

有色噪声下的Rabi谱展宽现象

安妮¹,张秀荣^{2*},李卫东^{3,4*}

(1.山西大学 理论物理研究所,山西 太原 030006;

2.山西大学 物理电子工程学院,山西 太原 030006;

3.深圳技术大学 工程物理学院,先进材料诊断技术中心,超强激光与先进材料技术深圳重点实验室,广东 深圳 518118;

4.南方科技大学 广东省量子科学技术与工程重点实验室,广东 深圳 518055)

摘要:本文对有色噪声下二能级原子系统Rabi谱的展宽现象进行了研究。通过四阶龙格-库塔方法,针对三种不同时间关联特性的有色噪声,对近共振条件下的Rabi谱进行了数值模拟。研究发现:在近共振条件下,对于给定测量时间,增大噪声幅度会使Rabi谱展宽增强;测量时间越趋近于 π/Ω ,使Rabi谱展宽小于10%的噪声幅度越小,Rabi谱的测量对噪声更敏感;同时,低频噪声下Rabi谱展宽增强。本文的研究基于不同噪声对Rabi谱的影响,有助于提高光钟的测量精度。

关键词:Rabi谱;1/f噪声;白噪声;棕色噪声

中图分类号:O436 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2024)01-0194-05

The Phenomenon of Rabi Spectrum Broadening Caused by the Colored Noise

AN Ni¹, ZHANG Xiurong^{2*}, LI Weidong^{3,4*}

(1. Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

2. School of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

3. Shenzhen Key Laboratory of Ultraintense Laser and Advanced Material Technology, Center for Advanced Material Diagnostic Technology, and College of Engineering Physics, Shenzhen Technology University, Shenzhen 518118, China;

4. Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China)

Abstract: In this paper, the phenomenon of the two-level Rabi spectrum broadening caused by the colored noise is studied. For three kinds of colored noise with three different time-dependent characteristics, the Rabi spectrum under near-resonance conditions is numerically simulated by the fourth-order Runge-Kuta method. It is found that under near-resonance conditions, increasing the noise amplitude increases the Rabi spectrum broadening for a given measurement time. The closer the measurement time is to π/Ω , the smaller the noise amplitude is for the Rabi spectrum broadening of less than 10%. At the same time, the Rabi spectrum broadening is enhanced at low frequencies. The study in this paper has a certain effect on the suppression of the noise of the local oscillator of the optical lattice clock and the improvement of the measurement accuracy of the optical lattice clock.

Key words: Rabi spectrum; 1/f noise; white noise; brown noise

收稿日期:2022-12-20;接受日期:2023-03-10

基金项目:国家自然科学基金(11874247);中国国家重点研究开发计划(2017YFA0304500);广东省重点实验室(2019B121203002);中国量子光学与量子光学器件国家重点实验室计划(KF201703)

作者简介:安妮(1998-),女,山西长治人,硕士,研究方向为冷原子物理。E-mail:2126382085@qq.com

* 通信作者:李卫东(LI Weidong),E-mail:wldi@sxu.edu.cn;张秀荣(ZHANG Xiurong),E-mail:xrzhang@sxu.edu.cn

引文格式:安妮,张秀荣,李卫东.有色噪声下的Rabi谱展宽现象[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(1):194-198.

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023050

0 引言

二能级原子 Rabi 谱在可扩展的量子计算^[1-2]、分布式量子网络^[3-4]以及更一般性的开放式量子系统等量子信息科学领域中起着非常重要的作用^[5]。将激光与二能级原子系统耦合,原子跃迁概率随失谐量变化的图像称为 Rabi 谱。Rabi 谱在光晶格钟中也有重要作用。在光晶格钟的计时过程中,需要实现本地振荡与二能级原子的频率锁定,这一过程是通过基于 Rabi 谱的四点测量法来实现的^[6-8]。

在光晶格钟工作过程中,赫兹量级的窄线宽钟激光和超冷原子发生相互作用,然后通过测量 Rabi 谱得到反馈信号,从而将激光频率锁定到超冷原子的两个超精细能级的跃迁频率上。所以,保证 Rabi 谱的半高宽尽可能窄,有利于提高锁频的准确性^[9-13]。然而,在实际计时过程中,噪声会使 Rabi 谱展宽,从而降低测量精度。所以如何减少 Rabi 谱的展宽,对提高光晶格钟的精度有重要意义,例如,有研究表明延长测量时间可有效抑制 Rabi 谱的展宽^[14]。光晶格钟的 Rabi 谱展宽主要受到两类噪声的影响:一类是包括量子投影噪声和光子散粒噪声等的原子探测噪声;另一类是本地振荡器(Optical Local Oscillator, OLO)振荡频率不稳定引起的噪声,光晶格钟频率的稳定性决定于后者^[15-17]。因此,为了从噪声角度探究如何提高光晶格钟的稳定性,我们研究了 OLO 噪声导致的光晶格钟 Rabi 谱的展宽现象。

本文首先介绍了噪声的分类标准。然后将噪声引入到二能级原子体系的哈密顿量中,利用四阶龙格-库塔方法,数值求解了含时薛定谔方程,并通过选取 1/f 噪声、白噪声和棕色噪声,研究了不同幅度、不同种类的噪声以及不同测量时间对 Rabi 谱展宽的影响。最后我们对全文进行总结。

1 有色噪声

在电子学中,功率谱是指单位频带内的信号功率,表示信号功率随着频率的变化情况,即信号功率在频域的分布状况。一个时域信号 $x(t)$ 的功率谱表达式为 $P(f) = |F(f)|^2$,其中 t

表示时间, P 表示功率, f 表示频率, $F(f)$ 为 $x(t)$ 的频谱,可通过对 $x(t)$ 进行快速傅里叶变换(Fast Fourier transform, FFT)得到。

对于一个噪声信号,如果它的功率谱不为常数,则这种噪声称为有色噪声^[18-19]。一般而言,有色噪声的功率谱可表示为:

$$P(f) \approx \frac{1}{f^\alpha}, \quad (1)$$

其中指数 α 表示噪声种类^[20]。在光钟噪声的幂律谱模型中, $\alpha = 1$ 代表调频闪变噪声或 1/f 噪声(也称为粉红噪声), $\alpha = 0$ 代表调频白噪声, $\alpha = 2$ 代表调频随机游走噪声或棕色噪声^[21]。在时域,白噪声表现得完全没有规律,1/f 噪声和棕色噪声则呈现出较大的波动性;而在频域,由(1)式可以看出,1/f 噪声的功率与频率成反比例关系,棕色噪声的功率与频率平方成反比,白噪声的功率与频率无关。

2 有色噪声下的 Rabi 谱展宽

考虑一个二能级原子体系,原子中两能态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的能量差为 $\hbar\omega_0$ 。使用强度和频率分别为 A 和 ω 的激光照射原子,系统波函数随时间的演化满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_2(t) \\ C_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2(t) \\ C_1(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\Delta = \omega - \omega_0$ 为失谐量,表示原子能级跃迁频率和激光频率的差值; Ω 为 Rabi 振荡频率,与激光强度有关。当系统初态为基态时,求解方程(2)得到系统从基态到激发态的跃迁概率为

$$P_2 = \frac{\Omega^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} t\right)}{\Delta^2 + \Omega^2}, \quad (3)$$

跃迁概率 $P_2(\Delta, t)$ 随失谐量 Δ 变化的图像即为 Rabi 谱。在实际情况下,由于本地振荡器频率的变化,导致其与原子频率的差值(失谐量)为含时噪声。因此,在噪声的影响下,系统随时间演化的含时薛定谔方程应为

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_2(t) \\ C_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta + z(t) & \Omega \\ \Omega & -\Delta - z(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2(t) \\ C_1(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中噪声项 $z(t) = s \cdot x(t)$ 表示含时噪声, s 为噪声幅度, $x(t)$ 为噪声的含时项。方程(4)很难

找到解析解;但是对于给定的参数,可以使用四阶龙格-库塔法得到方程的数值解,从而研究噪声幅度、种类等对系统的影响。在数值计算时,设置相互作用时间 Ωt ,假设初态是基态,噪声项 $z(t)$ 由MATLAB软件的自带函数dsp.ColoredNoise(α, N)模拟产生,其中 α 决定噪声类型, N 为生成的噪声点数。为了研究噪声下Rabi谱的统计特征,本文中对含噪声的Rabi谱进行了30次平均。

首先,我们研究噪声幅度对Rabi谱的影响。为保证在Rabi谱中 $\Delta = 0$ 时 P_2 取得最大值,在下面的计算中,我们选取 $t < \pi/\Omega$ 的三个测量时间分别为 $t_1 = 2/\Omega$ 、 $t_2 = 2.5/\Omega$ 和 $t_3 = 3/\Omega$ 。改变噪声幅度 s ,计算得到不同幅度的1/f噪声、白噪声和棕色噪声下的Rabi谱。对平均后的Rabi谱进行Lorentz拟合^[22],拟合公式为

$$y = y_0 + \frac{2a}{\pi} \frac{w}{4(x - x_c)^2 + w^2}, \quad (5)$$

其中参数 y_0 代表纵向偏移, a 为峰面积, x_c 为峰中心位置, w 为半高宽。我们测量得到不同测量时间以及不同噪声幅度下,1/f噪声、白噪声和棕色噪声下Rabi谱的半高宽(Full width at half maximum, FWHM),见表1—表3。

在上述三个表中,当噪声幅度一定时,测量时间越趋近于 π/Ω ,Rabi谱的半高宽越窄,即测量时间越长,测量的精度越高,与之前研究的结论相同。而对于某种噪声,当测量时间一定时,增大噪声幅度,Rabi谱的展宽会增强。

在表1—表3中,当测量时间分别为 $t_1 =$

表1 不同测量时间,不同幅度1/f噪声下Rabi谱的半高宽(单位 Ω)

Table 1 FWHM values of Rabi spectrum (unit: Ω) for 1/f noises with different amplitudes at different measurement time

1/f噪声幅度(s/Ω)	测量时间($t/(1/\Omega)$)		
	2.0	2.5	3.0
0	2.246	1.717	1.37
0.01	2.267	1.748	1.437
0.015	2.306	1.797	1.477
0.02	2.33	1.877	1.582
0.025	2.424	2.032	1.666
0.03	2.656	2.225	1.812

表2 不同测量时间,不同幅度白噪声下Rabi谱的半高宽(单位 Ω)

Table 2 FWHM values of Rabi spectrum (unit: Ω) for white noises with different amplitudes at different measurement time

白噪声幅度(s/Ω)	测量时间($t/(1/\Omega)$)		
	2.0	2.5	3.0
0	2.246	1.717	1.37
0.4	2.357	1.835	1.492
0.45	2.39	1.845	1.572
0.5	2.399	1.883	1.602
0.55	2.401	1.9	1.638
0.6	2.475	1.939	1.704

$2/\Omega$ 、 $t_2 = 2.5/\Omega$ 和 $t_3 = 3/\Omega$ 时,对Rabi谱的影响可忽略(即使Rabi谱展宽小于10%)的最大1/f噪声幅度分别为0.025、0.02和0.015 Ω ;最大白噪声幅度分别为0.55、0.5和0.4 Ω ;最大棕色噪声幅度分别为0.0006、0.0005和0.0004 Ω 。可见,随着测量时间变长,对Rabi谱的影响可忽

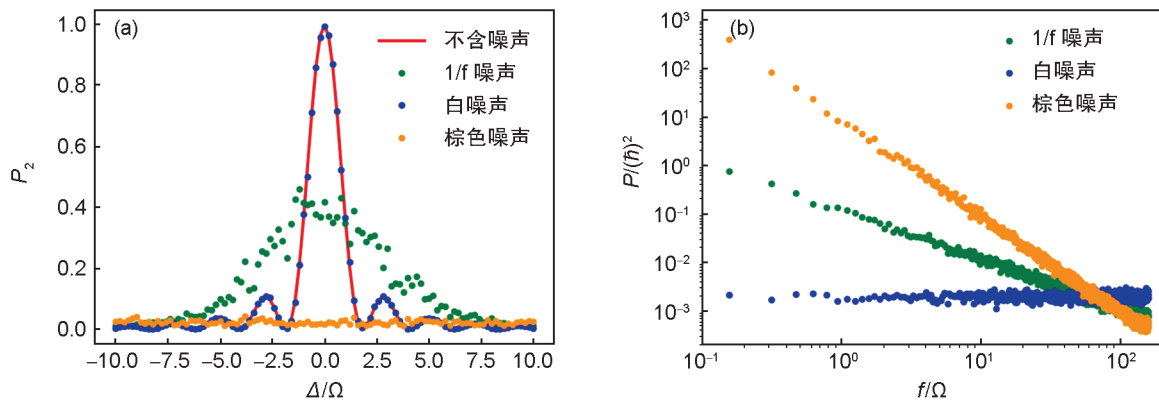


图1 $t = 3/\Omega$ 时不同噪声下的Rabi谱(a)和噪声的功率谱(b)
(其中噪声幅度为 $s=0.1$)

Fig. 1 At $t = 3/\Omega$, Rabi spectrum under different noises (a) and power spectrum with different noises (b)
(Where the noise amplitude is $s=0.1$)

表3 不同测量时间,不同幅度棕色噪声下Rabi谱的半高宽
(单位 Ω)

Table 3 FWHM values of Rabi spectrum (unit: Ω) for brown noises with different amplitudes at different measurement time

棕色噪声幅度(s/Ω)	测量时间($t/(1/\Omega)$)		
	2.0	2.5	3.0
0	2.246	1.717	1.37
0.000 3	2.316	1.812	1.459
0.000 4	2.326	1.813	1.485
0.000 5	2.418	1.884	1.586
0.000 6	2.468	1.981	1.72
0.000 7	2.514	2.003	1.746

略的最大 $1/f$ 噪声,白噪声和棕色噪声幅度越来越小。这表明延长测量时间,Rabi谱的测量对噪声更加敏感。

接下来我们研究了不同噪声种类对Rabi谱的影响。如图1(a)所示,选取测量时间 $t=3/\Omega$,数值模拟幅度为 $s=0.1$ 的 $1/f$ 噪声、白噪声和棕色噪声下的Rabi谱;在图1(b)中,是相应噪声的功率谱。计算功率谱时,首先通过快速傅里叶变换得到相应噪声 $z(t)$ 的频谱,然后对频谱取模后再进行平方得到。

在图1(a)中,相同幅度的棕色噪声、 $1/f$ 噪声,白噪声影响下Rabi谱的展宽依次减弱,其中,白噪声几乎不对Rabi谱造成影响,而棕色噪声则严重破坏了谱的测量。从图1(b)中可以看出,棕色噪声和 $1/f$ 噪声在低频区的功率是比较大的,可以说棕色噪声和 $1/f$ 噪声为低频噪声;而白噪声的功率在所有频率范围内是均匀分布的。由此可见,棕色噪声和 $1/f$ 噪声对Rabi谱展宽的影响,主要来自于低频成分的噪声。因此,低频噪声下Rabi谱的展宽会增强。这说明在实际测量过程中,对低频噪声的抑制是非常重要的。

3 结论

本文针对光晶格钟中的OLO噪声对Rabi谱测量的影响,通过使用四阶龙格-库塔方法,数值求解了含噪声的二能级原子系统的薛定谔方程,分别研究了OLO系统中存在的 $1/f$ 噪声、白噪声和棕色噪声在不同幅度和不同测量

时间下,对近共振条件Rabi谱展宽的影响。研究表明,对于一定强度的同一种噪声,延长测量时间虽然可以获得更窄的线宽,但会导致Rabi谱的半高宽对有色噪声的幅度更加敏感。在相同强度下,棕色噪声对Rabi谱展宽的影响最大,所以要注意抑制低频噪声的产生。本文的研究结果对于如何通过降噪和选择测量时间来提高光晶格钟的测量精度有着重要意义。

参考文献:

- [1] PELLIZZARI T, GARDINER S A, CIRAC J I, *et al.* Decoherence, Continuous Observation, and Quantum Computing: A Cavity QED Model[J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **75** (21): 3788-3791. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.3788.
- [2] DUAN L M, KIMBLE H J. Scalable Photonic Quantum Computation through Cavity-assisted Interactions[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **92**(12): 127902. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.127902.
- [3] CIRAC J I, ZOLLER P, KIMBLE H J, *et al.* Quantum State Transfer and Entanglement Distribution Among Distant Nodes in a Quantum Network[J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **78** (16): 3221-3224. DOI: 10.1103/physrevlett.78.3221.
- [4] BOUWMEESTER D, EKERT A, ZEILINGER A. The Physics of Quantum Information[M]. Springer, 2000.
- [5] AI D, QIAO H, ZHANG S, *et al.* Study of Optical Clocks Based on Ultracold ^{171}Yb Atoms[J]. *Chin Phys B*, 2020, **29** (9): 090601. DOI: 10.1088/1674-1056/aba099.
- [6] ZHANG Z J, WANG L M, WANG J, *et al.* Mesoporous Silica-coated Gold Nanorods as a Light-mediated Multifunctional Theranostic Platform for Cancer Treatment[J]. *Adv Mater*, 2022, **34**(35): 2205637. DOI: 10.1002/adma.202205637.
- [7] BOCA A, MILLER R, BIRNBAUM K M, *et al.* Observation of the Vacuum Rabi Spectrum for one Trapped Atom [J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **93**(23): 233603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.233603.
- [8] SCHIOPPO M, BROWN R C, MCGREW W F, *et al.* Ultrastable Optical Clock with Two Cold-atom Ensembles[J]. *Nat Photonics*, 2017, **11**(1): 48-52. DOI: 10.1038/nphoton.2016.231.
- [9] NICHOLSON T L, MARTIN M J, WILLIAMS J R, *et al.* Comparison of Two Independent Sr Optical Clocks with 1×10^{-17} Stability at 10^3 s[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, **109**(23): 230801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.230801.
- [10] LEMKE N, LUDLOW A, BARBER Z, *et al.* Spin-1/2

- Optical Lattice Clock[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **103**(6): 063001. DOI: 10.1103/physrevlett.103.063001.
- [11] MUGA J G, MAYATO R S, EGUSQUIZA I L. Time in Quantum Mechanics[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. DOI: 10.1007/3-540-45846-8.
- [12] GHOSH B, MAJUMDAR A S, NAYAK N. Effects of Cavity-field Statistics on Atomic Entanglement in the Jaynes-cummings Model[J]. *Int J Quantum Inform*, 2007, **5**(1-2): 169-177. DOI: 10.1142/s0219749907002840.
- [13] DANCKWERTS J, AHN K J, FÖRSTNER J, *et al.* Theory of Ultrafast Nonlinear Optics of Coulomb-coupled Semiconductor Quantum Dots: Rabi Oscillations and Pump-probe Spectra[J]. *Phys Rev B*, 2006, **73**(16): 165318. DOI: 10.1103/physrevb.73.165318.
- [14] 孙雨昕. 激光频率锁定于Hz分辨镱原子Rabi/Ramsey光谱[D]. 上海: 华东师范大学, 2020: 27-36.
SUN Y X. Laser Stabilizing to Ytterbium Clock Transition Based on Hz Level-spectral-line-width Rabi/Ramsey Spectrum[D]. Shanghai: East China Normal University, 2020: 27-36.
- [15] YIN M J, LU X T, LI T, *et al.* Floquet Engineering Hz-level Rabi Spectra in Shallow Optical Lattice Clock[J]. *Phys Rev Lett*, 2022, **128**(7): 073603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.073603.
- [16] VILLAS-BÔAS J M, ULLOA S E, GOVOROV A O. Decoherence of Rabi Oscillations in a Single Quantum Dot [J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **94**(5): 057404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.057404.
- [17] WANG S, ZHU Z Y, ZHANG Y Z, *et al.* Rabi Oscillations and Coherence Dynamics in Terahertz Streaking-assisted Photoelectron Spectrum[J]. *Chin Phys Lett*, 2021, **38**(1): 013401. DOI: 10.1088/0256-307x/38/1/013401.
- [18] RESHEF A, CASPARY TOROKER M. Method for Assessing Atomic Sources of Flicker Noise in Superconducting Qubits[J]. *Npj Comput Mater*, 2021, **7**: 165. DOI: 10.1038/s41524-021-00622-5.
- [19] KAZAKOV K A. $1/f$ Noise and Quantum Indeterminacy [J]. *Phys Lett A*, 2020, **384**(31): 126812. DOI: 10.1016/j.physleta.2020.126812.
- [20] SANTANA R, COELHO R. Low-frequency Ambient Noise Generator with Application to Automatic Speaker Classification[J]. *EURASIP J Adv Signal Process*, 2012, **2012**(1): 1-7. DOI: 10.1186/1687-6180-2012-175.
- [21] 袁海波, 董绍武, 武福平. 原子钟信号主要噪声类别的判定与分析[J]. 仪器仪表学报, 2008, **29**(8): 187-291.
YUAN H B, DONG S W, WU F P. Determination and Analysis of the Main Noise Categories of Atomic Clock Signals[J]. *Chin J Sci Instrum*, 2008, **29**(8): 187-291.
- [22] JENSEN K, ACOSTA V M, JARMOLA A, *et al.* Light Narrowing of Magnetic Resonances in Ensembles of Nitrogen-vacancy Centers in Diamond[J]. *Phys Rev B*, 2013, **87**: 014115. DOI: 10.1103/physrevb.87.014115.