

基于犹豫偏好的区间直觉犹豫模糊集的距离测度及其决策应用

朱勇,李得超*,郭倩男,宋锦杰

(浙江海洋大学 信息工程学院,浙江 舟山 316022)

摘要:区间直觉犹豫模糊集(Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy set, IIVIFS)可以描绘现实中大量不确定信息。文章针对IIVIFS一般的距离测度,考虑决策者在决策时对犹豫程度的偏好,定义了新的距离测度公式,并证明其满足公理化定义,弥补了现有距离测度的不足。针对一般决策过程中属性权重难以评估的问题,定义了区间直觉犹豫模糊熵,利用熵权法计算属性权重。然后在属性权重已知情况下给出了相应的加权距离测度公式。最后结合TOPSIS(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)法考虑新的熵与距离测度下区间直觉犹豫模糊集的多属性决策方法,利用实例阐述所提方法的有效性与实用价值,并通过仿真实验进一步说明了所提距离测度公式的有效性和稳定性。

关键词:区间直觉犹豫模糊集;犹豫度;距离测度;模糊熵;属性权重;TOPSIS方法;多属性决策

中图分类号:C934;TP391 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2024)02-0346-13

Distance Measure of Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets Based on Hesitancy Preference and Its Decision-making Application

ZHU Yong, LI Dechao*, GUO Qiannan, SONG Jinjie

(School of Information Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, China)

Abstract: Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy set (IIVIFS) can describe a lot of uncertain information in reality. Aiming at the general distance measures of IIVIFSs, considering the preference of decision makers for hesitancy degree in decision-making, a new distance measure formula is defined, and proved that it meets the axiomatic definition, which makes up the deficiency of existing distance measures. Aiming at the problem that attribute weights are difficult to evaluate in general decision-making process, the interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy entropy is defined, and attribute weights are calculated by entropy weight method. Then the corresponding weighted distance measure formula is given when the attribute weights are known. Finally, considering the multi-attribute decision-making method of interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy sets under the new entropy and distance measures with TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) method, the effectiveness and practical value of the proposed method are illustrated with an example, and the effectiveness and stability of proposed distance measure formulas are further illustrated through simulation experiments.

Key words: interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy set; hesitancy degree; distance measure; fuzzy entropy; attribute weight; TOPSIS method; multi-attribute decision making

收稿日期:2022-11-26;接受日期:2023-03-10

基金项目:国家自然科学基金(61673352)

作者简介:朱勇(1997-),男,安徽芜湖人,硕士研究生,研究方向为模糊推理、模糊决策。E-mail:zyong0526@126.com

* 通信作者:李得超(LI Dechao),E-mail:lizj0012022@126.com

引文格式:朱勇,李得超,郭倩男,等.基于犹豫偏好的区间直觉犹豫模糊集的距离测度及其决策应用[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(2):346-358. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023043

0 引言

现实生活中存在很多信息无法用精确值来表示。美国控制论专家 Zadeh 教授于 1965 年提出了模糊集(Fuzzy set, FS)的定义,模糊集的核心思想是将特征函数取值为 0 或 1 的“非此即彼”的概念扩展到在闭区间 $[0, 1]$ 中取值的隶属度函数^[1]。得益于模糊集理论在分析处理不确定信息方面的优越性,得到了很多专家和学者的关注,并对其进行了一系列研究。针对 FS 中只考虑隶属度的缺陷,以 FS 为基础的各种扩展形式被相继提出。Atanassov^[2]提出了直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy set, IFS)的概念,在 FS 的基础上将非隶属度纳入考虑范围,利用隶属度和非隶属度表达决策者的决策信息,应用范围更广。此后,Atanassov 和 Gargov^[3]提出了区间直觉模糊集(Interval-valued intuitionistic fuzzy set, IVIFS),将单个精确值的隶属度和非隶属度进行推广到了 $[0, 1]$ 上的子区间来表示隶属度和非隶属度,弥补了某些情况下无法用精确数来表示的不足。Torra^[4]定义了犹豫模糊集(Hesitant fuzzy set, HFS),在利用单个实数值表达某一对象隶属度的基础上扩大到几个可能值,反映了决策者在做出决策时潜在的犹豫不决程度。Zhang^[5]将区间直觉模糊集与犹豫模糊集相结合,定义了区间直觉犹豫模糊集(Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy set, IVIHFS)和相应的运算规则,并给出了基于集成算子的多属性决策模型。此后,IVIHFS 得到了广泛研究,一类是对其运算规则、各种集成算子、信息测度等的研究^[6-8];另一类是将多属性决策方法扩展到区间直觉犹豫模糊环境中^[9-10]。IVIHFS 对于现实中很多不确定、未知因素的问题具有良好的处理能力,通过模糊统计、专家询问、二元对比排序等方法将不确定信息转化为模糊数,在模糊聚类分析、模式识别、模糊决策、综合评判等领域均有广泛应用。

距离测度作为 IVIHFS 中非常重要的指标,具有较高的研究价值。距离测度和相似度用来刻画属性之间接近程度,而相关系数用来描述属性之间的线性变化。TOPSIS(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)方法是由 Hwang 和 Yoon^[11]最早提出来的,它的基本思想是在有限可行的备选方案中根据方案属性值选取距离正理想方案最近,同时距离负理想方案最远的可行解作为最优解,利用相对贴近度评价指标来对备选方案进行择优排序。有关直觉犹豫模糊集的距离测度得到了很好的分析和研究,文献[12-13]通过从不同角度定义决策者对犹豫程度的偏好,给出了新的距离测度公式。并且文献[12]结合 TOPSIS 方法验证所提距离测度公式的有效性;文献[13]结合决策者具有主观偏好的问题和 TOPSIS 方法对距离测度进行分析。然而,关于区间直觉犹豫模糊集距离测度的研究却少见报道。文献[6]分析了 IVIHFS 隶属度和非隶属度的差异,给出了 IVIHFS 的距离测度,但是没有考虑犹豫度带来的影响,于是在很多情况下出现模式识别困难、难以区分的问题,需要对其进行分析和改进。文献[14]在[6]的基础上更一般地加入了犹豫度,定义了新的距离测量方法,然而此种方法对于犹豫信息难以准确度量的直觉犹豫模糊集^[15]、毕达哥拉斯犹豫模糊集^[16]、图犹豫模糊集^[17]、区间图犹豫模糊集^[18]等并不适用。针对这一问题,本文考虑具有犹豫偏好的 IVIHFS 的距离测度,为了体现决策者在决策过程中对犹豫程度的偏好,本文将单独赋予决策者犹豫程度以相应的权重,在其基础上定义新的距离测度公式,并验证了其满足公理化定义。

模糊熵用来度量模糊信息的不确定性,在模糊集理论中,一个集合的熵值越大,表明这个模糊集合所包含信息的不确定性越大。Mao 等^[19]通过分析直觉因子和模糊因子定义了区间直觉模糊熵,并在其基础上提出区间直觉模糊交叉熵和对称交叉熵的概念,然后结合跨度因子定义了区间直觉模糊混合熵,将其应用于群决策问题中。Li 等^[20]通过得分因子和不确定性因子构造了直觉模糊熵和交叉熵,并将其推广到毕达哥拉斯模糊环境中。李龙妹等^[21]研究了区间毕达哥拉斯犹豫模糊熵,并结合相似性度量考虑了区间毕达哥拉斯犹豫模糊环境下的多属性决策问题。为了解决区间直觉犹豫模糊多属性决策问题中客观属性权重难以评估的问题,定义了区间直觉犹豫模糊熵,用来度量属性权重,然后在属性权重已知的情况下给出相应的加权距离测度公式。

针对区间直觉犹豫模糊集,本文首先提出了新的具有犹豫偏好的距离测度公式,验证了其满足公理化定义;考虑到决策过程中客观属性权重难以评估的问题,定义了区间直觉犹豫模糊熵,用以计算属性权重;然后在新的距离测度和熵测度条件下结合 TOPSIS 方法解决未知属性权重的区间直觉犹豫模糊多属性决策问题,并对可能影响决策结果的相关参数进行了敏感性分析;最后通过仿真实验进一步说明了所提距离测度公式的有效性和稳定性。

1 预备知识

本节主要介绍区间直觉犹豫模糊集的基本概念和相关知识。

定义 1^[3] 设 X 是一个非空且有限的集合,称 $\tilde{A} = \{ \langle x, \tilde{u}_A(x), \tilde{v}_A(x) \rangle | x \in X \}$ 为 X 上的一个区间直觉模糊集 IVIFS。其中 $\tilde{u}_A(x) \subset [0, 1]$ 表示 $x \in X$ 对于集合 \tilde{A} 的隶属度区间, $\tilde{v}_A(x) \subset [0, 1]$ 表示 $x \in X$ 对于集合 \tilde{A} 的非隶属度区间,且 $0 \leq \sup(\tilde{u}_A(x)) + \sup(\tilde{v}_A(x)) \leq 1$ 。当 $\inf(\tilde{u}_A(x)) = \sup(\tilde{u}_A(x)), \inf(\tilde{v}_A(x)) = \sup(\tilde{v}_A(x))$ 时,区间直觉模糊集退化为直觉模糊集。

定义 2^[4] 设 X 是一个非空且有限的集合,称 $E = \{ \langle x, h_E(x) \rangle | x \in X \}$ 为 X 上的犹豫模糊集 HFS,其中 $h_E(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 中一些数值的集合,表示元素 $x \in X$ 关于集合 E 的一些可能的隶属度。

定义 3^[5] 设 X 是一个非空且有限的集合,称 $\tilde{E} = \{ \langle x, \tilde{h}_E(x) \rangle | x \in X \}$ 为 X 上的一个区间直觉犹豫模糊集 IVIHFS。其中, $\tilde{h}_E(x)$ 表示 X 中元素 x 关于集合 \tilde{E} 的几个可能的隶属程度和非隶属程度的集合,它由一些区间直觉模糊数组成。

称 $\tilde{h} = \tilde{h}_E(x)$ 为区间直觉犹豫模糊元 (Interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy element, IVIHFE),如果 $a \in \tilde{h}$,那么 a 就是一个区间直觉模糊数,它可以表示为 $a = (u_a, v_a) = ([u_a^-, u_a^+], [v_a^-, v_a^+])$ 。并且 $[u_a^-, u_a^+]$ 表示的就是隶属度所属区间, $[v_a^-, v_a^+]$ 表示的非隶属度所属区间,其中 $[u_a^-, u_a^+] \subset [0, 1], [v_a^-, v_a^+] \subset [0, 1]$,且有 $0 \leq u_a^+ + v_a^+ \leq 1$ 。

定义 4 设 X 是一个非空且有限的集合, $\tilde{E} = \{ \langle x, \tilde{h}_E(x) \rangle | x \in X \}$ 为 X 上的一个区间直觉犹豫模糊集,定义区间直觉犹豫模糊元 $\tilde{h}_E(x)$ 的犹豫度为:

$$\pi_{\tilde{E}}(x) = \bigcup_{a \in \tilde{h}_E(x)} ([1 - u_a^+ - v_a^+, 1 - u_a^- - v_a^-]) = \bigcup_{a \in \tilde{h}_E(x)} ([\pi_a^-, \pi_a^+]), \quad (1)$$

其中 $\pi_a^- = 1 - u_a^+ - v_a^+, \pi_a^+ = 1 - u_a^- - v_a^-, [\pi_a^-, \pi_a^+]$ 表示犹豫度区间。

2 区间直觉犹豫模糊集的距离测度

本节主要分析了传统区间直觉犹豫模糊集距离测度的不足,并且为了方便后续具有犹豫偏好的距离测度的构造,定义了区间直觉模糊数的得分函数,以及区间直觉模糊数基数不等时的补齐方法。

2.1 传统的距离测度

定义 5^[6] 设 \tilde{A} 和 \tilde{B} 是论域 X 上的两个区间直觉犹豫模糊集,称映射 $D: IVIHFS(X) \times IVIHFS(X) \rightarrow [0, 1]$ 满足以下性质:

$$(1) 0 \leq D(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq 1;$$

$$(2) D(\tilde{A}, \tilde{B}) = D(\tilde{B}, \tilde{A});$$

$$(3) D(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0 \text{ 当且仅当 } \tilde{A} = \tilde{B};$$

(4) 若 $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C}, \tilde{C} \in IVIHFS(X)$, 则 $D(\tilde{A}, \tilde{C}) \geq D(\tilde{A}, \tilde{B}), D(\tilde{A}, \tilde{C}) \geq D(\tilde{B}, \tilde{C})$, 则称 $D(\tilde{A}, \tilde{B})$ 为 \tilde{A} 与 \tilde{B} 之间的区间直觉犹豫模糊集的距离测度。

定义 6^[6] 设 \tilde{A} 和 \tilde{B} 为论域 X 上的两个区间直觉犹豫模糊集,设 $\tilde{A} = \{ \langle x, \tilde{h}_A(x) \rangle | x \in X \}$,

$\tilde{B} = \{ \langle x, \tilde{h}_{\tilde{B}}(x) \rangle \mid x \in X \}$, 那么 \tilde{A} 和 \tilde{B} 之间标准的广义距离定义如下:

$$D_G(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (|(u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+|^{\lambda} + |(u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^-|^{\lambda} + |(v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+|^{\lambda} + |(v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^-|^{\lambda}) \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (2)$$

这里 $\lambda > 0$ 。当 $\lambda = 1, 2$ 时, 广义距离成为海明距离和欧式距离, 分别记为 $D_H(\tilde{A}, \tilde{B})$ 和 $D_E(\tilde{A}, \tilde{B})$ 。这是一种基于 Szmidt 的距离测度公式。其中, $l_{x_i} = \max(l_{\tilde{A}}(x_i), l_{\tilde{B}}(x_i))$, $l_{\tilde{A}}(x_i), l_{\tilde{B}}(x_i)$ 分别表示 $\tilde{h}_{\tilde{A}}(x)$ 和 $\tilde{h}_{\tilde{B}}(x)$ 中相应的区间直觉模糊数的个数。 $\tilde{h}_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i)$ 和 $\tilde{h}_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i)$ 分别表示 $\tilde{h}_{\tilde{A}}(x_i)$ 和 $\tilde{h}_{\tilde{B}}(x_i)$ 中相应的排序第 j 大的区间直觉模糊数。

并且 $\tilde{h}_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i) = ([(u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- , (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+], [(v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- , (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+])$, $\tilde{h}_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i) = ([(u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- , (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+], [(v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- , (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+])$ 。

这里, 需要事先对 $\tilde{A}(x_i)$ 和 $\tilde{B}(x_i)$ 进行排序, 一般令 $\tilde{A}(x_i)$ 和 $\tilde{B}(x_i)$ 中的区间直觉模糊数分别按照降序的顺序进行排列, 这样就可以得到 $\tilde{A}(x_i)$ 和 $\tilde{B}(x_i)$ 中第 j 大的区间直觉模糊数。

参考文献 [22-24] 中对得分函数的研究, 综合考虑区间隶属度、非隶属度和犹豫度的影响, 并且引入从众心理^[25], 给出如下得分函数, 用以对区间直觉模糊数进行比较。

定义 7 设 $\tilde{a} = ([u_a^-, u_a^+], [v_a^-, v_a^+])$ 是一个区间直觉模糊数, 其犹豫度区间为 $[\pi_a^-, \pi_a^+]$, 令

$$S(\tilde{a}) = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2} (u_a^+ - v_a^+ + u_a^- - v_a^-) \right\}}{1 + \frac{1}{2} (\pi_a^+ + \pi_a^-)}, \quad (3)$$

那么称 $S(\tilde{a})$ 为 \tilde{a} 的得分函数, $S(\tilde{a}) \in [1/e, e]$ 。其相应的大小比较方式如下:

设 $\tilde{a}_1 = ([u_{a_1}^-, u_{a_1}^+], [v_{a_1}^-, v_{a_1}^+])$ 和 $\tilde{a}_2 = ([u_{a_2}^-, u_{a_2}^+], [v_{a_2}^-, v_{a_2}^+])$ 为两个区间直觉模糊数, 若 $S(\tilde{a}_1) < S(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2$, 即 \tilde{a}_1 劣于 \tilde{a}_2 ; 若 $S(\tilde{a}_1) = S(\tilde{a}_2)$, 则 $\tilde{a}_1 \simeq \tilde{a}_2$, 即 \tilde{a}_1 与 \tilde{a}_2 无异。

另外, 在很多情况下, 有 $l_{\tilde{A}}(x_i) \neq l_{\tilde{B}}(x_i)$, 即这两个 IVIHFEs 的区间直觉模糊数的基数不同, 因此通常有必要扩展元素较少的 IVIHFE, 使得它们具有相同的元素个数。这里本文尝试给出如下延伸方式。

定义 8 设 \tilde{A} 和 \tilde{B} 为两个 IVIHFSs, $l_{\tilde{A}}(x_i)$ 和 $l_{\tilde{B}}(x_i)$ 分别表示 $\tilde{A}(x_i)$ 和 $\tilde{B}(x_i)$ 中区间直觉模糊数的个数, 且 $l_{\tilde{A}}(x_i) < l_{\tilde{B}}(x_i)$, 那么需要对区间直觉模糊数较少的集合 $\tilde{A}(x_i)$ 进行延伸。假设 $\tilde{A}(x_i) = \langle \tilde{h}_{\tilde{A}}^1, \tilde{h}_{\tilde{A}}^2, \tilde{h}_{\tilde{A}}^3, \dots, \tilde{h}_{\tilde{A}}^{l_{\tilde{A}}} \rangle$, 则其延伸方式为:

$$\tilde{\tilde{h}}_{\tilde{A}} = \alpha \tilde{h}_{\tilde{A}}^+ + (1 - \alpha) \tilde{h}_{\tilde{A}}^-, \quad (4)$$

这里 $\tilde{h}_{\tilde{A}}^+ = \max \{ \tilde{h}_{\tilde{A}}^1, \tilde{h}_{\tilde{A}}^2, \tilde{h}_{\tilde{A}}^3, \dots, \tilde{h}_{\tilde{A}}^{l_{\tilde{A}}} \}$, $\tilde{h}_{\tilde{A}}^- = \min \{ \tilde{h}_{\tilde{A}}^1, \tilde{h}_{\tilde{A}}^2, \tilde{h}_{\tilde{A}}^3, \dots, \tilde{h}_{\tilde{A}}^{l_{\tilde{A}}} \}$ 。 α 是由决策者的风险偏好所确定的。 $\alpha = 1$ 时, 风险偏好是乐观的; $\alpha = 0$ 时, 风险偏好是悲观的。

2.2 传统距离测度的局限性

区间直觉犹豫模糊集在使用传统距离测度进行分析比较时, 忽略了决策者犹豫度对其距离测量结果的影响, 导致计算出来的结果有偏差。

例 1 设 X 是一个论域, $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in IVIHFS(X)$, 其中

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{ \langle ([0.2, 0.6], [0.1, 0.3]), ([0.1, 0.3], [0.2, 0.4]) \rangle \}, \\ \tilde{B} &= \{ \langle ([0.3, 0.5], [0.2, 0.4]), ([0.2, 0.3], [0.4, 0.7]) \rangle \}, \\ \tilde{C} &= \{ \langle ([0.4, 0.6], [0.1, 0.4]), ([0.2, 0.3], [0.3, 0.5]) \rangle \}, \end{aligned}$$

则 $D_H(\tilde{A}, \tilde{C}) = 0.075, D_H(\tilde{B}, \tilde{C}) = 0.075$, 且 $D_E(\tilde{A}, \tilde{C}) = 0.1, D_E(\tilde{B}, \tilde{C}) = 0.1$ 。

以上结果表明, 利用传统的海明距离和欧式距离计算出来的结果相等, 无法判断区间直觉犹

豫模糊集 \tilde{C} 是属于模式 \tilde{A} 还是模式 \tilde{B} , 因此, 可以说传统距离测度在计算过程中存在很大的局限性, 需要进一步考虑有关区间直觉犹豫模糊集的距离测度。

3 区间直觉犹豫模糊集的距离测度和熵测度

本节主要结合犹豫度偏差定义了新的距离测度公式, 然后分析了区间直觉犹豫模糊熵的构造方式。

3.1 犹豫度偏差

在区间直觉犹豫模糊集(IVIHF)中, 犹豫度起着关键作用, 它代表了决策者犹豫程度的差异。直觉犹豫模糊集的犹豫度已经得到了很好的描述和研究^[12-13], 文献[12]通过分别定义直觉犹豫模糊元隶属度和非隶属度的犹豫度, 并赋予犹豫度相应的偏好权重; 文献[13]将直觉犹豫模糊元隶属度和非隶属度相结合, 给出了犹豫度偏差的思想, 并赋予权重。两者所定义的直觉犹豫模糊集的距离测度公式具有有效性和实用性。

受上述启发, 下面本文考虑在区间直觉犹豫模糊集的基础上, 给出相应的犹豫度偏差的定义。

设 \tilde{A} 是一个 IVIHFS, 只包含一个 IVIHFE, $\tilde{A} = \{ \langle \tilde{h}_A^1, \tilde{h}_A^2, \tilde{h}_A^3, \dots, \tilde{h}_A^{l_A} \rangle \}$, 其中 l_A 表示 \tilde{A} 的区间直觉模糊数的个数。并且有 $\tilde{h}_A^1 = ([u_A^{1-}, u_A^{1+}], [v_A^{1-}, v_A^{1+}])$, $\tilde{h}_A^2 = ([u_A^{2-}, u_A^{2+}], [v_A^{2-}, v_A^{2+}])$, \dots , $\tilde{h}_A^{l_A} = ([u_A^{l_A-}, u_A^{l_A+}], [v_A^{l_A-}, v_A^{l_A+}])$ 。

根据前面定义4给出的 IVIHFE 的犹豫度概念, 这 l_A 个区间相对应的犹豫度区间 $\pi(\tilde{h}_A^1) = [1 - u_A^{1+} - v_A^{1+}, 1 - u_A^{1-} - v_A^{1-}]$, $\pi(\tilde{h}_A^2) = [1 - u_A^{2+} - v_A^{2+}, 1 - u_A^{2-} - v_A^{2-}]$, \dots , $\pi(\tilde{h}_A^{l_A}) = [1 - u_A^{l_A+} - v_A^{l_A+}, 1 - u_A^{l_A-} - v_A^{l_A-}]$ 。

这里, 我们令 $\bar{\pi}(\tilde{h}_A) = \frac{1}{l_A} (\pi(\tilde{h}_A^1) \oplus \pi(\tilde{h}_A^2) \oplus \dots \oplus \pi(\tilde{h}_A^{l_A}))$, 表示以 l_A 个区间直觉模糊数的犹豫度区间下边界的均值为下边界, 上边界的均值为上边界的一个区间。

$$\bar{\pi}(\tilde{h}_A) = \frac{1}{l_A} (\pi(\tilde{h}_A^1) \oplus \pi(\tilde{h}_A^2) \oplus \dots \oplus \pi(\tilde{h}_A^{l_A})) = \frac{1}{l_A} ([1 - u_A^{1+} - v_A^{1+}, 1 - u_A^{1-} - v_A^{1-}] \oplus [1 - u_A^{2+} - v_A^{2+}, 1 - u_A^{2-} - v_A^{2-}] \oplus \dots \oplus [1 - u_A^{l_A+} - v_A^{l_A+}, 1 - u_A^{l_A-} - v_A^{l_A-}]) = [1 - \bar{u}_A^+ - \bar{v}_A^+, 1 - \bar{u}_A^- - \bar{v}_A^-]。$$

其中 \bar{u}_A^+ , \bar{u}_A^- 分别表示这 l_A 个区间直觉模糊数隶属度区间的上、下边界均值, \bar{v}_A^+ , \bar{v}_A^- 表示这 l_A 个非隶属度区间的上、下边界均值, 且 $\bar{u}_A^- \leq \bar{u}_A^+$, $\bar{v}_A^- \leq \bar{v}_A^+$ 。

考虑到每个犹豫区间与由其上下边界的平均值组成的犹豫区间之间的差异, 给出如下定义。

定义9 设 \tilde{A} 是一个区间直觉犹豫模糊集, $\tilde{A} \in \text{IVIHF}(X)$ 。则区间直觉犹豫模糊元 $\tilde{A}(x_i)$ 的犹豫度偏差定义为:

$$U_{\tilde{A}}(x_i) = \frac{1}{2l_A} \sum_{j=1}^{l_A} (|u_A^{j+}(x_i) - \bar{u}_A^+(x_i)| + |u_A^{j-}(x_i) - \bar{u}_A^-(x_i)| + |v_A^{j+}(x_i) - \bar{v}_A^+(x_i)| + |v_A^{j-}(x_i) - \bar{v}_A^-(x_i)|)。 \quad (5)$$

由以上定义可以知道, $U_{\tilde{A}}(x_i)$ 表示的是决策者对给出 $\tilde{A}(x_i)$ 中所有的区间隶属度和区间非隶属度的犹豫程度。当 $U_{\tilde{A}}(x_i)$ 趋近于0时, 说明各个区间直觉模糊数的一致性程度较高, 决策者的犹豫程度较低, 决策信息的稳定性较高; 当 $U_{\tilde{A}}(x_i)$ 趋近于1时, 说明各个区间直觉模糊数的一致性程度较低, 决策者的犹豫程度较高, 决策信息不稳定。

3.2 犹豫度偏差差异

定义10 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \text{IVIHF}(X)$, 对任意的 $x_i \in X$, 关于 \tilde{A} 和 \tilde{B} 之间的犹豫度偏差差异定义为:

$$U_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}(x_i) = |U_{\tilde{A}}(x_i) - U_{\tilde{B}}(x_i)|, \quad (6)$$

$U_{\tilde{A}}(x_i)$ 和 $U_{\tilde{B}}(x_i)$ 分别表示决策者对于 $\tilde{A}(x_i), \tilde{B}(x_i)$ 的犹豫度偏差。当 $U_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}(x_i)$ 趋近于0时, 这表明

决策者对 $\tilde{A}(x_i)$ 和 $\tilde{B}(x_i)$ 的犹豫程度是接近的。

例2 根据例1,利用定义10中所定义的公式计算得到, $U_C^{\tilde{A}}(x) = 0.05, U_C^{\tilde{B}}(x) = 0$ 。说明 \tilde{C} 与 \tilde{A} 的犹豫度偏差差异是0.05,大于 \tilde{C} 与 \tilde{B} 的犹豫度偏差差异0。并且通过观察 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 的区间直觉模糊数的构造,也是可以得到相应的结论,直觉上判断上述所提偏差是有效的。

根据上述犹豫度偏差差异的定义,在区间直觉犹豫模糊条件下,考虑决策者的犹豫偏好,对犹豫度偏差差异赋予权重,给出了一种新的距离测度公式。

3.3 基于犹豫度偏差差异的距离测度公式

定义11 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in IVIHFS(X)$, 且 $\tilde{A} = \{ \langle x, \tilde{h}_{\tilde{A}}(x) \rangle | x \in X \}, \tilde{B} = \{ \langle x, \tilde{h}_{\tilde{B}}(x) \rangle | x \in X \}$ 。则 \tilde{A}, \tilde{B} 之间新的基于犹豫度偏差差异的混合广义距离定义为:

$$D_{HG}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((1-a) \left(\frac{1}{4l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (| (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ |^\lambda + | (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- |^\lambda + \right. \right. \right. \right. \right. \left. \left. \left. \left. | (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ |^\lambda + | (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- |^\lambda \right) + \alpha (U_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}(x_i))^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (7)$$

这里 $\lambda > 0$ 。当 $\lambda = 1, 2$ 时,混合广义距离成为混合海明距离和混合欧式距离,分别记为 $D_{HH}(\tilde{A}, \tilde{B})$ 和 $D_{HE}(\tilde{A}, \tilde{B})$ 。

这里,要求参数 $a \in (0, 1)$ 。否则,当参数 $a = 0$ 时,犹豫度偏差差异就被忽视了;当参数 $a = 1$ 时,不符合本文所讨论问题的实际情况。对于参数 a 的分析,本文将在第4节进行。

定理1 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in IVIHFS(X)$, 下面证明新的混合距离测度公式满足定义5中的四条性质。

证明 以 $D_{HH}(\tilde{A}, \tilde{B})$ 为例,只证明性质(1)和(4),其余可类似证明。

(1) 因为

$$\begin{aligned} -1 &\leq (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ \leq 1, & -1 &\leq (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- \leq 1, \\ -1 &\leq (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ \leq 1, & -1 &\leq (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- \leq 1, \end{aligned}$$

那么其绝对值

$$\begin{aligned} 0 &\leq | (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ | \leq 1, & 0 &\leq | (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- | \leq 1, \\ 0 &\leq | (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ | \leq 1, & 0 &\leq | (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- | \leq 1, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (| (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ | + | (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- | + \\ &| (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ | + | (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- |) \leq 1; \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} 0 &\leq |u_{\tilde{A}}^j+(x_i) - \bar{u}_{\tilde{A}}^+(x_i)| \leq \frac{1}{2}, & 0 &\leq |u_{\tilde{A}}^j-(x_i) - \bar{u}_{\tilde{A}}^-(x_i)| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq |v_{\tilde{A}}^j+(x_i) - \bar{v}_{\tilde{A}}^+(x_i)| \leq \frac{1}{2}, & 0 &\leq |v_{\tilde{A}}^j-(x_i) - \bar{v}_{\tilde{A}}^-(x_i)| \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

可得 $0 \leq \frac{1}{2l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (|u_{\tilde{A}}^j+(x_i) - \bar{u}_{\tilde{A}}^+(x_i)| + |v_{\tilde{A}}^j+(x_i) - \bar{v}_{\tilde{A}}^+(x_i)| + |u_{\tilde{A}}^j-(x_i) - \bar{u}_{\tilde{A}}^-(x_i)| + |v_{\tilde{A}}^j-(x_i) - \bar{v}_{\tilde{A}}^-(x_i)|) \leq$

1,即 $0 \leq U_{\tilde{A}}(x_i) \leq 1$,同理可证 $0 \leq U_{\tilde{B}}(x_i) \leq 1$,则 $0 \leq U_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}(x_i) = |U_{\tilde{A}}(x_i) - U_{\tilde{B}}(x_i)| \leq 1$ 。所以

$$\begin{aligned} 0 &\leq D_{HH}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(1-a) \left(\frac{1}{4l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (| (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ | + | (u_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- | + \right. \right. \\ &| (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^+ | + | (v_{\tilde{A}}^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_{\tilde{B}}^{\sigma(j)}(x_i))^- |) + a U_{\tilde{B}}^{\tilde{A}}(x_i)] \leq 1. \end{aligned}$$

得证。

(4) 若 $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C}, \tilde{C} \in IVIHFS(X)$, 有

$$(u_A^{\sigma(j)}(x_i))^- \leq (u_B^{\sigma(j)}(x_i))^- \leq (u_C^{\sigma(j)}(x_i))^- , (u_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ \leq (u_B^{\sigma(j)}(x_i))^+ \leq (u_C^{\sigma(j)}(x_i))^+ ,$$

$$(v_A^{\sigma(j)}(x_i))^- \geq (v_B^{\sigma(j)}(x_i))^- \geq (v_C^{\sigma(j)}(x_i))^- , (v_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ \geq (v_B^{\sigma(j)}(x_i))^+ \geq (v_C^{\sigma(j)}(x_i))^+ ,$$

那么

$$|(u_A^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_B^{\sigma(j)}(x_i))^-| \leq |(u_A^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_C^{\sigma(j)}(x_i))^-| ,$$

$$|(u_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_B^{\sigma(j)}(x_i))^+| \leq |(u_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_C^{\sigma(j)}(x_i))^+| ,$$

$$|(v_A^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_B^{\sigma(j)}(x_i))^-| \leq |(v_A^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_C^{\sigma(j)}(x_i))^-| ,$$

$$|(v_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_B^{\sigma(j)}(x_i))^+| \leq |(v_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_C^{\sigma(j)}(x_i))^+| ,$$

且通过观察算式可以得到 $U_B^{\tilde{A}}(x_i) \leq U_C^{\tilde{A}}(x_i)$, 从而 $D_{HH}(\tilde{A}, \tilde{C}) \geq D_{HH}(\tilde{A}, \tilde{B})$, 同理可得 $D_{HH}(\tilde{A}, \tilde{C}) \geq D_{HH}(\tilde{B}, \tilde{C})$.

以上证明说明了本文所提出的混合距离测度公式是有效的。下面考虑不同属性之间权重的差异, 将属性权重纳入考虑范围, 得到 \tilde{A} 和 \tilde{B} 的加权混合广义距离测度公式:

$$D_{HGw}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \left((1-a) \left(\frac{1}{4l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} (|(u_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (u_B^{\sigma(j)}(x_i))^+|^{\lambda} + |(u_A^{\sigma(j)}(x_i))^- - (u_B^{\sigma(j)}(x_i))^-|^{\lambda} + |(v_A^{\sigma(j)}(x_i))^+ - (v_B^{\sigma(j)}(x_i))^+|^{\lambda} + |(v_A^{\sigma(j)}(x_i))^- - (v_B^{\sigma(j)}(x_i))^-|^{\lambda}) + a(U_B^{\tilde{A}}(x_i))^{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} , \quad (8)$$

这里 $\lambda > 0$ 。当 $\lambda = 1, 2$ 时, 加权混合广义距离成为加权混合海明距离和加权混合欧式距离, 分别记为 $D_{HHw}(\tilde{A}, \tilde{B})$ 和 $D_{HEw}(\tilde{A}, \tilde{B})$ 。

例 3 由例 1 例 2 的计算结果, 可以得到 $D_H(\tilde{A}, \tilde{C}) = 0.075, D_H(\tilde{B}, \tilde{C}) = 0.075, U_C^{\tilde{A}}(x) = 0.05, U_C^{\tilde{B}}(x) = 0$ 。考虑基于犹豫度偏差差异的混合海明距离公式, 并且令 $a = 0.5$, 计算得到 $D_{HH}(\tilde{A}, \tilde{C}) = 0.0625, D_{HH}(\tilde{B}, \tilde{C}) = 0.0375$ 。由此可以判断模式 \tilde{C} 是属于模式 \tilde{B} 的, 这与直观判断上是一致的。

由以上计算结果发现, 该距离测度保留了传统 IVIHFS 距离测度的特点, 充分考虑了不同程度的犹豫对 IVIHFS 的影响。新的混合测距公式计算结果更加准确, 解决了传统测距计算过程中存在的问题。

3.4 区间直觉犹豫模糊熵

下面给出区间直觉犹豫模糊集直觉因子和模糊因子的定义。

定义 12 设 $\tilde{A} \in IVIHFS(X)$, 对于任意的 $x \in X, \tilde{A}$ 的模糊因子定义如下:

$$S_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{l_{\tilde{A}}} \sum_{j=1}^{l_{\tilde{A}}} \left(\frac{|(u_{\tilde{A}}(x))^- - (v_{\tilde{A}}(x))^-|}{2} + \frac{|(u_{\tilde{A}}(x))^+ - (v_{\tilde{A}}(x))^+|}{2} \right) , \quad (9)$$

\tilde{A} 的直觉因子定义如下:

$$H_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{l_{\tilde{A}}} \sum_{j=1}^{l_{\tilde{A}}} \left(\frac{1 - (u_{\tilde{A}}(x))^- - (v_{\tilde{A}}(x))^-}{2} + \frac{1 - (u_{\tilde{A}}(x))^+ - (v_{\tilde{A}}(x))^+}{2} \right) , \quad (10)$$

这样定义得到的 $0 \leq S_{\tilde{A}}(x) \leq 1, 0 \leq H_{\tilde{A}}(x) \leq 1$, 且 $0 \leq S_{\tilde{A}}(x) + H_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ 。

下面基于香农熵, 给出 \tilde{A} 的模糊熵的概念。香农熵的定义如下:

$$G(x) = -[x \log_2 x + (1-x) \log_2 (1-x)], x \in [0, 1] . \quad (11)$$

定义 13 设 $\tilde{A} \in IVIHFS(X)$, 定义:

$$E(\tilde{A}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(G\left(\frac{1 + S_{\tilde{A}}(x_i)}{2}\right) + G\left(\frac{H_{\tilde{A}}(x_i)}{2}\right) \right) , \quad (12)$$

那么称 $E(\tilde{A})$ 是 \tilde{A} 区间直觉犹豫模糊熵。

定义 14 设 $\tilde{A} \in IVIHFS(X)$, 映射 $E: IVIHFS(X) \rightarrow [0, 1]$, 若 $E(\tilde{A})$ 是一个区间直觉犹豫模糊熵, 则 $E(\tilde{A})$ 满足如下准则:

- (1) $E(\tilde{A})=0$ 当且仅当 $\forall x \in X, h_{\tilde{A}}(x)=\{\langle x, [1, 1], [0, 0] \rangle\}$ 或 $h_{\tilde{A}}(x)=\{\langle x, [0, 0], [1, 1] \rangle\}$;
 (2) $E(\tilde{A})=1$ 当且仅当 $\forall x \in X, h_{\tilde{A}}(x)=\{\langle x, [0, 0], [0, 0] \rangle\}$;
 (3) $E(\tilde{A})=E(\tilde{A}^c)$;
 (4) $E(\tilde{A})$ 随 $S_{\tilde{A}}(x)$ 的增大而减小, 随着 $H_{\tilde{A}}(x)$ 的增大而增大。

定理2 设 $\tilde{A} \in \text{IVIHF}(X)$, 那么定义13中的 $E(\tilde{A})=F(S_{\tilde{A}}, H_{\tilde{A}})$ 是一个区间直觉犹豫模糊熵。

证明 这里只证明定义14中的(1)和(4), 其余可类似证明。

(1) 对于 $G(x)$ 求导数, 得到 $G'(x)=-\log_2 \frac{x}{1-x}, x \in [0, 1]$, 那么在 $x \in [0, 0.5]$ 时, $G(x)$ 是单调递增的; 在 $x \in [0.5, 1]$ 时, $G(x)$ 是单调递减的。

又由于 $G(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 那么存在最大值和最小值, 所以 $\max \{G(x)\}=G(0.5)=1$, $\min \{G(x)\}=G(0)=G(1)=0$ 。 $\forall x \in X, 0 \leq S_{\tilde{A}}(x) \leq 1, 0 \leq H_{\tilde{A}}(x) \leq 1$, 那么 $0.5 \leq \frac{1+S_{\tilde{A}}(x_i)}{2} \leq 1, 0 \leq \frac{H_{\tilde{A}}(x_i)}{2} \leq 0.5$ 。

对于 $E(\tilde{A})=\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(G\left(\frac{1+S_{\tilde{A}}(x_i)}{2}\right) + G\left(\frac{H_{\tilde{A}}(x_i)}{2}\right) \right)$, 当 $E(\tilde{A})=0$ 时, 有 $\left(G\left(\frac{1+S_{\tilde{A}}(x_i)}{2}\right) \right)=0$, $\sum_{i=1}^n \left(G\left(\frac{H_{\tilde{A}}(x_i)}{2}\right) \right)=0$, 那么 $\frac{1+S_{\tilde{A}}(x_i)}{2}=1, \frac{H_{\tilde{A}}(x_i)}{2}=0$, 所以 $S_{\tilde{A}}(x_i)=1, H_{\tilde{A}}(x_i)=0$, 得到 $h_{\tilde{A}}(x)=\{\langle x, [1, 1], [0, 0] \rangle\}$ 或者 $h_{\tilde{A}}(x)=\{\langle x, [0, 0], [1, 1] \rangle\}$ 。

(4) 令

$$F(x, y) = -\left[\frac{x+1}{2} \log_2 \frac{x+1}{2} + \left(1 - \frac{x+1}{2}\right) \log_2 \left(1 - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{y}{2} \log_2 \frac{y}{2} + \left(1 - \frac{y}{2}\right) \log_2 \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right],$$

分别对 $F(x, y)$ 中的 x, y 求偏导数 $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$, 得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1+x}{1-x} \leq 0; \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{y}{2-y} \geq 0; \end{cases}$$

因此 $F(x, y)$ 随 x 的增大而减小, 随着 y 的增大而增大, 即 $E(\tilde{A})$ 随 $S_{\tilde{A}}(x)$ 的增大而减小, 随着 $H_{\tilde{A}}(x)$ 的增大而增大, 得证。 $E(\tilde{A})$ 即为所求的区间直觉犹豫模糊熵。

4 实验分析

本节根据给出的熵和距离测度公式, 针对属性权重完全未知的区间直觉犹豫模糊环境, 利用 TOPSIS 方法结合具体案例, 讨论了一种基于新型熵和距离测度的多属性决策方法, 并对相应的参数进行了敏感性分析, 最后通过仿真实验进一步说明了所提距离测度公式的有效性和稳定性。

4.1 决策步骤

$\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m\}$ 表示 m 个备选方案, $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 表示 n 个属性值。并且其中的方案 \tilde{A}_i 可以表示为 $\tilde{A}_i = \{\langle x_j, \tilde{h}_{\tilde{A}_i}(x_j) \rangle \mid x_j \in B\}, i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 。 $\tilde{h}_{\tilde{A}_i}(x_j)$ 表示第 i 个方案在第 j 个属性条件下的所有的决策值, 也可以表示为 \tilde{h}_{ij} , 所有的决策值都是用若干个区间直觉模糊数表示。 $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$ 表示属性权重, 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 。具体步骤如下:

Step 1 决策者对方案所有属性值进行评估, 给出评价信息, 评价信息用 IVIHFEs 表示, 构建

IVIHFS的决策信息矩阵 $H = (\tilde{h}_{ij})_{m \times n}$ 。

设 M_1 为效益型属性, M_2 为成本型属性, 对成本型指标进行如下操作将其转化为效益型。

$$\tilde{h}_{ij} = \langle x, ([u_{ij}^-, u_{ij}^+], [v_{ij}^-, v_{ij}^+]) \rangle = \begin{cases} \langle x, ([u_{ij}^-, u_{ij}^+], [v_{ij}^-, v_{ij}^+]) \rangle, \tilde{h}_{ij} \in M_1 \\ \langle x, ([v_{ij}^-, v_{ij}^+], [u_{ij}^-, u_{ij}^+]) \rangle, \tilde{h}_{ij} \in M_2 \end{cases} \quad (13)$$

若单个属性下的所有 IVIHFEs 中区间直觉模糊数基数不等, 按照式(4)对基数较小的 IVIHFEs 进行扩充, 这里假设决策者的风险偏好是乐观的, 取 $\alpha = 1$; 然后按照式(3)对所有 IVIHFEs 中区间直觉模糊数从大到小进行排序, 最后得到标准化的决策信息矩阵 $\tilde{H} = (\tilde{h}_{ij})_{m \times n}$ 。

Step 2 给出每个方案下属性的 IVIHFE 相对应的正理想元 $\tilde{h}_j^+ = \langle ([1, 1], [0, 0]) \rangle$ 和其对应的负理想元 $\tilde{h}_j^- = \langle ([0, 0], [1, 1]) \rangle$, 其中 $([1, 1], [0, 0])$ 和 $([0, 0], [1, 1])$ 各有若干个, 与其对应的 IVIHFE 的区间直觉模糊数个数相同。

Step 3 在已提出的区间直觉犹豫模糊熵的基础上, 利用熵权法计算属性权重。

$$E(B_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(B_{ij}), \omega_j = \frac{1 - E(B_j)}{n - \sum_{k=1}^n E(B_k)}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Step 4 根据新的加权混合海明距离测度公式, 分别计算方案属性值的评价指标与其正负理想元的距离, 最后在已知属性权重基础上计算方案与正负理想解的加权距离。令

$$D_{HHtw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}_j^+) = \sum_{j=1}^n D_{HH}(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_j^+) \omega_j, D_{HHtw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}_j^-) = \sum_{j=1}^n D_{HH}(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_j^-) \omega_j. \quad (15)$$

Step 5 根据 TOPSIS 方法计算每个方案的相对贴近度 $R(\tilde{A}_i)$, 其中

$$R(\tilde{A}_i) = \frac{D_{HHtw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}_j^-)}{D_{HHtw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}_j^+) + D_{HHtw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}_j^-)}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Step 6 根据相对贴近度的大小对所有方案进行排序, $R(\tilde{A}_i)$ 值越大, 方案的效果越好。

事实上, 根据上节 3.1 所定义的偏差, 可以发现由若干个 $([1, 1], [0, 0])$ 组成的正理想元的犹豫度偏差都是 0, 并且由若干个 $([0, 0], [1, 1])$ 所组成的负理想元犹豫度偏差也是 0。这样, 按照上述加权距离测度公式进行计算, 只需要分析各个方案所有属性下各自的犹豫度偏差。

4.2 算例分析

某风投公司要对一个项目进行投资, 现在有四个方案 $(\tilde{A}_i, i = 1, 2, 3, 4)$ 可供选择, 公司综合考虑了项目远期利益的实现, 邀请相关领域专家对四个属性指标进行了评价, 分别是风险性 (B_1) 、保证性 (B_2) 、成长性 (B_3) 、可操作性 (B_4) , 均为效益性指标, 属性指标的权重未知, 请选出最佳的投资方案^[26]。

步骤 1 根据专家给出的各个方案所有属性的决策值, 整理得到标准决策信息矩阵 $\tilde{H} = (\tilde{h}_{ij})_{m \times n}$ (表 1)。

步骤 2 根据熵的构造公式(12)计算得到 $E(B_1) = 0.8207$, $E(B_2) = 0.7942$, $E(B_3) = 0.7928$, $E(B_4) = 0.7915$ 。根据熵权法公式(14)计算得到属性权重 $\omega_1 = 0.2239$, $\omega_2 = 0.2570$, $\omega_3 = 0.2587$, $\omega_4 = 0.2604$ 。

$$(E(B_{ij}))_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0.7904 & 0.7904 & 0.8145 & 0.8370 \\ 0.8574 & 0.8181 & 0.8399 & 0.7904 \\ 0.8574 & 0.7904 & 0.7264 & 0.7904 \\ 0.7777 & 0.7777 & 0.7904 & 0.7481 \end{pmatrix}.$$

步骤 3 基于加权混合的 IVIHFS 距离测度, 这里取 $\alpha = 0.5$, $\lambda = 1$, 在属性权重已知情况下, 根据公式(15)计算出方案与正理想解的加权距离 $D_{HHtw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}_j^+)$ 和方案与负理想解的加权距离 $D_{HHtw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}_j^-)$, 然后根据公式(16)计算方案的相对贴近度, 结果如表 1 和表 2 所示。

表1 专家评估信息表

Table 1 Evaluation information from experts

方案	B_1	B_2	B_3	B_4
\tilde{A}_1	$\langle([0.4, 0.6], [0.1, 0.3]), ([0.3, 0.5], [0.2, 0.4])\rangle$	$\langle([0.2, 0.4], [0.3, 0.5]), ([0.1, 0.3], [0.4, 0.6])\rangle$	$\langle([0.2, 0.4], [0.1, 0.3]), ([0.3, 0.4], [0.4, 0.6])\rangle$	$\langle([0.1, 0.3], [0.2, 0.4]), ([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])\rangle$
\tilde{A}_2	$\langle([0.2, 0.4], [0.3, 0.5]), ([0.1, 0.3], [0.2, 0.4])\rangle$	$\langle([0.2, 0.4], [0.1, 0.3]), ([0.3, 0.5], [0.4, 0.5])\rangle$	$\langle([0.2, 0.3], [0.2, 0.4]), ([0.2, 0.4], [0.3, 0.5])\rangle$	$\langle([0.3, 0.5], [0.2, 0.4]), ([0.1, 0.3], [0.4, 0.6])\rangle$
\tilde{A}_3	$\langle([0.3, 0.5], [0.2, 0.4]), ([0.1, 0.3], [0.2, 0.4])\rangle$	$\langle([0.4, 0.6], [0.1, 0.3]), ([0.2, 0.4], [0.3, 0.5])\rangle$	$\langle([0.5, 0.6], [0.3, 0.4]), ([0.2, 0.4], [0.3, 0.5])\rangle$	$\langle([0.2, 0.4], [0.3, 0.5]), ([0.1, 0.3], [0.4, 0.6])\rangle$
\tilde{A}_4	$\langle([0.4, 0.6], [0.2, 0.3]), ([0.3, 0.5], [0.2, 0.4])\rangle$	$\langle([0.4, 0.6], [0.2, 0.4]), ([0.3, 0.5], [0.2, 0.3])\rangle$	$\langle([0.3, 0.5], [0.2, 0.4]), ([0.1, 0.3], [0.4, 0.6])\rangle$	$\langle([0.4, 0.6], [0.3, 0.4]), ([0.2, 0.4], [0.3, 0.5])\rangle$

表2 方案 \tilde{A}_i 与正负理想方案距离Table 2 Distances of scheme \tilde{A}_i between positive and negative ideal schemes

方案	$D_{HHw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}^+)$	$D_{HHw}(\tilde{A}_i, \tilde{h}^-)$	相对贴适度 $R(\tilde{A}_i)$
\tilde{A}_1	0.327 6	0.298 3	0.476 6
\tilde{A}_2	0.334 8	0.304 1	0.476 0
\tilde{A}_3	0.322 7	0.316 0	0.494 8
\tilde{A}_4	0.295 6	0.326 4	0.524 8

步骤4 按照相对贴适度指标大小进行排序, $R(\tilde{A}_4) > R(\tilde{A}_3) > R(\tilde{A}_1) > R(\tilde{A}_2)$, 即 $\tilde{A}_4 > \tilde{A}_3 > \tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$, 因此, \tilde{A}_4 为最佳的投资方案。这与文献[26-27]最优方案一致。

分别按照文献[6]、[14]中的距离测度公式进行计算, 与本文距离测度进行比较, 结果如表3所示。

表3 三种测度计算结果比较

Table 3 Comparison of the calculation results among three measures

来源	$R(\tilde{A}_1)$	$R(\tilde{A}_2)$	$R(\tilde{A}_3)$	$R(\tilde{A}_4)$	方案排序
文献[6]	0.470 7	0.471 1	0.493 3	0.532 4	$\tilde{A}_4 > \tilde{A}_3 > \tilde{A}_2 > \tilde{A}_1$
文献[14]	0.477 7	0.477 2	0.494 8	0.525 5	$\tilde{A}_4 > \tilde{A}_3 > \tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$
本文方法	0.476 6	0.476 0	0.494 8	0.524 8	$\tilde{A}_4 > \tilde{A}_3 > \tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$

这与本文所提出的方法得到的结果一致, \tilde{A}_4 都为最佳的投资方案。并且, 由于本文所提出的方法给予了决策者犹豫程度以相应的偏好权重 a , 更加具有灵活性和实用性, 并通过例1—3的分析验证了所提距离测度公式的有效性, 原则上认为新的决策方法得到的数据结果更具有参考价值。

4.3 敏感性分析

本文提出的混合距离测度公式中存在不确定参数 a 和 λ , 因此有必要对这两个参数的敏感度进行分析, 以验证其稳定性。令 $\lambda = 1$, 通过对 a 取不同的值, 令 $a = 0.1$ 以步长 0.1 增加到 0.9, 然后重新计算每个 a 值下各个方案的相对贴适度, 并进行排序; 同时令 $a = 0.5$, 对 λ 取不同的值, 令 $\lambda = 1$ 以步长 1 增加到 9, 重新计算相对贴适度并排序, 将最终得到的结果在图1—图2中表示。

可以看到, 在 λ 保持不变时, 令 $a = 0.1$, 即犹豫度偏差差异所占权重比较小的时候, 新的距离测度下的方案排序结果与[6]中传统距离一致; 而随着 a 的增大, 方案排序结果都为 $\tilde{A}_4 > \tilde{A}_3 > \tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$, 与文献[14]结果相同。这里, 犹豫度偏差差异的权重大小对实验结果起了比较大的影响, 一般计算过程中, 可令 $a = 0.5$ 。

保持 a 不变, 在 λ 值比较大时, 方案 \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 的排序发生了变化, 此时 $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$ 变为 $\tilde{A}_2 > \tilde{A}_1$ 。然

而不管参数 a 和 λ 如何变化,最优方案未改变过,都是 \tilde{A}_4 。因此,可以说方案排序结果对参数 a 和 λ 的变化并不敏感。

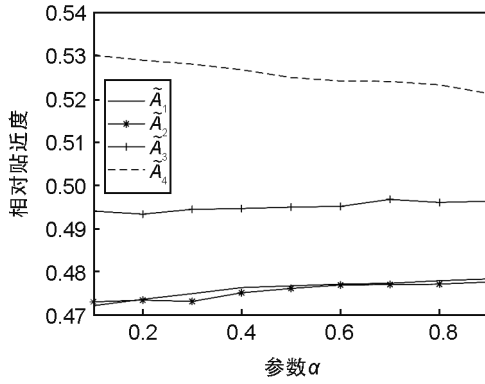


图1 相对贴近度随参数a的变化曲线

Fig. 1 Variation curve of relative closeness with parameter a

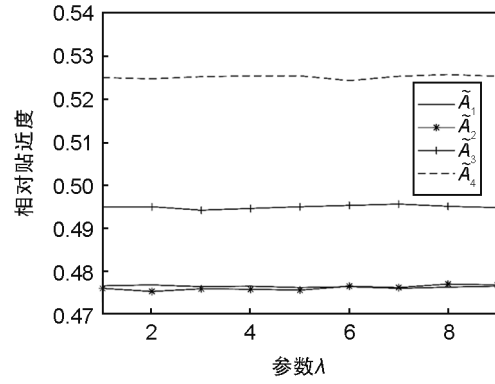


图2 相对贴近度随参数lambda的变化曲线

Fig. 2 Variation curve of relative closeness with parameter lambda

4.4 仿真实验

为了进一步说明所提距离测度具有更好的区分度,将其与传统距离测度进行对比。首先,利用 Matlab R2021a生成50组仿真数据,一共生成5次,每次生成10组,每组仿真数据包含10个备选方案和10种属性值。利用所提距离测度($a=0.5, \lambda=2$)与传统距离测度分别结合TOPSIS方法进行实验,实验结果按照相对贴近度大小进行排序。两种测度每次得出相同最优方案的组数如图3所示。

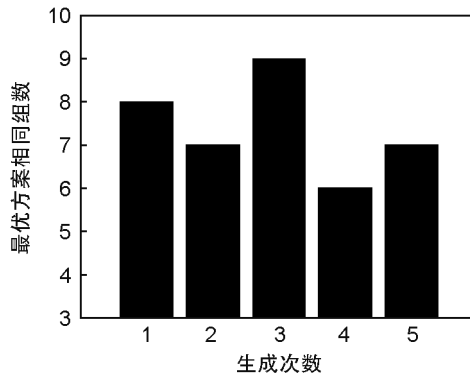


图3 两种测度下每次实验最优方案相同组数

Fig. 3 The same number of optimal schemes for each experiment under two measures

从图3可以看到两种不同距离测度在5次生成的结果中,最多有9组最优方案相同,最少有6组最优方案相同,并且在最优方案不同的结果中方案排序前列的具有很高的相似性。并结合上述实例和参数敏感性分析,验证了所提距离测度具有更高的区分度和有效性。

5 结论

本文考虑了区间直觉犹豫模糊环境下的距离测度,针对传统距离测度存在的模式无法识别的问题,赋予决策者决策过程中犹豫偏好相应的权重,提出了新的距离测度公式,与传统距离测度相比具有更高的区分度。定义了区间直觉犹豫模糊熵,用以计算属性权重。然后在属性权重已知情况下给出了相应的加权的距离测度公式。最后利用TOPSIS方法考虑新的熵与距离测度下的多属性决策问题,实验验证了本文所提方法的有效性与实用性。后续可以讨论有关图犹豫模糊集的距离测度和模糊熵等,以及其对应的区间上的形式。

参考文献:

- [1] ZADEH L A. Fuzzy Sets[J]. *Inf Control*, 1965, **8**(3): 338–353. DOI: 10.1016/s0019-9958(65)90241-x.
- [2] ATANASSOV K T. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 1986, **20**(1): 87–96. DOI: 10.1016/s0165-0114(86)80034-3.
- [3] ATANASSOV K, GARGOV G. Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 1989, **31**(3): 343–349. DOI: 10.1016/0165-0114(89)90205-4.
- [4] TORRA V. Hesitant Fuzzy Sets[J]. *Int J Intell Syst*, 2010, **25**(6): 529–539. DOI: 10.1002/int.20418.
- [5] ZHANG Z M. Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Aggregation Operators and Their Application in Group Decision-making[J]. *J Appl Math*, 2013, **2013**: 1–33. DOI: 10.1155/2013/670285.
- [6] WEI Y R, GAO L Q, WANG C, *et al.* Distance Measures for Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets[M]// *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer International Publishing, 2015: 43–49. DOI: 10.1007/978-3-319-19105-8_4.
- [7] JOSHI D, KUMAR S. Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Choquet Integral Based TOPSIS Method for Multi-criteria Group Decision Making[J]. *Eur J Oper Res*, 2016, **248**(1): 183–191. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.06.047.
- [8] ZHANG L F, TANG J, MENG F Y. An Approach to Decision Making with Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Information Based on the 2-additive Shapley Function[J]. *Informatica*, 2018, **29**(1): 157–185. DOI: 10.15388/Informatica.2018.162.
- [9] NARAYANAMOORTHY S, GEETHA S, RAKKIYAPPAN R, *et al.* Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Entropy Based VIKOR Method for Industrial Robots Selection[J]. *Expert Syst Appl Int J*, 2019, **121**(C): 28–37. DOI: 10.1016/j.eswa.2018.12.015.
- [10] WANG C B, ZHOU H X, DINÇER H, *et al.* Analysis of Electricity Pricing in Emerging Economies with Hybrid Multi-criteria Decision-making Technique Based on Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets[J]. *IEEE Access*, 2020, **8**: 190882–190896. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3031761.
- [11] HWANG C L, YOON K. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications: A State-of-the-art Survey[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981. DOI:10.1007/978-3-642-48318-9.
- [12] 谭春桥, 支帅. 基于直觉犹豫模糊集的TOPSIS法[J]. *运筹与管理*, 2018, **27**(3): 66–73. DOI: 10.12005/orms.2018.0061.
- TAN C Q, ZHI S. TOPSIS Method with Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets[J]. *Oper Res Manag Sci*, 2018, **27**(3): 66–73. DOI: 10.12005/orms.2018.0061.
- [13] 王拥兵, 左照鑫, 张丽霞. 直觉犹豫模糊集距离测度及其应用[J]. *郑州大学学报(理学版)*, 2022, **54**(4): 20–26. DOI: 10.13705/j.issn.1671-6841.2021308.
- WANG Y B, ZUO Z X, ZHANG L X. Intuitionistic Hesitant Fuzzy Set Distance Measure and Its Application[J]. *J Zhengzhou Univ Nat Sci Ed*, 2022, **54**(4): 20–26. DOI: 10.13705/j.issn.1671-6841.2021308.
- [14] 吴文学, 谭佳德. 区间直觉犹豫模糊集的两种相似测度及其在模式识别中的应用[J]. *数学的实践与认识*, 2022, **52**(5): 74–83.
- WU W X, TAN J D. The Two Similarity Measures of Interval Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets and Its Application in Pattern Recognition[J]. *Math Pract Theory*, 2022, **52**(5): 74–83.
- [15] PENG J J, WANG J Q, WU X H, *et al.* The Fuzzy Cross-entropy for Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets and Their Application in Multi-criteria Decision-making[J]. *Int J Syst Sci*, 2015, **46**(13): 2335–2350. DOI: 10.1080/00207721.2014.993744.
- [16] DEGUI, LIANG D C, XU Z S. The New Extension of TOPSIS Method for Multiple Criteria Decision Making with Hesitant Pythagorean Fuzzy Sets[J]. *Appl Soft Comput*, 2017, **60**: 167–179. DOI: 10.1016/j.asoc.2017.06.034.
- [17] WANG R, LI Y L. Picture Hesitant Fuzzy Set and Its Application to Multiple Criteria Decision-making[J]. *Symmetry*, 2018, **10**(7): 295. DOI: 10.3390/sym10070295.
- [18] KAMACI H, PETCHIMUTHU S, AKÇETIN E. Dynamic Aggregation Operators and Einstein Operations Based on Interval-valued Picture Hesitant Fuzzy Information and Their Applications in Multi-period Decision Making[J]. *Comput Appl Math*, 2021, **40**(4): 1–52. DOI: 10.1007/s40314-021-01510-w.
- [19] MAO J J, ZHAO Y, MA C. A New Type of Compositive Information Entropy for IvIFS and Its Applications [J]. *Math Probl Eng*, 2016, **2016**: 1–13. DOI: 10.1155/2016/7652540.
- [20] LI L M, ZHENG T T, YIN W J, *et al.* Novel Pythagorean Fuzzy Entropy and Pythagorean Fuzzy Cross-entropy Measures and Their Applications [J]. *J Intell Fuzzy Syst*, 2021, **41**(6): 6527–6546. DOI: 10.3233/JIFS-210365.
- [21] 李龙妹, 郑婷婷, 尹文静. 区间毕达哥拉斯犹豫模糊集的不确定性研究[J]. *山西大学学报(自然科学版)*, 2020, **43**(4): 906–913. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2020080.
- LI L M, ZHENG T T, YIN W J. Uncertainty Research in Interval-valued Pythagorean Hesitant Fuzzy Sets[J].

- J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2020, **43**(4): 906–913. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2020080.
- [22] NAYAGAM V L G, JEEVARAJ S, SIVARAMAN G. Total Ordering Defined on the Set of all Intuitionistic Fuzzy Numbers[J]. *J Intell Fuzzy Syst*, 2016, **30**(4): 2015–2028. DOI: 10.3233/IFS-151915.
- [23] WEI A P, LI D F, LIN P P, *et al.* An Information-based Score Function of Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Application in Multiattribute Decision Making[J]. *Soft Comput A Fusion Found Methodol Appl*, 2021, **25**(3): 1913–1923. DOI: 10.1007/s00500-020-05265-0.
- [24] 尹东亮, 崔国恒, 黄晓颖, 等. 基于改进得分函数和前景理论的区间值毕达哥拉斯模糊多属性决策[J]. *系统工程与电子技术*, 2022, **44**(11): 3463–3469. DOI: 10.12305/j.issn.1001-506X.2022.11.21.
- YIN D L, CUI G H, HUANG X Y, *et al.* Interval-valued Pythagorean Fuzzy Multi-attribute Decision-making Based on Improved Score Function and Prospect Theory [J]. *Syst Eng Electron*, 2022, **44**(11): 3463–3469. DOI: 10.12305/j.issn.1001-506X.2022.11.21.
- [25] TIAN X L, NIU M L, ZHANG W K, *et al.* A Novel Todim Based on Prospect Theory to Select Green Supplier with Q-rung Orthopair Fuzzy Set[J]. *Technol Econ Dev Econ*, 2020, **27**(2): 284–310. DOI: 10.3846/tede.2020.12736.
- [26] 周金明. 基于云模型的非确定性数据综合评价问题研究[D]. 杭州: 浙江工商大学, 2018.
- ZHOU J M. Research on the Comprehensive Evaluation Problems with Uncertain Information Based on Cloud Model[D]. Hangzhou: Zhejiang Gongshang University, 2018.
- [27] 罗世华, 方童, 刘俊. 概率区间值直觉犹豫模糊 Maclaurin 对称平均算子及决策方法[J]. *控制与决策*, 2021, **36**(5): 1249–1258. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1370.
- LUO S H, FANG T, LIU J. Probabilistic Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Maclaurin Symmetric Mean Operators and Decision Method[J]. *Control Decis*, 2021, **36**(5): 1249–1258. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1370.