山西大学学报(自然科学版)47(1):134－139,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023040

特征标的正规原核与次正规原核

王蕾*
(山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006)

摘 要:对于一个给定的不可约复特征标,一般而言它的正规原核和次正规原核是不相同的,研究它们何时重合是一个很基本的问题。2001年,Isaacs和Navarro利用Hall子群的拟本原特征标构造了一类不可约复特征标。本文将证明这类特征标的正规原核和次正规原核是相同的,从而加强了Isaacs和Navarro的结论,并给出了若干应用。

关键词:π-可分群;正规原核;次正规原核;B_π-特征标;N_π-特征标
中图分类号:O152 **文献标志码**:A **文章编号**:0253-2395(2024)01-0134-06

Normal Nuclei and Subnormal Nuclei of Characters

WANG Lei*
(*School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: In general, normal nuclei and subnormal nuclei are different for a given irreducible complex character, and it is a basic problem to study that when these two classes of nuclei coincide with each other. In 2001, Isaacs and Navarro introduced a class of irreducible complex characters that are induced from qusi-primitive characters of Hall subgroups. In this paper, we show that normal nuclei of these characters are the same as subnormal nuclei. This strengthens Isaacs and Navarro's result and several applications are given.

Key words: π-separable group; normal nucleus; subnormal nucleus; B_π-character; N_π-character

0 引言

本文只考虑有限群,所用到的群和特征标的符号和术语,均可参考文献[1]和[2]。

在π-可分群G中,Isaacs建立了π-部分特征标理论[3-5],把关于素数p的不可约Brauer特征标推广为关于素数集合π的不可约π-部分特征标,简称为I_π-特征标,全体记为$\mathrm{I}_\pi(G)$。如果取$\pi=\{p\}'$为素数p在所有素数集合中的补集时,则$\mathrm{I}_\pi(G)=\mathrm{IBr}_p(G)$。

对于每个不可约复特征标$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$,Isaacs构造了一个共轭唯一的特征标对(W,γ)[3,6],其中$\gamma\in\mathrm{F}_\pi(W)$并且$\gamma^G=\chi$,称之为$\chi$的次正规原核。利用次正规原核,Isaacs定义了$\mathrm{B}_\pi$-特征标,全体记为$\mathrm{B}_\pi(G)$。由此给出了$\mathrm{I}_\pi$-特征标的一类典范提升,从而将$\pi$-部分特征标的研究提升到复特征标情形。2002年Navarro构造了一类新的原核,称之为正规原核[7],并建立了相应的共轭唯一性。同时,利用正规原核,Navarro给出了I_π-特征标的又一类典范提升,即N_π-特征标,全体记为$\mathrm{N}_\pi(G)$。

Cossey和Navarro在文献[8-9]中引入了上述两类原核的卫星特征标,极大程度地丰富了有限群表示理论。此外,文献[7]和[10]中利

收稿日期:2022-12-21;**接受日期**:2023-03-10
基金项目:山西省自然科学基金(20210302123429)
* **通信作者**:王蕾(1990-),女,山西临汾人,博士研究生,研究方向为有限群表示论。E-mail:wanglei0115@163.com
引文格式:王蕾.特征标的正规原核与次正规原核[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(1):134-139. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023040

用不同类型的原核建立了不可约复特征标的顶点理论,该理论为解决很多重要的表示论问题提供了一种强有力的技术工具[11-12]。

上述两种类型的原核,虽然在构造过程和性质上有很多相似的地方,但是由于诱导的复杂性,一般而言这两类原核是不相同的。例如文献[13]的主定理,它只对正规原核是成立的。然而,该定理的证明却需要借助于次正规原核。考虑到两类原核各自所具有的技术便利,人们期望可以找到某些附加条件使得它们是一致的。

设 G 为有限群,$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$,如果对于任意的正规子群 N,均有 $\chi_N=e\theta$,其中 e 为非负整数,$\theta\in\mathrm{Irr}(N)$,则称 χ 为拟本原特征标。2001年,Isaacs 和 Navarro 引入了一类特征标[14],它们的次正规原核可以通过 Hall 子群的拟本原特征标来构造。

定理(Isaacs-Navarro) 设 G 是 π-可分群,$H\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$,$\alpha\in\mathrm{Irr}(H)$,则存在唯一的子群 W,它是满足以下性质的 G 的子群中极大的:α 可扩张到 W 上且存在唯一的 $\gamma\in\mathrm{X}_\pi(W)$ 使得 $\gamma_H=\alpha$。如果 α 是拟本原特征标,则 $\chi=\gamma^G$ 是不可约的,并且 $\chi\in\mathrm{B}_\pi(G)$。特别地,(W,γ) 是 χ 的一个次正规原核。

为了叙述方便,将上述定理中的 W 和 γ 分别称为 α 的极大可扩张子群和极大可扩张特征标。本文将证明对于上述定理的 χ 而言,它的正规原核和次正规原核是相同的。

定理1 设 G 是 π-可分群,$H\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$,$\alpha\in\mathrm{Irr}(H)$,W 和 γ 分别是 α 的极大可扩张子群和极大可扩张特征标。如果 α 是拟本原特征标,则 $\chi=\gamma^G$ 是不可约的,并且 χ 的正规原核和次正规原核是相同的。

在文献[15]中,Cossey 证明了当 $2\in\pi$ 或者 $|G|$ 是奇数时,$\mathrm{B}_\pi(G)$ 和 $\mathrm{N}_\pi(G)$ 是相同的。但是一般情况下,这两个特征标集合之间没有明显的联系,甚至没有包含关系,反例可见[15]。而本文定理1中的特征标 χ 则在这两类特征标集合的交集中。

推论1 设 G 是 π-可分群,$H\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$,$\alpha\in\mathrm{Irr}(H)$,W 和 γ 分别是 α 的极大可扩张子群和极大可扩张特征标。如果 α 是拟本原特征标,则 $\chi=\gamma^G$ 是不可约的,并且 $\chi\in\mathrm{B}_\pi(G)\cap\mathrm{N}_\pi(G)$。

在定理1中,如果 $\alpha\in\mathrm{Irr}(H)$ 是拟本原的,令 γ 是 α 的极大可扩张特征标,则 $\chi=\gamma^G\in\mathrm{Irr}(G)$。为了叙述方便,在此定义映射

$$\Phi:\{\alpha\in\mathrm{Irr}(H)\mid\alpha\text{ 为 }H\text{ 的拟本原特征标}\}\to\mathrm{Irr}(G),\ \alpha\mapsto\Phi(\alpha),$$

其中 $\Phi(\alpha)=\chi$。特别地,可取 α 为 H 的线性特征标。

设 G 为任意有限群,p 为素数,通常记

$$\mathrm{Irr}_{p'}(G)=\{\chi\in\mathrm{Irr}(G)\mid\chi(1)\text{ 不被 }p\text{ 整除}\},$$

即 G 的次数不被 p 整除的全体不可约复特征标构成的集合。利用映射 Φ,可以在下述两个不可约复特征标集合之间建立一个双射。

推论2 设 G 是 π-可分群,$H\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$,记 $N=N_G(H)$。如果 Λ 为集合 $\mathrm{Lin}(H)$ 中 N-轨道的代表元集合,则映射 Φ 定义了一个双射:

$$\Lambda\to\mathrm{N}_\pi(G)\cap\mathrm{Irr}_{\pi'}(G),\ \lambda\mapsto\Phi(\lambda)。$$

作为定理1的直接应用,也可得到下述结论。

推论3 设 G 是 π-可分群,则 $\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$ 中每个成员均为 $\mathrm{N}_\pi(G)\cap\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$ 中唯一一个成员的卫星特征标。

1 预备知识

1979年,Gajendragadkar 在文献[16]中给出了两类很重要的特征标。设 G 是 π-可分群,其中 π 是素数集合,$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$。如果 $\chi(1)$ 是 π-数,并且对于 G 的每个次正规子群 S 以及 χ_S 的每个不可约分量 $\theta\in\mathrm{Irr}(S)$,均有 θ 的行列式阶 $o(\theta)$ 是 π-数,则称 χ 是 π-特殊的特征标,简称为 X_π-特征标,全体记为 $\mathrm{X}_\pi(G)$。类似地,也可定义 π'-特殊的特征标,亦称为 $\mathrm{X}_{\pi'}$-特征标,全体记为 $\mathrm{X}_{\pi'}(G)$。

下面给出著名的 Gajendragadkar 乘积定理,可参见文献[17]中定理2.2。

引理1 设 G 为 π-可分群,如果 $\alpha,\alpha'\in\mathrm{X}_\pi(G)$,而 $\beta,\beta'\in\mathrm{X}_{\pi'}(G)$,则 $\alpha\beta\in\mathrm{Irr}(G)$。进而,如果还有 $\alpha\beta=\alpha'\beta'$,则 $\alpha=\alpha'$ 且 $\beta=\beta'$。

如果 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ 存在分解 $\chi=\alpha\beta$,其中 $\alpha\in\mathrm{X}_\pi(G)$,$\beta\in\mathrm{X}_{\pi'}(G)$,则称 χ 为 G 的 π-可分解

的特征标,简称为F_{π}-特征标。通常用$\mathrm{F}_{\pi}(G)$表示G的所有F_{π}-特征标构成的集合。如果$\chi\in\mathrm{F}_{\pi}(G)$,根据上述乘积定理,则其因子$\alpha$和$\beta$均由$\chi$唯一确定,分别称为$\chi$的$\pi$-特殊因子和$\pi'$-特殊因子。为了叙述方便,本文将依次记为$\chi_{\pi}$和$\chi_{\pi'}$。

下面给出特征标对的定义。设G是π-可分群,如果$N\lhd G,\theta\in\mathrm{F}_{\pi}(N)$,则称$(N,\theta)$为$G$的正规的$\pi$-可分解的特征标对。设$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$,如果$\theta$为$\chi_N$的一个不可约分量,则称$\theta$在$\chi$下方,或称$\chi$在$\theta$上方,记为$(N,\theta)\leqslant(G,\chi)$。简单计,将$G$的所有正规的$\pi$-可分解的特征标对构成的集合记为$\mathcal{N}_{\pi}(G)$,将$\mathcal{N}_{\pi}(G)$中全体特征标对在"$\leqslant$"关系下极大成员的集合记为$\mathcal{N}_{\pi}^{*}(G)$。

下述引理是$\mathcal{N}_{\pi}(G)$中特征标对的一个基本性质。

引理2 设G是π-可分群,$(N,\theta)\in\mathcal{N}_{\pi}(G)$。如果$(N,\theta)\notin\mathcal{N}_{\pi}^{*}(G)$,则存在特征标对$(T,\tau)\in\mathcal{N}_{\pi}(G)$使得$(N,\theta)<(T,\tau)$,$N\lhd T$并且$T/N$为单群。

证明 因为$(N,\theta)\notin\mathcal{N}_{\pi}^{*}(G)$,则可找到极小的特征标对$(T,\tau)\in\mathcal{N}_{\pi}(G)$使得$(N,\theta)<(T,\tau)$。从而,存在$G$的正规子群$U\lhd G$使得$N<U\leqslant T$,并且$U/N$是一个单群。选取$\mu\in\mathrm{Irr}(U)$在$\tau$下方且在$\theta$上方。注意到$U\lhd T,\tau\in\mathrm{F}_{\pi}(T)$,由于$\mathrm{F}_{\pi}$-特征标在正规子群上的分量仍为$\mathrm{F}_{\pi}$-特征标,则$\mu\in\mathrm{F}_{\pi}(U)$,故$(U,\mu)\in\mathcal{N}_{\pi}(G)$。此时$(N,\theta)<(U,\mu)\leqslant(T,\tau)$。由$(T,\tau)$的极小性,迫使$(T,\tau)=(U,\mu)$。从而完成证明。

下述引理的证明包含在文献[8]定理2.4的证明过程中,为了叙述的完整性,在此仍给出证明。

引理3 设G是π-可分群,$(N,\theta)\in\mathcal{N}_{\pi}^{*}(G)$。记$G_{\theta}$为$\theta$在$G$中的惯性群。如果$G_{\theta}=G$,则$N=G$。

证明 假设$N<G$,则存在G的正规子群U使得$N<U$且U/N是单群,故U/N或者是π-群,或者是π'-群。选取$\mu\in\mathrm{Irr}(U)$在θ的上方。已知$\theta\in\mathrm{F}_{\pi}(N)$是$G$-不变的,根据文献[17]中推论4.5,可以推出$\mu\in\mathrm{F}_{\pi}(U)$,故$(N,\theta)<(U,\mu)\in\mathcal{N}_{\pi}(G)$。这与$(N,\theta)\in\mathcal{N}_{\pi}^{*}(G)$矛盾,该矛盾表明$N=G$。

本文仅叙述正规原核的构造过程。次正规原核的构造过程可参考文献[17]中4A。

设G是π-可分群,$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$为G的不可约复特征标。

(1)选取$(N,\theta)\in\mathcal{N}_{\pi}^{*}(G)$满足$(N,\theta)\leqslant(G,\chi)$。令$T=G_{\theta}$为$\theta$在$G$中的惯性群,根据Clifford对应,存在唯一的$\psi\in\mathrm{Irr}(T)$在$\theta$的上方使得$\chi=\psi^{G}$;

(2)如果χ为F_{π}-特征标,利用引理3,则$(G,\chi)=(T,\psi)$;

(3)如果χ不是F_{π}-特征标,用ψ代替χ,T代替G并重复过程(1)。

不断重复过程(1),(2)和(3),则可以得到一个序列$(G,\chi)>(T,\psi)>\cdots$。如果(W,γ)为该序列中的最后一对,则称(W,γ)是χ的一个正规原核。通过以上构造过程,可以得到$\gamma\in\mathrm{F}_{\pi}(W)$且$\gamma^{G}=\chi$。不难看出$\chi$的所有的正规原核构成了一个$G$-共轭类。

类似于Fong-Swan定理所给出的提升技术,Isaacs建立了I_{π}-特征标的提升理论。设G是π-可分群,$\chi\in\mathrm{Irr}(G)$,(W,γ)是χ的一个次正规原核。如果$\gamma\in\mathrm{X}_{\pi}(W)$,则称$\chi$为$G$的$\mathrm{B}_{\pi}$-特征标,全体记为$\mathrm{B}_{\pi}(G)$。由此得到了$\mathrm{I}_{\pi}$-特征标的一类典范提升,即映射$\chi\mapsto\chi^{0}$可以在$\mathrm{B}_{\pi}(G)$与$\mathrm{I}_{\pi}(G)$之间建立一个双射,其中$\chi^{0}$表示$\chi$在$G$的阶为$\pi$-数的元素上的限制。

2002年Navarro利用正规原核构造了I_{π}-特征标的一类新的典范提升[7]。2010年Cossey明确定义了这类提升[18]:如果(W,γ)是不可约复特征标χ的一个正规原核并且$\gamma\in\mathrm{X}_{\pi}(W)$,则称$\chi$为$G$的$\mathrm{N}_{\pi}$-特征标,全体记作$\mathrm{N}_{\pi}(G)$。

Navarro在文献[9]中发现G的每个N_{π}-特征标可以确定G的若干形如$(\beta\gamma)^{G}$的不可约复特征标。下述结果可见文献[9]中定理3.1。

引理4 设G为π-可分群,$\chi\in\mathrm{N}_{\pi}(G)$,$(W,\gamma)$为$\chi$的正规原核,则存在下述单射:

$$f:\mathrm{X}_{\pi'}(W)\to\mathrm{Irr}(G),\beta\mapsto(\beta\gamma)^{G}。$$

定义2 设G为π-可分群,$\chi\in\mathrm{N}_{\pi}(G)$,$(W,\gamma)$为$\chi$的正规原核。称$(\beta\gamma)^{G}\in\mathrm{Irr}(G)$为$\chi$的一个

卫星特征标,其中 $\beta\in \mathrm{X}_{\pi'}(W)$, 全体记为 $\mathrm{Sat}_{\chi}(G)$。

需要指出的是,由于不可约复特征标的正规原核是一个 G-共轭类,所以卫星特征标的定义不依赖于 χ 的正规原核 (W,γ) 的选择而仅仅依赖于 χ。在此需要说明的是,本文所用到的卫星特征标均为正规原核的卫星特征标。

事实上,不同 N_π-特征标的卫星特征标并无相同的成员。下述引理可见文献[9]中引理3.4。

引理5 设 G 为 π-可分群,χ_1,χ_2 为 G 的任意两个不同的 N_π-特征标,则

$$\mathrm{Sat}_{\chi_1}(G)\cap \mathrm{Sat}_{\chi_2}(G)=\varnothing。$$

本文还需要卫星特征标的一个计数性引理。本质是文献[14]中定理3.5,只需将其中次正规原核改写为正规原核即可。

引理6 设 G 为 π-可分群,$H\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $N=N_G(H)$, $\lambda\in \mathrm{Lin}(H)$,则

$$|\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)|=|\mathrm{Irr}(N|\lambda)|,$$

其中 $\mathrm{Irr}(N|\lambda)$ 为 N 的在 λ 上方的不可约复特征标集合。

下面给出 Gajendragadkar 限制定理,即文献[17]中定理2.10。

引理7 设 G 是 π-可分群,$H\leqslant G$ 且 $|G:H|$ 为 π'-数,则特征标的限制定义了一个单射

$$(\ )_H\colon \mathrm{X}_\pi(G)\to \mathrm{X}_\pi(H),\chi\mapsto \chi_H。$$

特别地,可取 $H\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$。

下述结论是 McKay 猜想的一种变形版本,可见文献[14]中定理3.4。

引理8 设 G 是 π-可分群,$H\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $N=N_G(H)$,则

$$|\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)|=|\mathrm{Irr}(N/H')|=|\mathrm{Irr}_{\pi'}(N)|。$$

2 主要结果及证明

为了得到本文的定理1,首先证明下述定理。

定理2 设 G 是 π-可分群,$H\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $\alpha\in \mathrm{Irr}(H)$, W 和 γ 分别是 α 的极大可扩张子群和极大可扩张特征标。如果 α 是拟本原特征标,则 $\chi=\gamma^G$ 是不可约的,并且 (W,γ) 是 χ 的一个正规原核。

证明 我们对 $|G|$ 作归纳。

令 $S=\mathrm{Core}_G(W)$。记 $D=H\cap S$,则 $D\lhd H$,并且 $D\in \mathrm{Hall}_\pi(S)$。因为 α 是拟本原特征标,则 $\alpha_D=e\beta$,其中 e 是非负整数,$\beta\in \mathrm{Irr}(D)$。由条件可知 $\gamma_H=\alpha$, 故 $\gamma_D=e\beta$。选取特征标 $\varphi\in \mathrm{Irr}(S)$ 在 γ 下方且在 β 上方。注意到 $\gamma\in \mathrm{X}_\pi(W)$, $S\lhd W$,由于 π-特殊的特征标在正规子群上的分量仍为 π-特殊的特征标,故 $\varphi\in \mathrm{X}_\pi(S)$。根据 Gajendragadkar 限制定理,则 $\varphi_D=\beta$,并且 φ 和 β 是相互唯一确定的。

下面将证明 φ 是 W-不变的。因为 $D\in \mathrm{Hall}_\pi(S)$, $S\lhd W$,由 Frattini 论断可知 $W=SN_W(D)$。因此只需证明 φ 是 $N_W(D)$-不变的。显然,γ 是 $N_W(D)$-不变的,故 β 是 $N_W(D)$-不变的。由于 $N_W(D)$ 正规化 S,而且 φ 和 β 是相互唯一确定的,故 φ 也是 $N_W(D)$-不变的。综上所述,φ 是 W-不变的。

不难看出 $(S,\varphi)\in\mathcal{N}_\pi(G)$。下证 $(S,\varphi)\in\mathcal{N}_\pi^*(G)$。如果 $(S,\varphi)\notin\mathcal{N}_\pi^*(G)$,根据引理2,存在特征标对 $(U,\mu)\in\mathcal{N}_\pi(G)$ 使得 $(S,\varphi)<(U,\mu)$, $S\lhd U$,并且 U/S 是一个单群。由此可知 U/S 或者是 π-群,或者是 π'-群。假设 U/S 是 π-群,因为 $U\cap H\in \mathrm{Hall}_\pi(U)$,则 $U=S(U\cap H)\leqslant W$,这与 $S=\mathrm{Core}_G(W)$ 矛盾。该矛盾表明此情形不可能发生。因此,可以假设 U/S 是 π'-群。

因为 $\mu\in \mathrm{F}_\pi(U)$ 在 $\varphi\in \mathrm{X}_\pi(S)$ 的上方且 $S\lhd U$,故 μ_π 在 φ 的上方。此时 U/S 是 π'-群,根据 Clifford 定理,则 $(\mu_\pi)_S=\varphi$。记 $\theta=\mu_\pi$,则 $\theta_D=\beta$。注意到 $D=U\cap H\in \mathrm{Hall}_\pi(U)$,再次使用 Gajendragadkar 限制定理,则 θ 是 β 在 U 上唯一的 π-特殊的扩张。由于 β 是 H-不变的,并且 H 正规化 U,利用 θ 的唯一性可以推出 θ 也是 H-不变的。

$$\begin{tikzcd}
(U,\theta) \arrow[r] & UH \\
(S,\varphi) \arrow[r] \arrow[u] & SH \arrow[u] \\
(D,\beta) \arrow[r] \arrow[u] & (H,\alpha) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

图1 特征标位置关系

Fig. 1 Position relations of characters

如图1所示,由于 α 在 β 的上方,根据特征

标限制定理(即文献[17]中引理2.11),则α可扩张到UH。从而$U\leqslant UH\leqslant W$,这与$S=\mathrm{Core}_G(W)$矛盾。该矛盾表明$(S,\varphi)\in\mathcal{N}_\pi^*(G)$。

最后,令$T=G_\varphi$为φ在G中的惯性群。上述证明已经得到$W\leqslant T$。如果$T=G$,由引理3,则$S=G$,结论显然成立。因此可以假设$T<G$。使用归纳假设,可以推出γ^T是不可约的,并且(W,γ)是γ^T的一个正规原核。进而根据Clifford对应和正规原核的构造过程,则$\chi=\gamma^G=(\gamma^T)^G$是不可约的,并且,$(W,\gamma)$也是$\chi$的一个正规原核。至此完成证明。

由Isaacs-Navarro定理和定理2,则可得到本文的定理1。

定理1的证明 根据Isaacs-Navarro定理和定理2,可以得出$\chi=\gamma^G$是不可约的,并且(W,γ)既是χ的正规原核,也是χ的次正规原核。又因为χ的正规原核和次正规原核均为一个G-共轭类,故χ的正规原核和次正规原核是相同的。至此完成证明。

3 应用

利用定理1,可直接得到本文的推论1。

推论1的证明 根据定理1,可知$\chi=\gamma^G$是不可约的,并且(W,γ)既是χ的正规原核,也是χ的次正规原核。因为$\gamma\in\mathrm{X}_\pi(W)$,故$\chi\in\mathrm{B}_\pi(G)\cap\mathrm{N}_\pi(G)$。

利用定理1,可以在下述两个不可约复特征标集合之间建立一个双射。

推论2的证明 任取$\lambda\in\Lambda$,令W和γ分别为λ的极大可扩张子群和极大可扩张特征标,则$\Phi(\lambda)=\gamma^G\in\mathrm{Irr}(G)$,故$\Phi(\lambda)(1)=\gamma^G(1)=|G:W|\gamma(1)$。由于$H\leqslant W$,所以$|G:W|$是$\pi'$-数。又因为$\gamma(1)=\lambda(1)=1$,则$\Phi(\lambda)(1)$为$\pi'$-数,故$\Phi(\lambda)\in\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$。根据定理1,则$\Phi(\lambda)\in\mathrm{N}_\pi(G)$。任取$n\in N$,由$\Phi$的定义可以看出$\Phi(\lambda^n)=\Phi(\lambda)^n=\Phi(\lambda)$,故$\Phi$的定义与$N$-轨道代表元的选择没有关系。因此映射$\Phi$是有意义的。

接下来证明Φ是满射。任取$\chi\in\mathrm{N}_\pi(G)\cap\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$。令$(W,\gamma)$是$\chi$的一个正规原核,则$\gamma\in\mathrm{X}_\pi(W)$。因为$\gamma^G=\chi\in\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$,故$\gamma(1)$是$\pi'$-数,则$\gamma\in\mathrm{Lin}(W)$。同时,$|G:W|$也是$\pi'$-数。由于$\chi$的正规原核是一个$G$-共轭类,通过对$(W,\gamma)$进行适当的共轭替换,可以使得$H\leqslant W$。令$\lambda=\gamma_H\in\mathrm{Lin}(H)$。根据Gajendragadkar限制定理,可以得到γ为λ在W上唯一的π-特殊的扩张。设M和δ分别为λ的极大可扩张子群和极大可扩张特征标,则$W\leqslant M$。此时,$\delta_W\in\mathrm{X}_\pi(W)$满足$(\delta_W)_H=\lambda$,利用$\gamma$的唯一性,则$\delta_W=\gamma$。又因为$\gamma^G=\chi$,故$\gamma^M$是不可约的,迫使$M=W,\delta=\gamma$。因此,$\chi=\gamma^G=\Phi(\lambda)$,这表明$\Phi$是满射。

最后证明Φ是单射。假设$\lambda,\mu\in\Lambda$使得$\Phi(\lambda)=\Phi(\mu)=\chi$。再设$(W,\gamma)$和$(V,\tau)$分别是$\lambda$和$\mu$的极大可扩张子群和极大可扩张特征标。根据定理1,则(W,γ)和(V,τ)均为χ的正规原核,因此存在元素$g\in G$使得$(W,\gamma)^g=(V,\tau)$。从而,H和H^g均为V的Hall π-子群,故存在$v\in V$使得$H^{gv}=H$。由此推出$gv\in N$,则$\gamma^{gv}=\tau^v=\tau$,据此可知$\lambda^{gv}=\mu$,这表明λ和μ在同一个N-轨道中,故$\lambda=\mu$。至此完成证明。

下面证明本文的推论3。

推论3的证明 任取G的一个Hall π-子群H,记$N=N_G(H)$,Λ为集合$\mathrm{Lin}(H)$中N-轨道的代表元集合。任取$\lambda\in\Lambda$,令$\psi=\Phi(\lambda)$。根据推论2,则$\psi\in\mathrm{N}_\pi(G)\cap\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$。设$W$和$\gamma$分别为$\lambda$的极大可扩张子群和极大可扩张特征标,则$\gamma\in\mathrm{X}_\pi(W)$且$\psi=\gamma^G$,故$\psi(1)=|G:W|\gamma(1)$。根据定理1,可知$(W,\gamma)$是$\psi$的一个正规原核。任取$\eta\in\mathrm{Sat}_\psi(G)$。根据卫星特征标的定义,则$\eta=(\beta\gamma)^G$,其中$\beta\in\mathrm{X}_{\pi'}(W)$,故

$$\eta(1)=|G:W|\beta(1)\gamma(1)。$$

注意到$|G:W|$为π'-数,因此$\eta(1)_\pi=\gamma(1)=\psi(1)_\pi=1$,则$\eta\in\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$。从上述分析可以看出

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)\subseteq\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)。$$

如果可以证明$|\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)|=|\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)|$,则表明$\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$中每个特征标均为$\mathrm{N}_\pi(G)\cap\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)$中某个成员的卫星特征标。再根据引理5,可以得到唯一性成立。因此只需要证明上述等式成立即可。

任取$\chi\in\mathrm{Irr}(N/H')$。使用Clifford定理,则

$$\chi_H=e(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_t),$$

其中e是非负整数,$\theta_i(i=1,2,\cdots,t)$构成了一

个 N-共轭类。

因为 $H'\leqslant \mathrm{Ker}(\chi)\cap H$,则 $H'\leqslant \mathrm{Ker}(\chi_H)$。又因为 $\mathrm{Ker}(\chi_H)=\bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}(\theta_i)$,故 $H'\leqslant \mathrm{Ker}(\theta_i)$。从而,$\theta_i\in \mathrm{Lin}(H)$。因此,$\chi$ 在集合 $\mathrm{Lin}(H)$ 的唯一一个 N-轨道的上方,则

$$\mathrm{Irr}(N/H')=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Irr}(N|\lambda),$$

其中 $\mathrm{Irr}(N|\lambda)$ 为 N 的在 λ 上方的不可约复特征标集合。由 Clifford 定理可以看出上式右边为无交并,故

$$|\mathrm{Irr}(N/H')|=|\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Irr}(N|\lambda)|=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Irr}(N|\lambda)|。\quad(1)$$

任取 $\lambda\in\Lambda$,根据引理 6,可知

$$|\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)|=|\mathrm{Irr}(N|\lambda)|。$$

再使用引理 5,进一步得到

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)|=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Irr}(N|\lambda)|。\quad(2)$$

利用(1)和(2)两个等式,可以推出

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)|=|\mathrm{Irr}(N/H')|。$$

应用引理 8,我们有

$$|\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)|=|\mathrm{Irr}(N/H')|。$$

因此

$$|\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)|=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Sat}_{\Phi(\lambda)}(G)|=|\mathrm{Irr}_{\pi'}(G)|。$$

至此完成证明。

参考文献:

[1] ISAACS I M. Finite Group Theory[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2008.

[2] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups[M]. New York: Academic Press, 1976.

[3] ISAACS I M. Characters of π-separable Groups[J]. *J Algebra*, 1984, **86**(1): 98–128. DOI: 10.1016/0021-8693(84)90058-9.

[4] ISAACS I M. Induction and Restriction of π-special Characters[J]. *Can J Math*, 1986, **38**(3): 576–604. DOI: 10.4153/cjm-1986-029-5.

[5] ISAACS I M. Induction and Restriction of π-partial Characters and Their Lifts[J]. *Can J Math*, 1996, **48**(6): 1210–1223. DOI: 10.4153/cjm-1996-064-9.

[6] ISAACS I M. Fong Characters in π-separable Groups[J]. *J Algebra*, 1986, **99**(1): 89–107. DOI: 10.1016/0021-8693(86)90056-6.

[7] NAVARRO G. Vertices for Characters of p-solvable Groups [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2002, **354**(7): 2759–2773. DOI: 10.1090/s0002-9947-02-02974-4.

[8] COSSEY J P. Generalizations of the Fong-Swan Theorem [D]. Madison: University of Wisconsin–Madison, 2005.

[9] NAVARRO G. New Properties of the π-special Characters [J]. *J Algebra*, 1997, **187**(1): 203–213. DOI: 10.1006/jabr.1997.6798.

[10] COSSEY J P. Vertices of π-irreducible Characters of Groups of Odd Order[J]. *Commun Algebra*, 2008, **36**(11): 3972–3979. DOI: 10.1080/00927870802174199.

[11] WANG L, JIN P. The Uniqueness of Vertex Pairs in π-separable Groups[J]. *Commun Algebra*, 2023, **51**(7): 3060–3065. DOI: 10.1080/00927872.2023.2177045.

[12] JIN P, WANG L. Lifts of Brauer Characters in Characteristic Two[EB/OL]. arXiv Preprint: 2301.12408, 2023.

[13] NAVARRO G. A New Character Correspondence in Groups of Odd Order[J]. *J Algebra*, 2003, **268**(1): 8–21. DOI: 10.1016/s0021-8693(03)00420-4.

[14] ISAACS I M, NAVARRO G. Characters of p'-degree of P-solvable Groups[J]. *J Algebra*, 2001, **246**(1): 394–413. DOI: 10.1006/jabr.2001.8985.

[15] COSSEY J P. A Construction of Two Distinct Canonical Sets of Lifts of Brauer Characters of a p-solvable Group [J]. *Arch Math*, 2006, **87**(5): 385–389. DOI: 10.1007/s00013-006-1756-0.

[16] GAJENDRAGADKAR D. A Characteristic Class of Characters of Finite π-separable Groups[J]. *J Algebra*, 1979, **59**(2): 237–259. DOI: 10.1016/0021-8693(79)90124-8.

[17] ISAACS I M. Characters of Solvable Groups[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2018.

[18] COSSEY J P. Vertex Subgroups and Vertex Pairs in Solvable Groups[J], *Contemp Math*, 2010, **524**: 17–32. DOI:10.1090/conm/524/10342.