, 考虑在时变B超图中与其对应的传输模式。

定义2(B超路^[14]) 给定一个有向超图 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 以及源点 v_s 和汇点 v_t , 一条后向超路 P_{v_s, v_t} 是一个满足以下三个条件的极小的有向超图 $\mathcal{H}_{\pi_{v_s, v_t}} = (\mathcal{V}_{\pi}, \mathcal{E}_{\pi})$: (1) $\mathcal{E}_{\pi} \subseteq \mathcal{E}, \mathcal{V}_{\pi} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_{\pi}} E \subseteq \mathcal{V}$, (2) $v_s, v_t \in \mathcal{V}_{\pi}$, (3) 对任意点 $v, \mathcal{H}_{\pi_{v_s, v_t}}$ 都有一条从 v_s 到 v 的无圈超路。

基于静态B超图中对B超路权值的定义^[14], 针对时变B超图考虑如下传输模式:

[传输模式]: 给定一个时变B超图 \mathcal{H}^0 , 假设在 \mathcal{H}^0 中进行货物运送, 该运送过程中需要经过B弧 $E = \{T(E), \{y\}\}$ 且 $T(E) = \{v_k, v_j\}$, 此时我们令 v_k 和 v_j 收到货物的时间分别为 t_k 和 t_j , 且 $t_k < t_j$. 那么当一批货物在 t_k 时刻到达 v_k 点时, 不能直接在 t_k 时刻从 v_k 出发经过B弧 E 将货物运送到 y 点, 而是必须使得其他尾节点 v_j 也收到货物之后再在 t_j 时刻立即出发。此时货物运送到 y 点的时间为 $t_j + b(E, t_j)$ 。

有了B超路的定义以及上述[传输模式]的概念之后, 接下来我们考虑时变B超路的概念。首先我们考虑以下例子。

例1 给定一个如图2所示的B超图 \mathcal{H}_1 , 对每条B弧赋权后得到时变B超图 \mathcal{H}_1^0 。

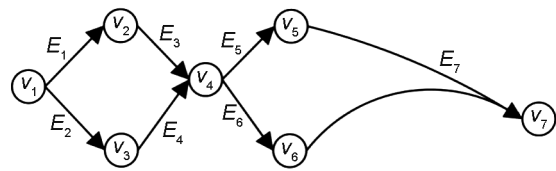


图2 B超图 \mathcal{H}_1

Fig. 2 B hypergraph \mathcal{H}_1

在 \mathcal{H}_1^0 中有两条超路 $P_{v_1, v_5} = (v_1, E_1, v_2, E_3, v_4, E_5, v_5)$ 和 $P_{v_1, v_6} = (v_1, E_2, v_3, E_4, v_4, E_6, v_6)$ 并且这两条路的起始时间分别为 t_1 和 t'_1 . 假设 t_1 时刻从 v_1 出发, 沿着超路 P_{v_1, v_5} 在 v_2, v_4 和 v_5 的到达时间分别为 t_2, t_4 和 t_5 , 而从 t'_1 时刻从 v_1 出发, 经过超路 P_{v_1, v_6} 在 v_3, v_4, v_6 的时刻分别是 t_3, t'_4 和 t_6 并且 $t_6 > t_5$. 在 \mathcal{H}^0 中 $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ 显然是普通边, 那么根据文献[6]中时变路径成本的概念, 假设从 v_1 到 v_5 和 v_6 的时变最小成本路径分别为 P_{v_1, v_5} 和 P_{v_1, v_6} . 当在 t_6 时刻经过 E_7 到达 v_7 点的成本比其他时刻均小时, 我们能够得到从 t_1 和 t'_1 开始传送, 经过 $\mathcal{H}_1 = P_{v_1, v_5} + P_{v_1, v_6} + E_7$ 到达 v_7 所消耗的总成本最小。然而这样得到的 \mathcal{H}_1 并不满足B超路的极小性, 因此 \mathcal{H}_1 并不是一条B超路。进一步我们发现若将 t_4 和 t'_4 时刻到达的 v_4 点记为两个不同的点时, \mathcal{H}_1 就是一条B超路。由此, 为了进一步给出时变B超路的定义, 我们先给出以下概念。

对于例1中由两条超路 P_{v_1, v_5} 和 P_{v_1, v_6} 和一条B弧形成的 \mathcal{H}_1 , 我们可以得到 \mathcal{H}_1 对应的时变超

图 \mathcal{H}_1^0 , 该超图在 v_4 点有两个到达时刻, 分别是 t_4 和 t'_4 , 也就是说在任意时变 B 超图 \mathcal{H}^0 中, 经过不同超路到达点 v 会使得点 v 的到达时刻可能有多, 我们将能够到达点 v 的所有时刻构成的集合记为 T_v 。对于任意 $t \in T_v$, 将经过 B 弧 $E \in BS(v)$ 能在 t 时刻到达 v 点的 E 定义为 t 时刻可达 v 点的 B 弧, 并且我们将所有这样的 B 弧构成的集合记为 $BS(v, t)$ 。

根据上述概念, 下面我们来构造时变 B 超图 \mathcal{H}^0 的对应超图 $(\mathcal{H}^0)'$ 。首先对于 $|T_v| \neq 1$ 并且属于 $\mathcal{V} \setminus \{v_s\}$ 中的点 v , 我们复制出 $|T_v|$ 个点来代替 v 。然后对于剩下的除了 v_s 的点 v , 有 $T_v = \{t_i\}$, 我们用 $v(t_i)$ 来代替 v 。最后对每个 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}$, $t \in T_v$, 我们根据 $BS(v, t)$ 来确定 t 时刻可达 v 点的 B 弧, 利用这些 B 弧将复制出的点连接起来。接下来给出一个实例来进一步理解上述构造过程。

例 2 下面我们给出例 1 中时变超图 \mathcal{H}_1^0 的对应超图 $(\mathcal{H}_1^0)'$ 。由于在 $\mathcal{V} \setminus \{v_1\}$ 中 $|T_v| \neq 1$ 的点只有 v_4 , 因此根据 $T_{v_4} = \{t_4, t'_4\}$, 我们离散出两个点分别为 $v(t_4)$ 和 $v(t'_4)$ 。对于任意 $v_i \in \mathcal{V} \setminus \{v_1, v_4\}$, 由于 $|T_v| = 1$ 并且 $T_v = \{t_i\}$, 所以我们用 $v_i(t_i)$ 来代替 v_i , 此时我们得到了对应超图 $(\mathcal{H}_1^0)'$ 的点集。根据 $P_{v_1 v_2}$ 和 $P_{v_1 v_3}$ 以及 E_7 的头节点 v_7 的到达时间, 我们能够得到各点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}$ 在各时刻 $t \in T_v$ 的集合 $BS(v, t)$ 。进一步, $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ 被替换为

$$\begin{aligned} & (\{v_1\}, \{v_2(t_2)\}), (\{v_1\}, \{v_3(t_3)\}), \\ & (\{v_2(t_2)\}, \{v_4(t_4)\}), (\{v_3(t_3)\}, \{v_4(t'_4)\}), \\ & (\{v_4(t_4)\}, \{v_5(t_5)\}), (\{v_4(t'_4)\}, \{v_6(t_6)\}), \\ & (\{v_5(t_5), v_6(t_6)\}, \{v_7(t_7)\})。 \end{aligned}$$

由此我们得到对应超图 $(\mathcal{H}_1^0)'$ (如图 3 所示)。

定义 3 (TV-B 超路) 给定一 TVBH $\mathcal{H}^0 =$

$(\mathcal{V}, \mathcal{E}, T^*, \Delta, \Lambda)$, 源点和汇点分别为 v_s 和 v_t 。若 \mathcal{H}^0 的对应超图 $(\mathcal{H}^0)'$ 是从 v_s 到 v_t 的 B 超路, 那么 \mathcal{H}^0 被称为时变 B 超路, 其被记为 Π_{v_s, v_t} 。

根据定义 3, 由 B 超路的极小性, 我们知道对于 Π_{v_s, v_t} 上任意点 v , 任意时刻 $t \in T_v$, $|BS(v, t)| = 1$, 这就说明只有一条从 v_s 到 v 的 TV-B 超路, 我们将其称为子超路并记为 $\Pi_{v_s, v}(t)$ 。然后令 $T_v(\Pi_{v_s, v_t})$ 表示经过 Π_{v_s, v_t} 能够到达 v 时刻的集合。那么对 TV-B 超路 Π_{v_s, v_t} 上任意点 v , 若 $t \in T_v(\Pi_{v_s, v_t})$, 则在 Π_{v_s, v_t} 仅有一条 B 弧 $E \in BS(v, t)$ 。进一步对每个 $w \in T(E)$, $T_w(\Pi_{v_s, v_t}(t))$ 也仅有一个时刻。

接下来, 结合[传输模式]以及上述概念, 我们给出 TV-B 超路 Π_{v_s, v_t} 总成本的概念以及本文研究的主要问题。

定义 4 ($D(\Pi_{v_s, v_t})$) 给定一条从 v_s 出发, 恰好 t' 时刻到达 v_t 的 TV-B 超路 Π_{v_s, v_t} , 将 Π_{v_s, v_t} 的总成本记为 $D(\Pi_{v_s, v_t})$ 。对 Π_{v_s, v_t} 超路中每个点 v 和时刻 $t \in T_v(\Pi_{v_s, v_t})$, TV-B 超路 $\Pi_{v_s, v}(t)$ 的总成本被记为 $D(\Pi_{v_s, v}(t))$ 。令 $D(\Pi_{v_s, v_s}) = 0$, 则计算 $D(\Pi_{v_s, v_t})$ 的迭代公式为 $D(\Pi_{v_s, v_t}) = \sum_{v_i \in T(E_j)} D(\Pi_{v_s, v_i}(t_k)) + c(E_j, \max\{t_k\})$, 其中 E_j 是在 Π_{v_s, v_t} 和 $BS(v_t, t')$ 中的唯一超弧, 并且对每个 $v_k \in T(E_j)$, 令 $T_{v_k}(\Pi_{v_s, v_t}) = \{t_k\}$ 。

问题 (TV-SBH) 给定一个 TVBH $\mathcal{H}^0 = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, T^*, \Delta, \Lambda)$, 源点 v_s , 时间限制 $T > 0$, 本文想要在 \mathcal{H}^0 中找到从 v_s 出发到其他各点的总成本最小的 TV-B 超路, 并且该超路能够在时间 T 内可达。

2 算法设计

在本节中, 我们主要给出一个伪多项式时间算法来解决 TV-SBH 问题。在给出算法之

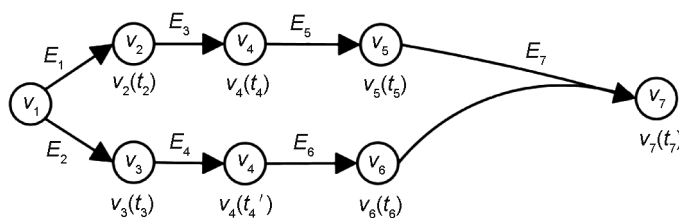


图 3 例 1 中时变超图 \mathcal{H}_1^0 的对应超图

Fig. 3 Hypergraph corresponding to time-varying hypergraph \mathcal{H}_1^0 in example 1

前,根据问题中给定的时间限制 T ,我们将时间区间 $[0, T]$ 离散成 $\mathcal{T}=\{0, 1, 2, \dots, T\}$ 。然后将 v_s 出发恰好 t 时刻到达点 v 的 TV-B 超路的最小总成本记为 $d(v, t)$ 。接下来我们利用定理 1 去计算各时刻到达各点的 $d(v, t)$ 值。

定理 1 给定一个 TVBH \mathcal{H}^0 , 对任意时刻 $t \in \mathcal{T}$ 和点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}$, 假设至少存在一条 B 弧 $E \in BS(v, t)$, 令

$$d_{\min}(v_k, u) = \min_{t' \leq u} \{d(v_k, t')\}, \quad (1)$$

$$R(v_l) = \sum_{v_k \in T(E) \setminus \{v_l\}} d_{\min}(v_k, u) + d(v_l, u), \quad \forall v_l \in Q, \quad (2)$$

$$R(E, u) = \min_{v_l \in Q} \{R(v_l)\} + c(E, u), \quad (3)$$

其中 Q 表示 $T(E)$ 中能够在 u 时刻到达的点的集合, 则 v_s 出发恰好 t 时刻到达 v 点的 TV-B 超路的最小成本为

$$d(v, t) = \min_{E \in BS(v, t)} \min_{u + b(E, u) = t} \{R(E, u)\}. \quad (4)$$

证明 首先证明存在从 v_s 出发 t 时刻到达 v 的总成本为 $d(v, t)$ 的 TV-B 超路。不失一般性设 $E_j = \arg \min_{u + b(E, t) = t} \{R(E, u)\}$, $u = \arg \min \{R(E, u) : u' + b(E, u') = t\}$, $v_l = \arg \min \{R(v) : v \in Q\}$, 则由公式(2)和(3)可得

$$R(E, u) = R(v_l) + c(E, u). \quad (5)$$

进一步地, 由 E_j 的存在性和定义 3, 存在从 v_s 出发, 在某个时刻 $t_k \leq u$ 到达每个 $v_k \in T(E_j) \setminus \{v_l\}$ 的总成本为 $d_{\min}(v_k, t_k)$ 的 TV-B 超路 $\Pi_{v, v_k}(t_k)$ 。同时也存在从 v_s 出发, 在时刻 u 到达 v_l 的总成本为 $d(v_l, u)$ 的 TV-B 超路 $\Pi_{v, v_l}(u)$ 。将超路 $\Pi_{v, v_l}(u)$ 和每一个尾节点 $v_k \in T(E_j) \setminus \{v_l\}$ 的超路 $\Pi_{v, v_k}(t_k)$ 并起来记为 $\Pi = \Pi(v_s \rightarrow T(E_j))$ 。因此在 Π 中的所有超路的总成本为

$$\begin{aligned} & \sum_{v_k \in T(E_j)} D(\Pi_{v, v_k}(t_k)) = \\ & \sum_{v_k \in T(E_j) \setminus \{v_l\}} D(\Pi_{v, v_k}(t_k)) + D(\Pi_{v, v_l}(u)) = \\ & \sum_{v_k \in T(E_j) \setminus \{v_l\}} d_{\min}(v_k, u) + d(v_l, u). \end{aligned} \quad (6)$$

由定义 3, $\Pi(v_s \rightarrow T(E_j))$ 和 E_j 构成了一条从 v_s 出发恰好 t 时刻到达 v 点的一条 TV-B 超路, 将其记为 $\Pi_{v, v}$ 。点 v_l 为 $\Pi_{v, v}$ 上 B 弧 E_j 的固定点, 时刻 u 为 v_l 的最优到达时间。由定义 4 和公式(2)(3)(5)(6)得

$$\begin{aligned} D(\Pi_{v, v}) &= \sum_{v_k \in T(E_k)} D(\Pi_{v, v_k}(t_k)) + c(E_j, \max\{t_k\}) = \\ & R(v_l) + c(E_j, u) = R(E_j, u), \end{aligned}$$

则由 E_j 和 u 的选择得: $D(\Pi_{v, v}) = \min_{E_j \in BS(v, t)} \min_{u + b(E, u) = t} R(E_j, u) = d(v, t)$ 。该结论成立。

下面只需证明沿 B 弧 $E \in BS(v)$, t 时刻到达 v 点的其他 TV-B 超路 $\Pi_{v, v}^*$ 满足 $D(\Pi_{v, v}^*) \geq d(v, t)$ 。我们对 $\Pi_{v, v}^*$ 的子超路的 B 弧数做归纳。由定义 3, 对于 $\Pi_{v, v}^*$ 的每个点 v' 和时刻 $t' \in T_{v'}(\Pi_{v, v}^*)$, 我们可知在 $\Pi_{v, v}^*$ 上, t' 时刻仅有一条 TV-B 超路 $\Pi_{v, v'}^*(t')$ 。

当 $v = v_s$ 时, 结论显然成立。由定义 3 对任意 v 点, $|BS(v, t)| = 1$, 不妨设 $BS(v, t) = \{E_k\}$ 。根据[传输模式], 不失一般性令 $v_l^* \in T(E_k)$ 为 E_k 的固定点, 且 u^* 为 v_l^* 的最优到达时间, 则 $\Pi_{v, v}^*$ 是超路 $\Pi_{v, v_l^*}^*(u^*)$ 和到任意尾节点 $v_j \in T(E_k) \setminus \{v_l^*\}$ 的超路 $\Pi_{v, v_j}^*(t_j)$ 以及 B 弧 E_k 的并集。由归纳有 $D(\Pi_{v, v_l^*}^*(u^*)) \geq d(v_l^*, u^*)$, $D(\Pi_{v, v_j}^*(t_j)) \geq d(v_j, t_j)$, $v_j \in T(E_k) \setminus \{v_l^*\}$, 则

$$\begin{aligned} & \sum_{v_j \in T(E_k)} D(\Pi_{v, v_j}^*(t_j)) \geq \\ & \sum_{v_j \in T(E_k) \setminus \{v_l^*\}} d(v_j, t_j) + d(v_l^*, u^*) \geq \\ & \sum_{v_j \in T(E_k) \setminus \{v_l^*\}} \min_{t' \leq u^*} \{d(v_j, t')\} + d(v_l^*, u^*) = \\ & \sum_{v_j \in T(E_k) \setminus \{v_l^*\}} d_{\min}(v_k, u) + d(v_l, u) = R(v_l^*). \end{aligned} \quad (7)$$

因此

$$\begin{aligned} D(\Pi_{v, v}^*) &= \sum_{v_j \in T(E_k)} D(\Pi_{v, v_j}^*(t_j)) + c(E_k, \max\{t_j\}) \geq \\ & R(v_l^*) + c(E_k, u^*). \end{aligned} \quad (8)$$

由于 v_l^* 为固定点, 则 $R(v_l^*) + c(E_k, u^*) = \min_{v_l \in Q} R(v_l) + c(E_k, u^*) = R(E_k, u^*)$ 。由 E_k 和 u^* 的选择以及公式(7)(8)得

$$D(\Pi_{v, v}^*) \geq \min_{E_j \in BS(v, t)} \min_{u + b(E, u) = t} R(E, u) = d(v, t)。$$

所以, $\Pi_{v, v}$ 是从 v_s 出发恰好 t 时刻到达 v 点的总成本最小的 TV-B 超路, 定理得证。

根据定理 1, 本文设计了算法 1 去计算各点在各时刻的 $d(v, t)$ 值, 算法 1 的伪代码如下。

算法 1 解决 TV-SBH 问题

输入 $\mathcal{H}^0, T, \mathcal{T}, v_s$

输出 总成本表

1. For each $E_i \in \mathcal{E}$ do
2. For each $u = 0, 1, 2, \dots, T$ do
3. $t_{\text{new}} = u + b(E_i, u)$;
4. If $t_{\text{new}} \leq T$ then
5. $U_i = U_i \cup \{u\}$;
6. End
7. End
8. $S_{i_{\text{new}}} = S_{i_{\text{new}}} \cup \{(U_i, \{E_i\})\}$;
9. End
10. 初始化 : $d(v_s, t) = 0$ for each $t \in \mathcal{T}$;
 $d(v, t) = \infty$ for each $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}, t \in \mathcal{T}$;
11. For $t = 1, 2, \dots, T$ do
12. For each $(U, \{E\}) \in S_t$ do
13. $U_{\text{new}} = \emptyset$; $y = H(E)$;
14. For each $u \in U$ do
15. $Q = \emptyset$; 利用公式(1)对每个 $v_k \in T(E)$ 计算 $d_{\min}(v_k, u)$ 并判断 $d(v_k, u)$ 是否等于 ∞ , 若不相等则将 v_k 放入 Q 中;
16. If $Q \neq \emptyset$ then
17. If 对所有 $v_k \in T(E)$ 都有 $d_{\min}(v_k, u) \neq \infty$ then
18. $U_{\text{new}} = U_{\text{new}} \cup \{u\}$; 利用公式(2)(3)计算每个 $v_l \in Q$ 的 $R(v_l)$ 和 $R(E, u)$;
19. Else
20. Continue;
21. End
22. End
23. End
24. If $d(y, t) > \min_{u \in U_{\text{new}}} \{R(E, u)\}$ then
25. $d(y, t) = \min_{u \in U_{\text{new}}} \{R(E, u)\}$;
26. End
27. End
28. End

接下来我们分三部分对算法1进行阐述。

1) 输入和输出: 算法1输入一个 TVBH \mathcal{H}^0 , 最大时间限制 T , 离散时间集合 \mathcal{T} 以及源点 v_s , 并且输出一个总成本表(见表2)。

2) 排序: 对所有 B 弧 $E_i \in \mathcal{E}$ 以及所有时刻 $u = 0, 1, 2, \dots, T$, 我们对 $t_{\text{new}} = u + b(E_i, u)$ 进行排序。若 $t_{\text{new}} \leq T$, 则表示能够在 T 时刻内到达 $H(E_i)$, 此时我们将 u 放入 U_i 集合中。对于 B 弧 E_i , 当所有 $u = 0, 1, 2, \dots, T$ 都遍历完之后, 我们将 $(U_i, \{E_i\})$ 放入到 $S_{i_{\text{new}}}$ 中。

3) 主算法: 首先我们对 \mathcal{H}^0 中所有点进行初始化。由于在 v_s 点处的任意时间均能够出发, 所以我们对于每个 $t \in \mathcal{T}$, 令 $d(v_s, t) = 0$ 。而对于每个 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}$, 对任意时刻 $t \in \mathcal{T}$, 令 $d(v, t)$ 的初值为 ∞ 。

然后, 根据定理1我们给出以下算法步骤。对每个时刻 $t = 1, 2, \dots, T$, 我们遍历在 S_t 中的每一项 $(U, \{E\})$ 。对每个 $u \in U$, 先令 $Q = \emptyset$ 。其次, 根据定理1中公式(1)的第一个式子, 我们对每个尾节点 $v_k \in T(E)$ 计算出 $d_{\min}(v_k, u)$, 并且经过第15行的步骤我们可以得到 $Q = \{v_k: v_k \in T(E), d(v_k, u) \neq \infty\}$ 。此时对 Q 进行分类讨论(见第16—22行)。当 $Q \neq \emptyset$ 时, 这表明至少有一个尾节点 $v_k \in T(E)$ 能够在 u 时刻接收到货物。如果此时所有 $v_k \in T(E)$ 都使得 $d_{\min}(v_k, u) \neq \infty$, 根据[传输模式]可以将货物通过 E 传输到 $y = H(E)$ 。因此将 u 放入到 U_{new} 中, 并根据定理1中公式(2)去计算每个 $v_l \in Q$ 的 $R(v_l)$ 值, 根据公式(3)去计算 $R(E, u)$ 值。然而, 当 $Q = \emptyset$ 时, 这意味着 $T(E)$ 中没有一个尾节点能够在 u 时刻收到货物, 这违背了[传输模式]中当所有尾节点都收到货物后立即将货物运送出去的原则, 因此跳出本次循环并直接到14行去遍历下一个 U 中的时刻 u 。

最后将之前得到的 $d(v, t)$ 与 $\min_{u \in U_{\text{new}}} \{R(E, u)\}$ 进行比较, 进而取二者之间较小的值来更新 $d(v, t)$ (见第24—26行)。

下面我们给出例3来具体阐述算法1如何得到 TV-SBH 问题的解。

例3 考虑如图1中的 TVBH \mathcal{H}^0 , 令最大时间限制为 $T = 12$, 下面我们给出每条边在 $t = 0, 1, 2, \dots, 12$ 的传输时间以及成本。对于任意 B 弧 $E \in \{E_1, E_3, E_6, E_9\}$, $(b(E, t), c(E, t)) = (2, 95)$, 其中 $t = 0, 1, 2, \dots, 12$ 。对于任意 B 弧 $E \in \{E_2, E_5, E_8\}$, $(b(E, t), c(E, t)) = (1, 95)$, 其中 $t = 0, 1, 2, \dots, 12$ 。其他 B 弧在 $t = 0, 1, 2, \dots, 12$ 的传输时间和成本见表1。假设点 v_1 为源点, 从时刻 $t = 0, 1, 2, \dots, 12$ 出发, 根据算法1的计算, 我们找到了能够在各时刻到达其他各点 v_i 的 TV-B 超路的最小总成本值 $d(v_i, t)$, 并且由算法1得出的结果见表2。

我们将从 v_s 出发, 在 T 内到达其他点 $v_i \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}$ 的 TV-B 超路的最小总成本值定义

表1 除 $E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, E_8$ 和 E_9 之外,图1中其他B弧 E_i 的传输时间和成本
(表中任意一项表示对应时刻 t 下 E_i 的传输时间 $b(E, t)$,传输成本 $c(E, t)$)

Table 1 The transmission time and cost of the B-arc E_i in Fig. 1 except for $E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, E_8$ and E_9

(Any item in the table represents the transmission time $b(E, t)$ and transmission cost $c(E, t)$ of E_i at the corresponding time t)

超弧/ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E_4	2,93	2,93	3,91	2,91	2,95	1,97	2,94	1,94	1,95	2,96	1,90	4,90	5,90
E_7	1,94	2,96	1,94	2,98	1,99	3,100	1,100	4,95	2,92	2,94	6,99	1,94	2,96
E_{10}	2,92	1,95	3,93	4,94	1,94	2,95	3,97	1,90	1,90	1,98	2,99	2,92	1,95
E_{11}	3,98	4,99	2,92	1,93	1,95	2,96	1,98	2,95	2,95	3,98	4,100	1,97	6,95

表2 成本表

(表中项目表示在时刻 t 到达 v_i 点的最小总成本 $d(v_i, t)$)

Table 2 Cost table

(The items in the table represent the minimum total cost

$d(v_i, t)$ of arriving at node v_i at time t)

t /点	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	95	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0	92	95	∞	∞	190	∞	∞	∞	∞
3	0	92	95	∞	∞	190	∞	∞	285	∞
4	0	92	95	279	∞	190	∞	∞	285	∞
5	0	92	95	279	183	190	∞	∞	285	∞
6	0	92	95	279	187	190	371	∞	285	∞
7	0	92	95	279	∞	190	371	562	285	∞
8	0	92	95	279	186	190	371	461	285	463
9	0	92	95	279	187	190	371	461	285	463
10	0	92	95	279	∞	190	371	469	285	463
11	0	92	95	279	182	190	371	552	285	463
12	0	92	95	279	∞	190	371	470	285	463

为 $d^*(v_i) = \min_{t \in T} \{d(v_i, t) : d(v_i, t) \neq \infty\}$ 。根据该式以及表2能够得到例3中到达各点的最优TV-B超路的总成本值(见表3)。

表3 到各点 v_i 的最小总成本值 $d^*(v_i)$

Table 3 The minimum total cost value $d^*(v_i)$ to each node v_i

成本/点	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
$d^*(v_i)$	0	92	95	279	182	190	371	461	285	463

接下来通过定理2和定理3给出算法1的正确性和复杂性证明。

定理2 对任意点 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}$ 和任意时间 $t \in T$, 由算法1得到的 $d(v, t)$ 确实是从 v_s 出发, 恰好 t 时刻到达 v 点的TV-B超路的最小总成本。

证明 对任意 $v \in \mathcal{V} \setminus \{v_s\}$ 和 $t \in T$, 因为B弧 $E_j \in BS(v)$ 的传输时间函数 $b(E_j, t)$ 均大于0, 并且 v 点的到达时间 $t = u + b(E_j, u)$, 所以当计算 $d(v, t)$ 时, 我们对于每个尾节点 $v_k \in T(E_j)$

需要考虑的到达时间一定比 t 小。我们在算法1第11行中迭代地对 t 按照升序进行计算, 由此当我们计算 $d(v, t)$ 时, 每个尾节点 $v_k \in T(E_j)$ 在 $t' < t$ 时刻的 $d(v_k, t')$ 均已知。

根据定理1, 如果存在B弧 $E_j \in BS(v)$ 和时刻 u 能够使得 $Q \neq \emptyset$ 且对每个 $v_k \in T(E_j)$, $d_{\min}(v_k, u) \neq \infty$, 那么根据定理1, 由算法1中第15行, 第18行, 第24-26行得到的 $d(v, t)$ 确实是从 v_s 出发, 恰好 t 时刻到达 v 点的TV-B超路的最小总成本。

接下来考虑要么 $Q = \emptyset$, 要么存在某个 $v_k \in T(E_j)$, $d_{\min}(v_k, u) = \infty$ 的情况。根据[传输模式], 这两种情况都不能使得货物通过B弧 $E_j \in BS(v)$ 在 t 时刻运送到 v 点, 因此 $d(v, t)$ 依然等于初始值 ∞ , 结论得证。

定理3 算法1的时间复杂度为 $O(|T|(m+n) + |T|^2 ml)$ 。

证明 假设对每条B弧 E_j 均有 $|T(E_j)| \leq l$ 。首先对于排序, 算法1遍历了每条B弧的每个时刻 $u = 0, 1, 2, \dots, T$, 因此该步骤需要 $O(m|T|)$ 时间。其次对于每个 $v \in \mathcal{V}$ 和 $t \in T$, 都需要初始化 $d(v, t)$, 该步骤能够在 $O(n|T|)$ 时间内完成。最后通过考虑每个 $t \in T, (U, \{E\}) \in S_t$ 和 $u \in U$, 先计算了每个尾节点 $v_k \in T(E)$ 的 $d_{\min}(v_k, u)$ 值, 然后计算了每个 Q 中的点 v_l 的 $R(v_l)$ 值, 该步骤需要在 $O(|T|^2 m \cdot 2l) = O(|T|^2 ml)$ 时间内完成。所以算法1的时间复杂度为 $O(m|T| + n|T| + |T|^2 ml) = O(|T|(m+n) + |T|^2 ml)$ 。

3 近似算法

在本节中, 通过寻找TV-SBH问题的近似解, 能够进一步降低算法1的复杂性。具体来说, 由于算法1的复杂度取决于 $|T|$, 因此可以

通过仅计算 \mathcal{T} 的合适子集来降低算法复杂度。下面给出具体步骤。

给定 TVBH \mathcal{H}^0 , 将找 TV-SBH 问题近似解的新问题记为 TV-SBH*。对于该问题, 先将区间 $[0, T]$ 离散成 $\mathcal{T}' = \left\{0, k, 2k, \dots, k \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor\right\}$, 然后令 $b'(E, t) = k \left\lfloor \frac{b(E, t)}{k} \right\rfloor$, 其中 $t = 0, k, 2k, \dots, k \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor$, 并且 k 为正整数。解决该问题的近似算法与算法 1 类似, 仅需要将算法 1 中第 2 行的 $u = 0, 1, 2, \dots, T$ 替换为 $u = 0, k, 2k, \dots, k \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor$, 算法 1 中第 11 行的 $t = 0, 1, 2, \dots, T$ 替换为 $t = 0, k, 2k, \dots, k \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor$ 。下面给出定理 4 来证明由近似算法得出的解 Π^0 是 TV-SBH 问题的一个合适的近似解。

令 $\delta_{\min} = \min \{c(E, t): E \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{T}'\}$, $\delta_{\max} = \max \{c(E, t): E \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{T}'\}$ 且 $\Delta_0 = \delta_{\max} - \delta_{\min}$ 。然后将所有 B 弧的最小成本记为 C_{\min} 。若解 Π^0 的误差被定义为 E^0 , 那么 $E^0 = \frac{D(\Pi^0) - D(\Pi^*)}{D(\Pi^*)}$, 其中 Π^* 和 Π^0 分别为 TV-SBH 问题和 TV-SBH* 问题的最优解。有了这些符号, 可给出定理 4。

定理 4 TV-SBH* 问题能够找到一个近似最优解 Π^0 , 其中 $E^0 \leq \epsilon$ 。

证明 当误差限 $\epsilon \geq \frac{nT\Delta_0}{C_{\min}}$ 时, 令 Π^* 和 Π^0 分别为 TV-SBH 问题和 TV-SBH* 问题的最优解。假设 Π' 为一个可行解, T 为最大时间限制, 并且当源点的开始时间为 $t = 0, k, 2k, \dots, k \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor$ 时, Π' 和 Π^0 的拓扑结构相同, 那么 $D(\Pi') \geq D(\Pi^0) \geq D(\Pi^*)$, 则

$$E^0 = \frac{D(\Pi^0) - D(\Pi^*)}{D(\Pi^*)} \leq \frac{D(\Pi') - D(\Pi^*)}{D(\Pi^*)} \leq \frac{nTk\Delta_0}{D(\Pi^*)} \leq \frac{nTk\Delta_0}{C_{\min}} \leq \epsilon。$$

因此, 取 $k = \left\lfloor \frac{C_{\min}\epsilon}{nT\Delta_0} \right\rfloor$, 从而 $E^0 \leq \epsilon$ 。

当误差限 $\epsilon < \frac{nT\Delta_0}{C_{\min}}$ 时, 该误差限非常小,

此时直接令 $k = 1$, 则此时由近似算法得到的解与伪多项式算法得到的解相同, 并且 $E^0 = \frac{D(\Pi^0) - D(\Pi^*)}{D(\Pi^*)} \leq \epsilon$ 。综上, 结论得证。

定理 5 上述近似算法的复杂度为 $O\left(\frac{|T|(m+n)}{k} + \frac{|T|^2 ml}{k^2}\right)$ 。

定理 5 的证明和定理 3 类似, 这里就不进行赘述。由此可知, 当给定 T 和 l 时, 该近似算法是多项式的。

重新考虑例 3 中的 TVBH \mathcal{H}^0 , $T = 12$, 源点为 v_1 , 下面给出当 $\epsilon = 40$ 时, 使用上述近似算法得到的近似解。在 \mathcal{H}^0 中 $\Delta_0 = 10$, $C_{\min} = 90$, $n = 10$, 则 $\epsilon > \frac{nT\Delta_0}{C_{\min}} = \frac{120}{9}$, 那么 $k = 3$, 并且

$$b'(E, t) = 3 \left\lfloor \frac{b(E, t)}{3} \right\rfloor, \text{ 则对于任意 B 弧}$$

$E \in \{E_1, E_3, E_6, E_9\}$, $(b'(E, t), c(E, b'(E, t))) = (3, 92)$, 其中 $t = 0, 3, 6, 9, 12$ 。对于任意 B 弧 $E \in \{E_2, E_5, E_8\}$, $(b'(E, t), c(E, b'(E, t))) = (3, 95)$, 其中 $t = 0, 3, 6, 9, 12$ 。其他 B 弧在 $t = 0, 3, 6, 9, 12$ 的传输时间和成本见表 4。经过上述近似算法对例 3 中问题的计算, 我们能够得到一个成本表(见表 5), 从而可得在 v_1 出发 T 内到其他点 v 的 TV-B 超路的近似最小总成本值 $d^*(v) = \min_{t \in \mathcal{T}} \{d(v_i, t): d(v_i, t) \neq \infty\}$ (见表 6)。

表 4 除 $E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, E_8$ 和 E_9 之外, 图 1 中其余 B 弧 E_i 的传输时间和成本
(表中任意一项表示对应时刻 t 下 E_i 的传输时间 $b'(E_i, t)$, 传输成本 $c(E, b'(E_i, t))$)

Table 4 The transmission time and cost of the B-arc E_i in Fig. 1 except for $E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, E_8$ and E_9
(The items in the table represents the transmission time $b'(E_i, t)$ and transmission cost $c(E, b'(E_i, t))$ of E_i at time t)

超弧/ t	0	3	6	9	12
E_4	3,93	3,91	3,94	3,96	6,90
E_7	3,94	3,98	3,100	3,94	6,95
E_{10}	3,92	6,94	3,97	3,98	6,100
E_{11}	3,98	3,93	3,98	3,98	6,95

比较表 3 和表 5 中到每个点 v 的 $d^*(v)$ 和 $d^*(v)$ 的值, 我们发现只有 v_5 和 v_8 的值不同, 则对于 $v_5, E^0 = \frac{1}{182} < 40$, 而对于 $v_8, E^0 = \frac{8}{461} <$

表5 优化后得到的成本表
(表中项目表示 t 时刻到达 v_i 点的最小总成本 $d(v_i, t)$)

Table 5 Cost table obtained after optimization
(The items in the table represent the minimum total cost $d(v_i, t)$ of arriving at node v_i at time t)

t /点	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	0	92	95	∞	∞	190	∞	∞	285	∞
6	0	92	95	279	183	190	371	∞	285	∞
9	0	92	95	279	186	190	371	562	285	463
12	0	92	95	279	188	190	371	469	285	463

表6 到各点 v 的近似最小总成本值 $d^*(v)$
Table 6 The approximate minimum total cost value $d^*(v)$ to each node v

成本/ 点	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
$d^*(v)$	0	92	95	279	183	190	371	469	285	463

40。因此表6中得到的解确实是误差为40的近似解。通过比较表2和表5,能够得到该近似算法要比算法1需要求得的数据要少,因此利用近似算法计算所得到的结果比算法1得到的结果要更快,结合定理3和定理4,进一步表明了该近似算法能够显著降低运算的复杂性。

4 结论

本文综合考虑了在复杂网络中路径的传输时间(延迟)和运送成本(能耗),建立了具有两个时变赋权函数的TVBH模型。为了能够在TVBH中找到满足时间约束的源点到其他各点的最优TV-B超路,给出了复杂度为 $O(|T|(m+n)+|T|^2ml)$ 的伪多项式时间算法,为进一步降低算法复杂度,又提出了复杂度为 $O(\frac{|T|(m+n)}{k} + \frac{|T|^2ml}{k^2})$ 的近似算法。这些算法能够在交通网络、通讯网络等各种复杂网络中自适应地选取最优路径。最后的仿真实例表明了该近似算法能够有效降低数据的存储和运算量。

在进一步的工作中,将考虑在沿B超路进行传输的过程中,B弧头节点处允许储存和等待的情况,以满足更加复杂的实际应用问题。

参考文献:

[1] BRETTO A. Hypergraph Theory: An Introduction[M].

Cham: Springer Cham, 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.

[2] AUSIELLO G, LAURA L. Directed Hypergraphs: Introduction and Fundamental Algorithms: A Survey[J]. *Theor Comput Sci*, 2017, **658**: 293-306. DOI: 10.1016/j.tcs.2016.03.016.

[3] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: American Elsevier Pub Co, 1976.

[4] COOKE K L, HALSEY E. The Shortest Route Through a Network with Time-dependent Internodal Transit Times [J]. *J Math Anal Appl*, 1966, **14**(3): 493-498. DOI: 10.1016/0022-247X(66)90009-6.

[5] AHUJA R K, ORLIN J B, PALLOTTINO S, et al. Dynamic Shortest Paths Minimizing Travel Times and Costs[J]. *Networks*, 2003, **41**(4): 197-205. DOI: 10.1002/net.10072.

[6] YANG Y J, GAO H, YU J X, et al. Finding the Cost-Optimal Path with Time Constraint over Time-Dependent Graphs[J]. *Proc VLDB Endow*, 2014, **7**(9): 673-684. DOI: 10.14778/2732939.2732941.

[7] KOCH R, NASRABADI E. Continuous-time Dynamic Shortest Path Problems with Negative Transit Times[J]. *SIAM J Control Optim*, 2014, **52**(4): 2449-2481. DOI: 10.1137/110821111.

[8] 朱建明, 沙丹. 时变网络中零等待时间最短路问题的一个对偶算法[J]. *上海师范大学学报(自然科学版)*, 2008, **37**(1): 14-21. DOI: 10.3969/j.issn.1000-5137.2008.01.003.

ZHU J M, SHA D. A Dual Algorithm for the Time-varying Shortest Path Problem with no Waiting Time Constraints[J]. *J Shanghai Norm Univ Nat Sci*, 2008, **37**(1): 14-21. DOI: 10.3969/j.issn.1000-5137.2008.01.003.

[9] CAI X Q, SHA D, WONG C K. Time-varying Network Optimization[M]. New York: Springer, 2007.

[10] HOU W T, CAI X Q. Time-varying Shortest Path Problems with Perishable Product and Constraints[C]//2007 International Conference on Service Systems and Service Management, 2007: 1-5. DOI: 10.1109/ICSSSM.2007.4280255. DOI:10.1007/0-387-71215-1.

[11] SHIRDEL G H, REZAPOUR H. Approximate Solutions for Time-varying Shortest Path Problem[J]. *Commun Comb Optim*, 2017, **2**(2): 139-147. DOI: 10.22049/CCO.2017.25850.1047.

[12] HASHEMI S M, MOKARAMI S, NASRABADI E. Dynamic Shortest Path Problems with Time-varying Costs [J]. *Optim Lett*, 2010, **4**(1): 147-156. DOI: 10.1007/s11590-009-0162-5.

[13] NASRABADI E, HASHEMI S M. On Solving Dynamic Shortest Path Problems[C]//Proceedings of 20th International Conference/Euro Mini Conference on

- Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies, 2008: 48–53.
- [14] GALLO G, LONGO G, PALLOTTINO S, *et al.* Directed Hypergraphs and Applications[J]. *Discrete Appl Math*, 1993, **42**(2/3): 177–201. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90045-P.
- [15] KNUTH D E. A Generalization of Dijkstra's Algorithm [J]. *Inf Process Lett*, 1977, **6**(1): 1–5. DOI: 10.1016/0020-0190(77)90002-3.
- [16] AUSIELLO G, NANNI U, ITALIANO G F. Dynamic Maintenance of Directed Hypergraphs[J]. *Theor Comput Sci*, 1990, **72**(2/3): 97–117. DOI: 10.1016/0304-3975(90)90030-1.
- [17] GAO J H, ZHAO Q, REN W, *et al.* Dynamic Shortest Path Algorithms for Hypergraphs[C]//2012 10th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks (WiOpt). IEEE, 2012: 238–245.
- [18] 陈彬, 帅天平, 宋新月. 基于超图的社交网络中的预算影响力最大化[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2022, **38**(3): 343–351. DOI: 10.3969/j.issn.1672-0946.2022.03.014.
- CHEN B, SHUAI T P, SONG X Y. Budgeted Influence Maximization in Hypergraphs in Social Networks[J]. *J Harbin Univ Commer Nat Sci Ed*, 2022, **38**(3): 343–351. DOI: 10.3969/j.issn.1672-0946.2022.03.014.
- [19] 赵爽. 图和超图的容错性研究[D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2020.
- ZHAO S. Study on Fault Tolerance of Graphs and Hypergraphs[D]. Urumqi: Xinjiang University, 2020.
- [20] SHIRDEL G H, VAEZ-ZADEHB. Finding the Shortest Path for a Hypergraph[J]. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 2021, **14**(3), 1–17. DOI: 10.1142/S1793830921501202.