山西大学学报(自然科学版)47(2):287－294,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023060

对偶四元数和四元分裂四元数的代数性质

邓勇*
(喀什大学 数学与统计学院,新疆 喀什 844006)

摘　要:对偶四元数和分裂四元数是处理刚体螺旋运动及姿态控制的有力工具。利用Clifford对偶数概念并借助4×4基元复矩阵,给出了矩阵形式的对偶四元数和分裂四元数的定义,获得对偶四元数矩阵和分裂四元数矩阵的伴随矩阵、逆矩阵、行列式等代数性质,同时指出了它们在内积的定义、共轭与范数表达式、乘积的行列式运算等方面的重要差异性。

关键词:四元数;对偶四元数;四元分裂四元数;代数性质
中图分类号:O153　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)02-0287-08

Algebraic Properties on Dual Quaternion and Quaternion Split Quaternion

DENG Yong*
(*College of Mathematics and Statistics, Kashi University, Kashi* 844006, *China*)

Abstract: Dual quaternion and split quaternion are powerful tools to deal with rigid body spiral motion and attitude control. By using Clifford's concept of dual numbers and with the help of 4×4 primitive complex matrix, the definitions of dual quaternion and split quaternion in matrix form are given, and the algebraic properties such as adjoint matrix, inverse matrix, determinant of dual quaternion matrix and split quaternion matrix are obtained. At the same time, their important differences in the definition of inner product, expressions of conjugation and norm, and determinant operations of product are pointed out.

Key words: quaternion; dual quaternion; quaternion split quaternion; algebraic property

0　引言

爱尔兰数学家汉密尔顿于1843年引入了四元数,作为复数的推广,它已成为数学、工程计算和物理学等经典领域建模和求解问题的有力工具[1]。四元数代数处于许多数学学科的交叉点。它描述了非交换环论、群论、几何拓扑、表示论等的主要特征。继发现四元数后,分裂四元数代数由Cackle引入[2]。分裂四元数代数因其能够揭示某些代数结构的一般方面,所以对它的研究得到了格外关注。四元数代数和分裂四元数代数都是结合非交换4维Clifford代数[3-6]。像复数一样,四元数也可由矩阵来表示。利用它的矩阵表示很容易证明四元数代数的一些性质。为此,许多学者都对四元数的矩阵表示进行过广泛研究[7-9]。辜英求[10]详细介绍了若干广义四元数及其性质。AkyiğIt与Kösal[11]定义了分裂Fibonacci四元数、分裂Lucas四元数和广义分裂Fibonacci四元数,并给出了这些四元数之间的关系。Tokeser等[12]定义了Pell分裂四元数和Pell-Lucas分裂四元数,并给出了它们之间的许多相关恒等式。Tian在文献[13],Erdǒğdu与Özdemir在文献[14]分别给出

收稿日期:2022-11-13;**接受日期**:2023-03-23
基金项目:国家自然科学基金(11201411)
* **通信作者**:邓勇(1967-),男,四川资阳人,教授,研究方向为非交换环上的矩阵理论。E-mail:dengyongks@126.com
引文格式:邓勇.对偶四元数和四元分裂四元数的代数性质[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(2):287-294. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023060

了复四元数和复分裂四元数的概念,并使用其四元数系数的4×4矩阵表示讨论了它们之间的对应关系。然而,目前关于对偶四元数和四元分裂四元数的定义及其基本性质,以及它们的对比分析,未见相关的研究报导。本文目的是建立对偶四元数和四元分裂四元数,并探讨它们的代数性质。

对偶数最初是由Clifford引入的,它被用作表示两条斜线在空间中相对位置的对偶角度量。对偶数和对偶四元数在研究刚体变换和机器人等问题中有着很大优势。Thomas在文献[15],孔祥强与赵培臣在文献[16]分别讨论了欧拉公式和棣莫弗公式在对偶四元数上的推广及其基本代数概念的矩阵表示。孔祥强在文献[17]利用双曲分裂四元数的极表示,给出了双曲分裂四元数表示矩阵的3种形式的棣莫弗定理,并推广了欧拉公式。

本文将在复四元数研究结果的基础上,给出在处理对偶四元数和四元分裂四元数上都有效的统一方法,并借助此方法来研究它们的一些代数结构的异同性。

1 预备知识

实四元数是形如$q=\sum_{m=0}^{3}q_m\boldsymbol{e}_m,(q_0,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{R})$的超复数,其中$\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是笛卡尔坐标系的四个基向量且满足非交换乘法规则,即

$$\boldsymbol{e}_1^2=\boldsymbol{e}_2^2=\boldsymbol{e}_3^2=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_0=-1,\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3。$$

用$\mathbb{H}=\{q=\sum_{m=0}^{3}q_m\boldsymbol{e}_m|q_m\in\mathbb{R},m=0,1,2,3\}$表示实四元数集,它是$\mathbb{R}$上的4维向量空间。实四元数也可表示为数对$(S_q,\boldsymbol{V}_q)$,其中$S_q=q_0e_0$,$\boldsymbol{V}_q=q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3$分别称为$q$的标量部分和向量部分。

对$\forall p,q\in\mathbb{H}$,可以定义它们的加法和乘法分别为$p+q=(S_p+S_q)+(\boldsymbol{V}_p+\boldsymbol{V}_q)$和$pq=S_pS_q-<\boldsymbol{V}_p,\boldsymbol{V}_q>+S_p\boldsymbol{V}_q+S_q\boldsymbol{V}_p+\boldsymbol{V}_p\times\boldsymbol{V}_q$,其中$p=\sum_{m=0}^{3}p_m\boldsymbol{e}_m$,$q=\sum_{m=0}^{3}q_m\boldsymbol{e}_m$,“$<\cdot,\cdot>$”和“$\times$”分别表示$\mathbb{R}^3$的内积和向量积。

设$\lambda\in\mathbb{R}$,$q=\sum_{m=0}^{3}q_m\boldsymbol{e}_m\in\mathbb{H}$。定义$\lambda$与$q$的数量积为$\lambda q=\sum_{m=0}^{3}(\lambda q_m)\boldsymbol{e}_m$;定义$q$的共轭和范数分别为$\bar{q}=S_q-\boldsymbol{V}_q$和$\|q\|=\sqrt{q\bar{q}}=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$。若$\|q\|=1$,则称$q$是单位实四元数。若$\|q\|\neq0$,则称$q$可逆且$q^{-1}=\bar{q}/\|q\|$。

定义1 对$\forall p,q\in\mathbb{H}$,下列性质成立:

(i)$\bar{\bar{q}}=q$;(ii)$\overline{pq}=\bar{q}\cdot\bar{p}$;(iii)$\|qp\|=\|q\|\cdot\|p\|$;(iv)$\|q^{-1}\|=\|q\|^{-1}$。

2 对偶四元数

形如$z=a+\omega b$的超复数称为对偶数[18],其中$a,b\in\mathbb{R}$,ω是Clifford算符,其具有运算规则$\omega\times1=\omega$,$\omega\times\omega=0$。全体对偶数的集合记为

$$\mathbb{D}=\{z=a+\omega b|a,b\in\mathbb{R},\omega^2=0\}。\tag{1}$$

设对偶数$z_1=a_1+\omega b_1$,$z_2=a_2+\omega b_2$。定义它们的和与积分别为:

$$z_1+z_2=(a_1+\omega b_1)+(a_2+\omega b_2)=(a_1+a_2)+\omega(b_1+b_2),$$

$$z_1z_2=(a_1+\omega b_1)(a_2+\omega b_2)=(a_1a_2)+\omega(b_1a_2+a_1b_2)。$$

不难验证,对偶数的加法和乘法满足交换律、结合律,以及加法对乘法的分配律。对偶数$z=a+\omega b$的共轭和范数分别定义为$\bar{z}=a-\omega b$和$\|z\|=\sqrt{z\bar{z}}=|a|$。

以对偶数为系数的四元数称为对偶四元数,其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Q}=q_0\boldsymbol{E}_0+q_1\boldsymbol{E}_1+q_2\boldsymbol{E}_2+q_3\boldsymbol{E}_3=\sum_{m=0}^{3}q_m\boldsymbol{E}_m, \tag{2}$$

其中 $q_0,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{D}$,而 4×4 基元复矩阵为 $\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$,即

$$\boldsymbol{E}_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&0&0&0\\0&-\mathrm{i}&0&0\\0&0&\mathrm{i}&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0&0&\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\end{bmatrix},$$

满足下列乘法规则:

$$\boldsymbol{E}_1^2=\boldsymbol{E}_2^2=\boldsymbol{E}_3^2=\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3=-\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_3=-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=-\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_3。$$

用 $\mathbb{H}_D^Q=\{\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_m\boldsymbol{E}_m|q_m\in\mathbb{D},m=0,1,2,3\}$ 表示对偶四元数的集合。此外,对偶四元数 $\boldsymbol{Q}$ 还可写为

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}(a_m+\omega b_m)\boldsymbol{E}_m,(a_m,b_m\in\mathbb{R}) \tag{3}$$

的形式。称 $S_Q=q_0E_0$ 和 $\boldsymbol{V}_Q=q_1\boldsymbol{E}_1+q_2\boldsymbol{E}_2+q_3\boldsymbol{E}_3$ 分别为 $\boldsymbol{Q}$ 的标量部分和向量部分。

对 $\forall Q,P\in\mathbb{H}_D^Q$,定义它们的和与积分别为

$$Q+P=(S_P+S_Q)+(V_P+\boldsymbol{V}_Q),$$

$$QP=S_AS_C-<V_A,V_C>+S_AV_C+S_CV_A+(V_A\times V_C)+\omega[S_BS_C-<V_B,V_C>+S_BV_C+S_CV_B+(V_B\times V_C)+S_AS_D-<V_A,V_D>+S_AV_D+S_DV_A+(V_A\times V_D)],$$

其中,对偶四元数

$$Q=\sum_{m=0}^{3}a_mE_m+\omega\sum_{m=0}^{3}b_mE_m=A+\omega B,P=\sum_{m=0}^{3}c_mE_m+\omega\sum_{m=0}^{3}d_mE_m=C+\omega D。$$

而 $A=\sum_{m=0}^{3}a_mE_m,B=\sum_{m=0}^{3}b_mE_m,C=\sum_{m=0}^{3}c_mE_m,D=\sum_{m=0}^{3}d_mE_m$ ($a_m,b_m,c_m,d_m\in\mathbb{R}$, $m=0,1,2,3$)。设 $\mu\in\mathbb{R}$,$Q=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_D^Q$。定义 μ 与 Q 的数量积,以及 Q 的共轭和范数分别为 $\mu Q=\mu\sum_{m=0}^{3}q_mE_m=\sum_{m=0}^{3}(\mu q_m)E_m,\bar{Q}=S_Q-\boldsymbol{V}_Q=\overline{A+\omega B}=\bar{A}+\omega\bar{B},\|Q\|=\sqrt{Q\bar{Q}}=\sqrt{A\bar{A}}$。

若 $\|Q\|=1$,则称 Q 为单位对偶四元数。若 $\|Q\|\neq0$,则称 Q 可逆且 $Q^{-1}=\bar{Q}/\|Q\|^2$。

设 $Q=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_D^Q$。定义它的对偶共轭为 $\tilde{Q}=\sum_{m=0}^{3}\overline{q}_mE_m=A-\omega B$。容易证明:

$$Q\tilde{Q}=A^2-2\omega(V_A\times V_B),\tilde{Q}Q=A^2+2\omega(V_A\times V_B)。$$

由此可见,$Q\tilde{Q}\neq\tilde{Q}Q$,即它们的乘积不可交换。

用 $M(\mathbb{H}_D^Q)$ 表示对偶四元数的矩阵表示的代数,即

$$M(\mathbb{H}_D^Q)=\left\{\begin{bmatrix}q_0+\mathrm{i}q_2&0&0&-q_1+\mathrm{i}q_3\\0&q_0-\mathrm{i}q_2&q_1+\mathrm{i}q_3&0\\0&-q_1+\mathrm{i}q_3&q_0+\mathrm{i}q_2&0\\q_1+\mathrm{i}q_3&0&0&q_0-\mathrm{i}q_2\end{bmatrix}\in\mathbb{H}_D^Q\right\}, \tag{4}$$

换句话说,对偶四元数 $Q=\sum_{m=0}^{3}(a_m+\omega b_m)E_m$ 的矩阵表示是一个类对偶四元数矩阵,即

$$\begin{bmatrix}x+\omega y&0&0&-(\bar{z}+\omega\bar{t})\\0&\bar{x}+\omega\bar{y}&z+\omega t&0\\0&-(\bar{z}+\omega\bar{t})&x+\omega y&0\\z+\omega t&0&0&\bar{x}+\omega\bar{y}\end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中$x=a_0+\mathrm{i}a_2,y=b_0+\mathrm{i}b_2,z=a_1+\mathrm{i}a_3,t=b_1+\mathrm{i}b_3$均为复数。

用$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$和Adj$\boldsymbol{Q}$分别表示对偶四元数$Q$的转置矩阵和伴随矩阵,于是

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} x+\omega y & 0 & 0 & z+\omega t \\ 0 & \bar{x}+\omega\bar{y} & -(\bar{z}+\omega\bar{t}) & 0 \\ 0 & z+\omega t & x+\omega y & 0 \\ -(\bar{z}+\omega\bar{t}) & 0 & 0 & \bar{x}+\omega\bar{y} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathrm{Adj}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \bar{a}(a\bar{a}+b\bar{b}) & 0 & 0 & -b(a\bar{a}+b\bar{b}) \\ 0 & a(a\bar{a}+b\bar{b}) & \bar{b}(a\bar{a}+b\bar{b}) & 0 \\ 0 & -b(a\bar{a}+b\bar{b}) & \bar{a}(a\bar{a}+b\bar{b}) & 0 \\ \bar{b}(a\bar{a}+b\bar{b}) & 0 & 0 & a(a\bar{a}+b\bar{b}) \end{bmatrix}=(a\bar{a}+b\bar{b})\bar{Q}, \tag{7}$$

其中$a=q_0+\mathrm{i}q_2,b=q_1+\mathrm{i}q_3,\bar{a},\bar{b}$分别是$a$和$b$的复共轭。特别地,当$a\bar{a}+b\bar{b}=1$时,有Adj$\boldsymbol{Q}=\bar{\boldsymbol{Q}}$。

定义1 若$\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in M(\mathbb{H}_D^Q)$矩阵表示的非对角元全为0,则称它为对角矩阵,且$\boldsymbol{Q}=q_0E_0+q_2E_2$;若$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}$,则称它为对称矩阵,且$\boldsymbol{Q}=q_0\boldsymbol{E}_0+q_2\boldsymbol{E}_2+q_3\boldsymbol{E}_3$;若$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$,则称它为正交矩阵,且$\boldsymbol{Q}=q_0\boldsymbol{E}_0+q_2\boldsymbol{E}_2$;若$(\bar{\boldsymbol{Q}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}$,则称它为厄米特矩阵,且$\boldsymbol{Q}=q_0E_0+q_2E_2$;若$(\bar{\boldsymbol{Q}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$,则称它为酉矩阵,且$\boldsymbol{Q}=q_0\boldsymbol{E}_0+q_1\boldsymbol{E}_1+q_3\boldsymbol{E}_3$,$\det\boldsymbol{Q}=1$。

定义2 设$\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_D^Q$。于是,它的行列式定义为$\det\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_m^2\det E_m$。若$\det\boldsymbol{Q}\neq 0$,则称对偶四元数$\boldsymbol{Q}$可逆且$\boldsymbol{Q}^{-1}=\bar{Q}/\det Q=(S_Q-V_Q)\Big/\sum_{m=0}^{3}q_m^2$。

由于$\det E_m=1,(m=0,1,2,3)$,所以实际上$\det Q=\sum_{m=0}^{3}q_m^2$。但是,需要注意$\det\boldsymbol{Q}$的定义不同于$\boldsymbol{Q}$的矩阵表示的行列式计算公式$(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)^2$。

定理2 对$\forall\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m,P=\sum_{m=0}^{3}p_mE_m\in\mathbb{H}_D^Q$和$\forall\lambda\in\mathbb{H}$,下列性质成立:

(i)$\det\boldsymbol{Q}=\det\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$;(ii)$\det(\lambda\boldsymbol{Q})=\lambda^2\det\boldsymbol{Q}$;(iii)$\det(\boldsymbol{Q}P)=\det\boldsymbol{Q}\det P$;(iv)$\det(\tilde{\boldsymbol{Q}})=\det\boldsymbol{Q}$。

证明 (i)因$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m^{\mathrm{T}}$,故由$\det Q$的定义可得

$$\det\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\sum_{m=0}^{3}q_m^2\det E_m^{\mathrm{T}}=\sum_{m=0}^{3}q_m^2=\det\boldsymbol{Q}。$$

注:此结论关于对偶四元数矩阵表示的行列式也同样成立。

(ii)对$\forall\lambda\in\mathbb{H}$。由于$\lambda\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}(\lambda q_m)E_m$。因此,

$$\det(\lambda\boldsymbol{Q})=\sum_{m=0}^{3}\lambda^2q_m^2=\lambda^2\sum_{m=0}^{3}q_m^2=\lambda^2\det\boldsymbol{Q}。$$

(iii)直接计算乘积$\boldsymbol{Q}P$,可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}P=&(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)E_0+(q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2)E_1+\\&(q_0p_2-q_1p_3+q_2p_0+q_3p_1)E_2+(q_0p_3+q_1p_2-q_2p_1+q_3p_0)E_3。\end{aligned}$$

于是,利用行列式的定义,可得

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{Q}P)=&(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)^2+(q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2)^2+(q_0p_2-q_1p_3+\\&q_2p_0+q_3p_1)^2+(q_0p_3+q_1p_2-q_2p_1+q_3p_0)^2=q_0^2\sum_{m=0}^{3}p_m^2+q_1^2\sum_{m=0}^{3}p_m^2+q_2^2\sum_{m=0}^{3}p_m^2+\end{aligned}$$

$$q_3^2\sum_{m=0}^{3}p_m^2=(\sum_{m=0}^{3}q_m^2)(\sum_{m=0}^{3}p_m^2)=\det\boldsymbol{Q}\det P。$$

(iv)由 Q 的共轭和对偶共轭的定义很容易验证，在此从略。

注意：对 $\forall\boldsymbol{Q}\in\mathbb{H}_D^Q$ 且 $\boldsymbol{Q}\neq 0$，由乘积 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的行列式定义，容易验证 $\det(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Q}})\neq(\det\boldsymbol{Q})^2$。

定理3 设 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{H}_D^Q$，$c\in\mathbb{H}$ 且 $c\neq 0$。于是，下列性质成立：

(i) $E_1c\neq cE_1$，$E_2c\neq cE_2$，$E_3c\neq cE_3$；(ii) $\boldsymbol{Q}^2=S_Q^2-\det(\boldsymbol{V}_Q)E_0+2S_Q\boldsymbol{V}_Q$。

证明 (i)利用四元数的乘法规则很容易验证。

(ii)设 $\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_D^Q$。于是，

$$\boldsymbol{Q}^2=(q_0^2-q_1^2-q_2^2-q_3^2)E_0+2q_0(q_1E_1+q_2E_2+q_3E_3),$$

因此，$\boldsymbol{Q}^2=S_Q^2-\det(\boldsymbol{V}_Q)E_0+2S_Q\boldsymbol{V}_Q$。

引理1 对 $\forall\boldsymbol{Q}\in\mathbb{H}_D^Q$，它满足性质：(i) $\boldsymbol{Q}=\widetilde{\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}}$；(ii) $\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}=\bar{\tilde{\boldsymbol{Q}}}$。

证明 (i)设 $\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m$。它可写成 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}a&0&0&-\bar{b}\\0&\bar{a}&b&0\\0&-\bar{b}&a&0\\b&0&0&\bar{a}\end{bmatrix}$，其中 $a=q_0+\mathrm{i}q_2$，$b=q_1+\mathrm{i}q_3$。

于是，$\bar{\boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix}\bar{a}&0&0&-b\\0&a&\bar{b}&0\\0&-b&\bar{a}&0\\\bar{b}&0&0&a\end{bmatrix}$。由转置的定义，可得 $\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\bar{a}&0&0&\bar{b}\\0&a&-b&0\\0&\bar{b}&\bar{a}&0\\-b&0&0&a\end{bmatrix}$。

将对偶共轭的定义用于 $\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}$ 上，即对每个系数取共轭，就得到 $\boldsymbol{Q}$。

(ii)设 $\boldsymbol{Q}$ 如同(i)。由(i)的证明，将 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 的每个系数取对偶共轭，可得

$$\bar{\tilde{\boldsymbol{Q}}}=\begin{bmatrix}\bar{a}&0&0&\bar{b}\\0&a&-b&0\\0&\bar{b}&\bar{a}&0\\-b&0&0&a\end{bmatrix}=\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}。$$

定理4 若 $\boldsymbol{Q},P\in\mathbb{H}_D^Q$ 可逆，则下列性质成立：

(i)一般地，$\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1}\neq\widetilde{\boldsymbol{Q}^{-1}}$；(ii) $\bar{\boldsymbol{Q}}^{-1}=\overline{\boldsymbol{Q}^{-1}}$；(iii) $\widetilde{\boldsymbol{Q}P}=\tilde{\boldsymbol{Q}}\tilde{P}$；(iv) $(\boldsymbol{Q}P)^{-1}=P^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}$。

证明 (i)设 $\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_D^Q$ 可逆。因为 $\tilde{\boldsymbol{Q}}=\sum_{m=0}^{3}\bar{q}_mE_m$，所以

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1}=\frac{\bar{\tilde{\boldsymbol{Q}}}}{\det\tilde{\boldsymbol{Q}}}=\frac{\sum_{m=0}^{3}q_mE_m}{\sum_{m=0}^{3}\bar{q}_m^2}。$$

另一方面，$\widetilde{\boldsymbol{Q}^{-1}}=\dfrac{\bar{q}_0E_0-\bar{q}_1E_1-\bar{q}_2E_2-\bar{q}_3E_3}{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$。因此，$\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1}\neq\widetilde{\boldsymbol{Q}^{-1}}$。

注意：当且仅当 q_0 为纯实数且 $q_1=q_2=q_3=0$ 时，

(i)才能成为等式。

(ii)利用对偶四元数逆的定义，很容易验证。

(iii)利用对偶四元数对偶共轭的定义和矩阵乘法，很容易验证。

(iv)设 $\boldsymbol{Q}=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m$，$P=\sum_{m=0}^{3}p_mE_m$ 均可逆。于是，$\boldsymbol{Q}P=k\boldsymbol{E}_0+l\boldsymbol{E}_1+m\boldsymbol{E}_2+n\boldsymbol{E}_3$，其中

$$k=q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3,\ l=q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2,$$

$$m=q_0p_2-q_1p_3+q_2p_0+q_3p_1, n=q_0p_3+q_1p_2-q_2p_1+q_3p_0。$$

因此，$\det(QP)=k^2+l^2+m^2+n^2$。从而，

$$(QP)^{-1}=\frac{\overline{QP}}{\det(QP)}=\frac{kE_0-lE_1-mE_2-nE_3}{k^2+l^2+m^2+n^2}。$$

另一方面，因为 $P^{-1}=\dfrac{p_0E_0-p_1E_1-p_2E_2-p_3E_3}{p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2}$，$Q^{-1}=\dfrac{q_0E_0-q_1E_1-q_2E_2-q_3E_3}{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$，所以 $P^{-1}Q^{-1}=\dfrac{kE_0-lE_1-mE_2-nE_3}{k^2+l^2+m^2+n^2}$。综上可知，$(QP)^{-1}=P^{-1}Q^{-1}$。

3 四元分裂四元数

以实四元数为系数的分裂四元数称为四元分裂四元数，其形式为

$$P=p_0\boldsymbol{E}_0+p_1\boldsymbol{E}_1+p_2\boldsymbol{E}_2+p_3\boldsymbol{E}_3=\sum_{m=0}^{3}p_mE_m,\ p_0,p_1,p_2,p_3\in\mathbb{H}, \tag{8}$$

其中基元矩阵 $\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 满足下列等式：

$$\boldsymbol{E}_1^2=-\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_2^2=\boldsymbol{E}_3^2=\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_3=-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=-\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_3。$$

四元分裂四元数 P 还可写为

$$P=\sum_{m=0}^{3}(a_m+b_mi+c_mj+d_mk)E_m,\ a_m,b_m,c_m,d_m\in\mathbb{R} \tag{9}$$

的形式，其中 i,j,k 分别是分裂四元数的单位且与四元数的单位 $\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 乘法可交换。

四元分裂四元数集用 $\mathbb{H}_S^Q=\{P=\sum_{m=0}^{3}p_mE_m|p_m\in\mathbb{H},m=0,1,2,3\}$ 表示，其 4×4 基元复矩阵分别为

$$\boldsymbol{E}_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&0&0&0\\0&-\mathrm{i}&0&0\\0&0&\mathrm{i}&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0&0&\mathrm{i}\\0&0&-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}&0&0\\-\mathrm{i}&0&0&0\end{bmatrix}。$$

称 $S_P=p_0\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{V}_P=p_1\boldsymbol{E}_1+p_2\boldsymbol{E}_2+p_3\boldsymbol{E}_3$ 分别为 P 的标量部分和向量部分；P 的共轭、四元数共轭和全共轭分别为 $\bar{P}=S_P-\boldsymbol{V}_P$，$\tilde{P}=\sum_{m=0}^{3}\bar{p}_mE_m$ 和 $\tilde{\bar{P}}=\bar{p}_0E_0-\bar{p}_1E_1-\bar{p}_2E_2-\bar{p}_3E_3$；$P$ 的行列式定义为

$$\det P=\sum_{m=0}^{3}p_m^2\det E_m。 \tag{10}$$

实际上，因 $\det E_m=1,(m=0,1,2,3)$，故 $\det P=\sum_{m=0}^{3}p_m^2$；$P$ 的范数定义为

$$\|P\|=\sqrt{P\bar{P}}=p_0^2+p_1^2-p_2^2-p_3^2=\sqrt{|\|p_{11}\|^2-\|p_{12}\|^2|}, \tag{11}$$

其中，$p_{11}=p_0+\mathrm{i}p_1$，$p_{12}=p_2+\mathrm{i}p_3$。若 $\|P\|=1$，则称 P 为单位四元分裂四元数。

定理5 对 $\forall Q,P\in\mathbb{H}_S^Q$，$Q,P\neq0$ 和 $\forall\lambda\in\mathbb{H}$，下列性质成立：

(i) $\det Q=\det\bar{Q}=\det Q^{\mathrm{T}}$；(ii) $\det(\lambda Q)=\lambda^2\det Q$；(iii) 一般地，$\det(QP)\neq\det Q\det P$。

证明 (i) 设 $Q=\sum_{m=0}^{3}Q_mE_m\in\mathbb{H}_S^Q$，由定义直接可得 $\det Q=\det\bar{Q}=\det\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\sum_{m=0}^{3}Q_m^2$。

(ii) 对 $\forall\lambda\in\mathbb{H}$。因 $\lambda Q=\sum_{m=0}^{3}(\lambda q_m)E_m$，故 $\det(\lambda Q)=\sum_{m=0}^{3}\lambda^2q_m^2=\lambda^2\sum_{m=0}^{3}q_m^2=\lambda^2\det Q$。

(iii) 设 $Q=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m$，$P=\sum_{m=0}^{3}p_mE_m$。于是，$\det Q=\sum_{m=0}^{3}q_m^2$，$\det P=\sum_{m=0}^{3}p_m^2$。通过直接计算，可得

$$QP=(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)\boldsymbol{E}_0+(q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2)\boldsymbol{E}_1+(q_0p_2-q_1p_3+q_2p_0+q_3p_1)\boldsymbol{E}_2+(q_0p_3+q_1p_2-q_2p_1+q_3p_0)\boldsymbol{E}_3,$$

因此,

$$\det(QP)=(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)^2+(q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3-q_3p_2)^2+(q_0p_2+q_2p_0+q_3p_1-q_1p_3)^2+(q_0p_3+q_3p_0+q_1p_2-q_2p_1)^2。$$

而 $\det Q\det P=(\sum_{m=0}^{3}q_0^2)(\sum_{m=0}^{3}p_m^2)$。显然,$\det(QP)\neq\det Q\det P$。

定理6 对 $\forall Q=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_S^Q$ 和 $\forall P=\sum_{m=0}^{3}p_mE_m\in\mathbb{H}_S^Q$,以及 $c\in\mathbb{H}$,$c\neq 0$,下列性质成立:

(i) $\boldsymbol{E}_1c\neq c\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{E}_2c\neq c\boldsymbol{E}_2$,$\boldsymbol{E}_3c\neq c\boldsymbol{E}_3$;

(ii) $Q^2=S_Q^2+(\boldsymbol{V}_Q\times\boldsymbol{V}_Q)+2q_0(q_1\boldsymbol{E}_1+q_2\boldsymbol{E}_2+q_3\boldsymbol{E}_3)$;

(iii) 一般地,$\det Q\neq\|Q\|^2$,$\overline{QP}\neq\bar{Q}\bar{P}$。

证明 (i) 由四元数的乘积规则很容易验证。

(ii) 直接计算,可得

$$Q^2=q_0^2\boldsymbol{E}_0+q_0q_1\boldsymbol{E}_1+q_0q_2\boldsymbol{E}_2+q_0q_3\boldsymbol{E}_3+q_1^2\boldsymbol{E}_0+q_1q_0\boldsymbol{E}_1-q_1q_3\boldsymbol{E}_2+q_1q_2\boldsymbol{E}_3+q_2^2\boldsymbol{E}_0+q_2q_3\boldsymbol{E}_1+q_2q_0\boldsymbol{E}_2-q_2q_1\boldsymbol{E}_3+q_3^2\boldsymbol{E}_0-q_3q_2\boldsymbol{E}_1+q_3q_0\boldsymbol{E}_2+q_3q_0\boldsymbol{E}_3。$$

于是,$Q^2=S_Q^2+(\boldsymbol{V}_Q\times\boldsymbol{V}_Q)+2q_0(q_1E_1+q_2E_2+q_3E_3)$。

(iii) 因 $\det Q=\sum_{m=0}^{3}p_m^2$,$\|Q\|^2=Q\bar{Q}=(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)^2$,故 $\det Q\neq\|Q\|^2$。由于

$$\bar{Q}\bar{P}=q_0(p_0\boldsymbol{E}_0-p_1\boldsymbol{E}_1-p_2\boldsymbol{E}_2-p_3\boldsymbol{E}_3)-q_1(p_0\boldsymbol{E}_1+p_1\boldsymbol{E}_0-p_2\boldsymbol{E}_3+p_3\boldsymbol{E}_2)-q_2(p_0\boldsymbol{E}_2+p_1\boldsymbol{E}_3-p_2\boldsymbol{E}_0-p_3\boldsymbol{E}_1)-q_3(p_0\boldsymbol{E}_3-p_1\boldsymbol{E}_2+p_2\boldsymbol{E}_1-p_3\boldsymbol{E}_0),$$

$$\overline{QP}=q_0(p_0\boldsymbol{E}_0-p_1\boldsymbol{E}_1-p_2\boldsymbol{E}_2-p_3\boldsymbol{E}_3)-q_1(p_0\boldsymbol{E}_1+p_1\boldsymbol{E}_0+p_2\boldsymbol{E}_3-p_3\boldsymbol{E}_2)-q_2(p_0\boldsymbol{E}_2-p_1\boldsymbol{E}_3-p_2\boldsymbol{E}_0+p_3\boldsymbol{E}_1)-q_3(p_0\boldsymbol{E}_3+p_1\boldsymbol{E}_2-p_2\boldsymbol{E}_1-p_3\boldsymbol{E}_0)。$$

因此,$\overline{QP}\neq\bar{Q}\bar{P}$。

定义3 设 $Q=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_S^Q$,称

$$e^Q=e^{q_0}(\cos\varphi+\frac{V_Q}{\varphi}\sin\varphi) \tag{12}$$

为 Q 的极坐标形式,其中 $\boldsymbol{V}_Q=q_1E_1+q_2\boldsymbol{E}_2+q_3E_3$,$\varphi=\|\boldsymbol{V}_Q\|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$。

定理7 若 $P=\sum_{m=0}^{3}p_mE_m\in\mathbb{H}_S^Q$,$Q=\sum_{m=0}^{3}q_mE_m\in\mathbb{H}_S^Q$ 均可逆,则

(i) $\overline{P^{-1}}=\bar{P}^{-1}$,$\tilde{P}^{-1}=\widetilde{P^{-1}}$,$(\bar{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\bar{P}^{-1})^{\mathrm{T}}$;(ii) $(PQ)^{-1}=Q^{-1}P^{-1}$。

证明 利用逆、共轭、全共轭、转置的定义,以及四元数的乘积规则很容易验证,在此从略。

4 结论

本文首先定义了对偶四元数,然后根据对偶四元数的特征运算,得到了它的一些代数性质。在此基础上,给出了四元分裂四元数的定义及基本性质定理。

从本文的定理1至定理7所给的结果可知,对偶四元数和四元分裂四元数有显著不同的代数性质,一是内积的定义不同,二是它们的共轭与对偶共轭和四元数共轭的乘积不同;三是它们的范数表达式不同;四是两个四元分裂四元数乘积的行列式等于它们行列式的乘积,而两个对偶四元数乘积的行列式不等于它们行列式的乘积。

参考文献：

[1] 刘嘉浪, 范思诺. 四元数及其在计算机科学与工程领域中的应用[J]. 福建电脑, 2020, **36**(4): 32-35. DOI: 10.16707/j.cnki.fjpc.2020.04.008.
LIU J L, FAN S N. Quaternion and Its Applications in Computer Science and Engineering[J]. *J Fujian Comput*, 2020, **36**(4): 32-35. DOI: 10.16707/j.cnki.fjpc.2020.04.008.

[2] ÖZDEMIR M, ERGIN A A. Some Geometric Applications of Split Quaternions[C]//Proceedings of the 16th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society. 2005, **16**: 108-115.DOI: 10.13140/2.1.2870.5609.

[3] ABŁAMOWICZ R, SOBCZYK G. Lectures on Clifford (geometric) Algebras and Applications[M]. Boston: Birkhäuser, 2004.

[4] 倪秋莹. 分裂四元数及分裂四元数矩阵性质的研究[D]. 北京: 北京邮电大学, 2020.
NI Q Y. Study on Split Quaternion and Properties of Split Quaternion Matrix[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2020.

[5] 孔祥强. 分裂四元数的棣莫弗定理[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2021, **55**(1): 18-23. DOI: 10.19603/j.cnki.1000-1190.2021.01.004.
KONG X Q. De Moivre's Formula for Split Quaternions [J]. *J Central China Norm Univ Nat Sci*, 2021, **55**(1): 18-23. DOI: 10.19603/j.cnki.1000-1190.2021.01.004.

[6] ÖZDEMIR M. The Roots of a Split Quaternion[J]. *Appl Math Lett*, 2009, **22**(2): 258-263. DOI: 10.1016/j.aml.2008.03.020.

[7] 黄敬频,白瑞,徐云 等. 四元数矩阵的直积分解及最佳逼近[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, **47**(2): 1-6. DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.001.
HUANG J P, BAI R, XU Y, et al.Kronecker Product Decomposition of Quaternion Matrix and Its Optimal Approximation[J]. *J Southwest China Norm Univ Nat Scie Edi*, 2022, **47**(2):1-6. DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2022.02.001.

[8] ALAGOZ Y, OZYURT G. Some Properties of Complex Quaternion and Complex Split Quaternion Matrices[J]. *Miskolc Math Notes*, 2019, **20**(1): 45. DOI: 10.18514/mmn.2019.2550.

[9] 王不了, 冯良贵. 四元数的实矩阵表示[J]. 国防科技大学学报, 2010, **32**(4): 165-168. DOI: 10.3969/j.issn.1001-2486.2010.04.030.
WANG B L, FENG L G. Real Matrix Representation of Quaternions[J]. *J Natl Univ Def Technol*, 2010, **32**(4): 165-168. DOI: 10.3969/j.issn.1001-2486.2010.04.030.

[10] 辜英求. 几何代数与统一场论[M]. 汉斯出版社, 2021.
GU Y Q. Geometric Algebra and Unified Field Theory [M/OL]. Hans Publishers, 2021.

[11] AKYIĞIT M, KÖSAL H H, TOSUN M. Split Fibonacci Quaternions[J]. *Adv Appl Clifford Algebras*, 2013, **23**(3): 535-545. DOI: 10.1007/s00006-013-0401-9.

[12] TOKEŞER Ü, ÜNAL Z, BILGICI G. Split Pell and Pell-Lucas Quaternions[J]. *Adv Appl Clifford Algebras*, 2017, **27**(2): 1881-1893. DOI: 10.1007/s00006-016-0747-x.

[13] TIAN Y. Matrix Theory over the Complex Quaternion Algebra[EB/OL]. arXiv Preprint: math/0004005, 2000.

[14] ERDOĞDU M, ÖZDEMIR M. On Complex Split Quaternion Matrices[J]. *Adv Appl Clifford Algebras*, 2013, **23**(3): 625-638. DOI: 10.1007/s00006-013-0399-z.

[15] THOMAS F. Approaching Dual Quaternions from Matrix Algebra[J]. *IEEE Trans Robotics*, 2014, **30**(5): 1037-1048. DOI: 10.1109/TRO.2014.2341312.

[16] 孔祥强, 赵培臣. 对偶分裂四元数的表示矩阵的棣莫弗定理[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2021, **53**(3): 12-19. DOI: 10.16163/j.cnki.22-1123/n.2021.03.003.
KONG X Q, ZHAO P C. De Moivre's Theorem for Representation Matrix of Dual Split Quaternions[J]. *J Northeast Norm Univ Nat Sci Ed*, 2021, **53**(3): 12-19. DOI: 10.16163/j.cnki.22-1123/n.2021.03.003.

[17] 孔祥强. 双曲分裂四元数表示矩阵的棣莫弗定理[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2022, **226**(6): 8-16. DOI: 10.3969/j.issn.1000-5641.2022.06.002.
KONG X Q. De Moivre's Theorem for a Matrix Representation of Hyperbolic Split Quaternions[J]. *J East China Norm Univ Nat Sci Ed*, 2022, **226**(6): 8-16. DOI: 10.3969/j.issn.

[18] CLIFFORD C. Preliminary Sketch of Biquaternions[J]. *Proc London Math Soc*, 1871 (1): 381-395. DOI: 10.1112/plms/s1-4.1.381.