

一类 von Kármán 方程的解的存在唯一性

张健,王永达*

(河北大学 数学与信息科学学院,河北 保定 071002)

摘要:文中考虑了一类非线性非局部发展 von Kármán 方程。为了分析该方程,首先采用 Galerkin 方法研究了一个线性问题,得到了线性问题的解的存在唯一性。然后利用压缩映射原理和不动点理论,得到了该 von Kármán 方程的解的存在唯一性。

关键词: von Kármán 方程; Galerkin 方法; 存在唯一性

中图分类号: O175.23 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-2395(2024)02-0279-08

Existence and Uniqueness of Solutions for a Class of von Kármán Equations

ZHANG Jian, WANG Yongda*

(College of Mathematics and Information Science, Hebei University, Baoding 071002, China)

Abstract: An evolution von Kármán equation, which is nonlinear and nonlocal, is considered in this paper. To analyze this equation, we study a related linear problem by following Galerkin's process, and get the uniqueness result. Then, the uniqueness of the solution of the von Kármán equation is obtained by applying the principle of compression mapping and the fixed point theory.

Key words: von Kármán equation; Galerkin's method; existence and uniqueness

0 引言

设 $\Omega = (0, \pi) \times (-l, l) \subset \mathbb{R}^2$, 我们考虑一类非线性非局部 von Kármán 方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + h - \lambda(u)u_{xx} = [\Phi, u] + f, & (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = u_{xx} = 0, & (x, y, t) \in \{0, \pi\} \times (-l, l) \times \mathbb{R}^+, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xxy} = 0, & (x, y, t) \in (0, \pi) \times \{-l, l\} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = u_0, u_t(x, y, 0) = u_1, & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Phi = \Phi(u)$ 是线性方程

$$\begin{cases} \Delta^2 \Phi = -[u, u], & (x, y) \in \Omega, \\ \Phi = \Phi_{xx} = 0, & (x, y) \in \{0, \pi\} \times (-l, l), \\ \Phi = \Phi_y = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times \{-l, l\}, \end{cases} \quad (2)$$

的唯一解^[1]。[\cdot, \cdot]表示 Monge-Ampère 算子,即 $[\phi, \psi] := \phi_{xx}\psi_{yy} + \phi_{yy}\psi_{xx} - 2\phi_{xy}\psi_{xy}, \forall \phi, \psi \in H^2(\Omega)$ 。

收稿日期:2022-12-12;接受日期:2023-03-23

基金项目:河北省自然科学基金(A2019201106);河北大学高层次人才引进项目(521000981097)

作者简介:张健(1997-),女,内蒙古呼和浩特人,硕士研究生,研究方向为偏微分方程。E-mail:1690101151@qq.com

* 通信作者:王永达(WANG Yongda),E-mail:wangyongda@hbu.edu.cn

引文格式:张健,王永达.一类 von Kármán 方程的解的存在唯一性[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(2):279-286. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023061

当 $2l \ll \pi$ 时, 方程(1)可以看作是悬索桥的一类数学模型^[1-2]。此时 $u = u(x, y, t)$ 表示悬索桥甲板的垂直位移, Φ 是 Airy Stress 函数, $\lambda(u) = -P + S \int_{\Omega} u_x^2 dx dy$ ($S > 0, P > 0$) 取决于甲板材料的弹性, $h = h(x, y, u)$ 表示吊杆的恢复力, f 是外部负载, $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 。

2015年, Gazzola 等^[1]详细介绍了 von Kármán 方程的推导过程, 并将此类方程看成是悬索桥的数学模型。他们得到了 von Kármán 方程的解的存在性、唯一性和多解性。2018年, Wang^[3]重点研究了动态 von Kármán 模型的扭转稳定性。2022年, 王永达^[4]研究了带有非局部效应的 von Kármán 方程, 通过分析其对应能量泛函的临界点, 得出该方程的解的存在性、唯一性和多解性。

文献[4]中研究了静态时的 von Kármán 方程, 得到了方程的解的存在性、唯一性和多解性。若 f 依赖于时间 t , 则需要考虑动态的模型。因此, 在文献[4]的基础上, 我们研究了问题(1)。内容组织如下: 第1节我们先列出了一些预备知识, 包括相关函数空间和引理。然后, 我们给出了文中的主要结果——定理1。第2节考虑了一个线性问题, 应用 Galerkin 方法得到了其解的存在唯一性。第3节是关于定理1的证明。根据线性问题的解的存在唯一性, 利用压缩映射原理和不动点理论, 完成了定理1的证明。

1 预备知识和主要结果

设 $(\cdot, \cdot)_2$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $L^2(\Omega)$ 的内积和范数。记 $H^1_*(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega); u = 0, (x, y) \in \{0, \pi\} \times (-l, l)\}$ ^[5], 内积和范数分别为:

$$(u, v)_{H^1_*} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy, \|u\|_{H^1_*} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, u, v \in H^1_*(\Omega).$$

记 $H^2_*(\Omega) := \{u \in H^2(\Omega); u = 0, (x, y) \in \{0, \pi\} \times (-l, l)\}$ 。定义

$$(u, v)_{H^2_*} := \int_{\Omega} (\Delta u \Delta v - (1 - \sigma)[u, v]) dx dy, u, v \in H^2_*(\Omega),$$

则 $H^2_*(\Omega)$ 是 Hilbert 空间^[2], 其范数为

$$\|u\|_{H^2_*} = \left(\int_{\Omega} (|\Delta u|^2 - (1 - \sigma)[u, u]) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}, u \in H^2_*(\Omega).$$

引理1^[2] 设 $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 则在空间 $H^2_*(\Omega)$ 上 $u \mapsto \|u\|_{H^2_*}$ 和 $u \mapsto \|u\|_{H^1_*}$ 等价, 即

$$\alpha_1 \|u\|_{H^1_*} \leq \|u\|_{H^2_*} \leq \alpha_2 \|u\|_{H^1_*}, \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

引理2^[6] 如果 $u \in H^2(\Omega)$, 那么 $[u, \Phi] \in L^2(\Omega)$, 且满足:

$$\|[u, \Phi]\|_2 \leq \alpha_3 \|u\|_{H^2} \|\Phi(u)\|_{W^{2,\infty}}, \|\Phi(u)\|_{W^{2,\infty}} \leq \alpha_4 \|u\|_{H^2}^2, \alpha_3, \alpha_4 > 0.$$

在后文中, 我们还需要一个 Gronwall 型引理。

引理3^[7] 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, 且满足 $f(0) = 0$ 和 $0 \leq f'(t) \leq \alpha_5 + \alpha_6 \sqrt{f(t)}$ ($\alpha_5, \alpha_6 > 0$), $t \geq 0$, 则

$$f(t) \leq \frac{(\alpha_5 + \alpha_6)^2}{4} t^2 + (\alpha_5 + \alpha_6) t, t \geq 0.$$

我们称函数 $u \in C^0([0, T]; H^2_*(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ 是问题(1)的一个弱解, 如果对任意的 $z \in H^2_*(\Omega)$ 以及任意 $t \in [0, T]$, 都有

$$\begin{cases} (u_t, z)_2 + (u, z)_{H^2_*} + (h(x, y, u), z)_2 - (P - S \|u\|_{H^1_*}^2)(u, z)_{H^1_*} = (f, z)_2 + ([\Phi, u], z)_2, \\ u(x, y, 0) = u_0, u_t(x, y, 0) = u_1 \end{cases}$$

成立,其中 Φ 是方程(2)的解。

我们的主要结果是

定理1 设 $f \in L^2(\Omega \times [0, T])$, h 满足

(H1) $h: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Carathéodory 函数,且满足增长性条件,即对于任意 $p > 1$,存在常数 C ,使得

$$h(\cdot, \cdot, s) \leq C|s|^{p-1};$$

(H2) h 关于 s 满足局部 Lipschitz 条件,即对于任意有界区域 $I \subset \mathbb{R}$,有

$$L_I := \sup_{(x,y) \in \Omega, s_1, s_2 \in I, s_1 \neq s_2} \left| \frac{h(x,y,s_1) - h(x,y,s_2)}{s_1 - s_2} \right| < \infty.$$

若 $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, 则当 $T > 0$ 充分小时,(1)存在唯一的弱解 u 。

2 线性问题

本节主要考虑一个线性问题。给定 $T > 0$, 设 $g = g(x, y, t) \in L^2(\Omega \times [0, T])$, 我们考虑线性问题

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = g, & (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = u_{xx} = 0, & (x, y, t) \in \{0, \pi\} \times (-l, l) \times \mathbb{R}^+, \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma) u_{xyy} = 0, & (x, y, t) \in (0, \pi) \times \{-l, l\} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = u_0, u_t(x, y, 0) = u_1, & (x, y) \in \Omega_0. \end{cases} \quad (3)$$

定理2 若 $u_0 \in H_*^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, 则(3)存在唯一的弱解 $u \in C^0([0, T]; H_*^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ 。

证明 (存在性) 设 $E_n := \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $n \geq 1$, 其中 $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $H_*^2(\Omega)$ 的一组正交基, 满足 $\|e_k\|_2 = 1$ 。令

$$u_0^n = \sum_{k=1}^n (u_0, e_k)_{H_*^2} e_k, \quad u_1^n = \sum_{k=1}^n (u_1, e_k)_2 e_k.$$

容易验证当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $H_*^2(\Omega)$ 中 $u_0^n \rightarrow u_0$, 在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_1^n \rightarrow u_1$ 。

对 $n \geq 1$, 我们寻找变分问题

$$\begin{cases} (u_t^n, e_k)_2 + (u^n, e_k)_{H_*^2} = (g, e_k)_2, & t \in \mathbb{R}^+, \\ u^n(x, y, 0) = u_0^n, u_t^n(x, y, 0) = u_1^n \end{cases} \quad (4)$$

形如 $u^n = u^n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n \tau_k e_k$ 的解, 其中 $\tau_k = \tau_k(t)$ 待定, 于是有

$$\begin{cases} (\tau_k)_t + D_k \tau_k = (g, e_k)_2, & t \in \mathbb{R}^+, \\ \tau_k(0) = (u_0, e_k)_{H_*^2}, (\tau_k)_t(0) = (u_1, e_k)_2, & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $D_k = \|e_k\|_{H_*^2}^2$ ($k = 1, 2, \dots, n$)。根据经典的常微分理论^[8], 可知问题(5)存在唯一解 $\tau_k(t)$ 。因此, 对任意 $T > 0$, 问题(4)有解 $u^n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n \tau_k e_k, t \in [0, t_n)$ ($0 < t_n \leq T$)。

将(4)中的第一个式子两边同时乘以 $(\tau_k)_t$, 并关于 k 求和, 我们得到

$$\frac{d}{dt} \left[\|u_t^n\|_2^2 + \|u^n\|_{H_*^2}^2 \right] = 2(u_t^n, u_t^n)_2 + 2(u^n, u_t^n)_{H_*^2} = 2(g, u_t^n)_2.$$

于是

$$\|u_t^n\|_2^2 + \|u^n\|_{H^2}^2 = \|u_1^n\|_2^2 + \|u_0^n\|_{H^2}^2 + 2 \int_0^t (g, u_t^n)_2 ds.$$

由 $g \in L^2(\Omega \times [0, T])$ 及 Hölder 不等式, 可得

$$\int_0^t (g, u_t^n)_2 ds \leq \int_0^t \|g\|_2 \|u_t^n\|_2 ds \leq \left(\int_0^t \|g\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u_t^n\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_0^t \|u_t^n\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此,

$$\|u_t^n\|_2^2 + \|u^n\|_{H^2}^2 \leq c_1 + c_2 \left(\int_0^t \|u_t^n\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

则由引理 3 和 (6) 式, 得如下估计

$$\|u_t^n\|_2^2 + \|u^n\|_{H^2}^2 \leq c_3 + c_4 T.$$

因此, 在 $C^0([0, T]; H_*^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ 中有收敛子列 (仍记为 $\{u^n\}$).

由于 $g \in L^2(\Omega \times [0, T])$, 我们可令 $g = \sum_{k=1}^{\infty} g^k(t) e_k$, 于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (g^k(t))^2 \rightarrow 0. \tag{7}$$

取 $m > n \geq 1$, 设

$$u^{n,m} := u^n - u^m, u_0^{n,m} := u_0^n - u_0^m, u_1^{n,m} := u_1^n - u_1^m,$$

则有

$$\begin{cases} \left((u^{n,m})_t, (u^{n,m})_t \right)_2 + \left(\Delta^2 u^{n,m}, (u^{n,m})_t \right)_{H^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} g^k(t) e_k, (u^{n,m})_t \right)_2, & (x, y, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u^{n,m}(x, y, 0) = u_0^{n,m}, (u^{n,m})_t(x, y, 0) = u_1^{n,m}, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

因此,

$$\|(u^{n,m})_t\|_2^2 + \|u^{n,m}\|_{H^2}^2 = C_{n,m} + 2 \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} g^k(s) e_k, (u^{n,m})_t \right)_2 ds \leq C_{n,m} + 2 \int_0^t \left(\sum_{k=n+1}^m (g^k(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|(u^{n,m})_t\|_2 dt, \tag{9}$$

其中 $C_{n,m} = \|u_1^{n,m}\|_2^2 + \|u_0^{n,m}\|_{H^2}^2$.

当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, $C_{m,n} \rightarrow 0$. 于是由式 (7)–(9) 可知 $\{u^n\}$ 在 $C^0([0, T]; H_*^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ 中是 Cauchy 序列. 因此, 存在唯一的 $u \in C^0([0, T]; H_*^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ 使得 $u^n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$.

对任意 $v \in H_*^2(\Omega)$ 以及 $t \in [0, T]$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 方程

$$\begin{cases} \left((u^n)_t, v \right)_2 + (u^n, v)_{H^2} = (g, v)_2, & (x, y, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u^n(x, y, 0) = u_0^n, (u^n)_t(x, y, 0) = u_1^n, & (x, y) \in \Omega \end{cases}$$

蕴含了 u 是方程 (3) 的一个弱解。

(唯一性) 设 u_1 和 u_2 是 (3) 的两个弱解且 $u_1 \neq u_2$, 则有

$$\left((u_1)_t, v \right)_2 + (u_1, v)_{H^2} = (g, v)_2, \left((u_2)_t, v \right)_2 + (u_2, v)_{H^2} = (g, v)_2, \quad t \in [0, T],$$

将两个方程相减, 并令 $v = u_1 - u_2$, 得

$$\|v\|_2^2 + \|v\|_{H^2}^2 = 0.$$

即证得唯一性. 证毕。

3 定理1的证明

设 $v \in C^0([0, T]; H^2(\Omega))$, 令 $\Gamma(v) = [\Phi(v), v] + f(x, y, t) - h(x, y, v) + \lambda(v)v_{xx}$, 我们考虑下面的问题:

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = \Gamma(v), & (x, y, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u = u_{xx} = 0, & (x, y, t) \in \{0, \pi\} \times (-l, l) \times [0, T], \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xxy} = 0, & (x, y, t) \in (0, \pi) \times \{-l, l\} \times [0, T], \\ u(x, y, 0) = u_0, u_x(x, y, 0) = u_1, & (x, y) \in \Omega_0. \end{cases} \quad (10)$$

引理4 若 $u_0 \in H^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, 则(10)存在唯一的弱解 u 。

证明 因为 $v \in C^0([0, T]; H^2(\Omega))$ 以及引理1—2, 所以

$$\|[\Phi(v), v]\|_2 \leq C_0 \|v\|_{H^2}^3 < \infty, \text{ 即有 } [\Phi(v), v] \in L^2(\Omega \times [0, T]);$$

$$\|\lambda(v)v_{xx}\|_2^2 = \lambda^2(v) \|v_{xx}\|_2^2 = \left(-P + S \int_{\Omega} v_x^2 dx dy\right)^2 \int_{\Omega} v_{xx}^2 dx dy \leq C \|v_{xx}\|_2^2 < \infty,$$

即有 $\lambda(v)v_{xx} \in L^2(\Omega \times [0, T])$ 。

另外, 由 $v \in C^0([0, T]; H^2(\Omega))$ 和 $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ 可得 $v \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$, 又由 h 满足(H1), 知

$$\|h(x, y, v)\|_2^2 = \int_{\Omega} |h(x, y, v)|^2 dx dy \leq C \int_{\Omega} |v|^{2p-2} dx dy \leq C \|v\|_{C^0}^{2p-2} < \infty,$$

即有 $h(x, y, v) \in L^2(\Omega \times [0, T])$ 。

综上所述, $\Gamma(v) \in L^2(\Omega \times [0, T])$ 。由定理2知, 问题(10)存在唯一的弱解 u 。证毕。

设 $T > 0$, 记 $Z_T = C^0([0, T]; H^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$, 易知 Z_T 是一个 Banach 空间, 其范数可定义为:

$$\|u\|_{Z_T} = \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u\|_{H^2}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|u_t\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, u \in Z_T.$$

对任意给定 $M > 0$, 令

$$B := \{u \in Z_T \mid \|u\|_{Z_T} \leq M; u(x, y, 0) = u_0; u_x(x, y, 0) = u_1\}.$$

由问题(10)存在唯一解, 我们可以定义一个映射:

$$\gamma: B \rightarrow Z_T, \gamma(v) = u.$$

引理5 当 $T > 0$ 充分小时, γ 是一个压缩映射。

证明 将(10)式中的第一个式子两端乘以 u_t , 然后在 $\Omega \times (0, t)$ 上积分, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{H^2}^2 &= \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^2}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} [\Phi(v), v] u_t dx dy ds - \\ &\int_0^t \int_{\Omega} h(x, y, v) u_t dx dy ds + \int_0^t \int_{\Omega} \lambda(v)(v)_{xx} u_t dx dy ds. \end{aligned} \quad (11)$$

由 Hölder 不等式, 引理1—2 和(H1), 可得

$$\int_{\Omega} [\Phi(v), v] u_t dx dy \leq \|[\Phi(v), v]\|_2 \|u_t\|_2 \leq \alpha_3 \|v\|_{H^2} \|\Phi(v)\|_{W^{2,\infty}} \|u_t\|_2 \leq C_1 \|v\|_{H^2}^3 \|u_t\|_2; \quad (12)$$

$$-\int_{\Omega} h(x, y, v) u_t dx dy \leq C \int_{\Omega} |v|^{p-1} |u_t| dx dy \leq C \|v\|_{C^0}^{p-1} \int_{\Omega} |u_t| dx dy \leq C_2 \|v\|_{H^2}^{p-1} \|u_t\|_2; \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \lambda(v)(v)_{xx} u_t dx dy \leq \lambda(v) \|v_{xx}\|_2 \|u_t\|_2 \leq C \|v\|_{H^2}^2 \|v_{xx}\|_2 \|u_t\|_2 \leq C_3 \|v\|_{H^2}^3 \|u_t\|_2. \quad (14)$$

将公式(12)–(14)代入公式(11)可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{H^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}^2 + C_1 \int_0^t \|v\|_{H^2}^3 \|u_t\|_2 ds + \\
 & \quad C_2 \int_0^t \|v\|_{H^2}^{p-1} \|u_t\|_2 ds + C_3 \int_0^t \|v\|_{H^2}^3 \|u_t\|_2 ds \leq \\
 & \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}^2 + C_1 \int_0^t \|v\|_{Z_T}^3 \|u_t\|_2 ds + C_2 \int_0^t \|v\|_{Z_T}^{p-1} \|u_t\|_2 ds + C_3 \int_0^t \|v\|_{Z_T}^3 \|u_t\|_2 ds \leq \tag{15} \\
 & \quad \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}^2 + (C_1 M^3 + C_2 M^{p-1} + C_3 M^3) \int_0^t \|u_t\|_2 ds \leq \\
 & \quad \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_{H^2}^2 + (C_1 M^3 + C_2 M^{p-1} + C_3 M^3) \sqrt{T} \left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

取 \$M\$ 足够大,使得 \$\|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_{H^2}^2 \leq \frac{M^2}{2}\$, 则有

$$\|u_t\|_2^2 \leq \frac{M^2}{2} + K_1 \sqrt{T} \left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, K_1 = 2(C_1 M^3 + C_2 M^{p-1} + C_3 M^3).$$

由引理 3, 我们得到

$$\|u_t\|_2^2 + \|u\|_{H^2}^2 \leq \frac{M^2}{2} + \frac{M^2 K_1 T \sqrt{T}}{4} + \frac{K_1 T^2}{2} + K_1 \sqrt{T} \leq \frac{M^2}{2} + \frac{6 + M^2}{4} K_1 \begin{cases} T^2, & T \geq 1, \\ \sqrt{T}, & T < 1. \end{cases}$$

取 \$T \leq \min \left\{ \left(\frac{2M^2}{(6 + M^2)K_1} \right)^2, \sqrt{\frac{2M^2}{(6 + M^2)K_1}} \right\}\$, 则 \$\|u\|_{Z_T}^2 \leq M^2\$。这就证明了 \$\gamma: B \to B\$。

下面证明 \$\gamma\$ 是压缩映射。设 \$v_1, v_2 \in B\$ 且 \$v_1 \neq v_2\$, 则 \$(u)^j = \gamma(v_j) (j = 1, 2)\$。于是 \$u = (u)^1 - (u)^2\$ 满足

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = \Gamma(v_1) - \Gamma(v_2), & (x, y, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u = u_{xx} = 0, & (x, y, t) \in \{0, \pi\} \times (-l, l) \times [0, T], \\ u_{yy} + \sigma u_{xx} = u_{yyy} + (2 - \sigma)u_{xxy} = 0, & (x, y, t) \in (0, \pi) \times \{-l, l\} \times [0, T], \\ u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega, \end{cases}$$

其中 \$\Gamma(v_1) - \Gamma(v_2) = [\Phi(v_1), v_1] - [\Phi(v_2), v_2] + h(x, y, v_2) - h(x, y, v_1) + \lambda(v_1)(v_1)_{xx} - \lambda(v_2)(v_2)_{xx}\$。

将上式中的第一个式子两端乘以 \$u_t\$, 然后在 \$\Omega \times (0, t)\$ 上积分, 我们得到

$$\begin{aligned}
 & \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{H^2}^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} (\Gamma(v_1) - \Gamma(v_2)) u_t dx dy ds = \\
 & 2 \int_0^t \int_{\Omega} ([\Phi(v_1), v_1] - [\Phi(v_2), v_2]) u_t dx dy ds + 2 \int_0^t \int_{\Omega} (h(x, y, v_2) - h(x, y, v_1)) u_t dx dy ds + \\
 & 2 \int_0^t \int_{\Omega} (\lambda(v_1)(v_1)_{xx} - \lambda(v_2)(v_2)_{xx}) u_t dx dy ds := \\
 & \quad \int_0^t I_1 ds + \int_0^t I_2 ds + \int_0^t I_3 ds. \tag{16}
 \end{aligned}$$

设 \$v = v_1 - v_2\$, 则有

① 由 \$\Delta^2(\Phi(v_1) - \Phi(v_2)) = -[v_1, v_1] + [v_2, v_2] = -[v_1 - v_2, v_1 + v_2]\$, 引理 1-2 以及 \$\Phi\$ 是 (2) 的唯一解, 得

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{W^{2,\infty}} \leq C_1 \|v\|_{H^2} \|v_1 + v_2\|_{H^2}$$

因此,

$$I_1 = 2 \int_{\Omega} \{ [\Phi(v_1), v_1] - [\Phi(v_2), v_2] \} u_t dx dy = 2 \int_{\Omega} \{ [\Phi(v_1), v] + [\Phi(v_1) - \Phi(v_2), v_2] \} u_t dx dy \leq$$

$$\begin{aligned} & 2\|\Phi(v_1), v\|_2 \|u_t\|_2 + 2\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2), v_2\|_2 \|u_t\|_2 \leq \\ & C_4 \left(\|v\|_{H^2} \|\Phi(v_1)\|_{W^{2,\infty}} + \|v_2\|_{H^2} \|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{W^{2,\infty}} \right) \|u_t\|_2 \leq \\ & C_4 \left(\|v\|_{H^2} \|v_1\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^2} \|v_2\|_{H^2} \|v_1 + v_2\|_{H^2} \right) \|u_t\|_2 \leq C_4 M^2 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2. \end{aligned}$$

② 由 Hölder 不等式和 (H2), 得

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_{\Omega} \{h(x, y, v_2) - h(x, y, v_1)\} u_t dx dy \leq \\ & 2 \|h(x, y, v_2) - h(x, y, v_1)\|_2 \|u_t\|_2 \leq 2L_I \|v\|_2 \|u_t\|_2 \leq C_5 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2. \end{aligned}$$

③ 首先

$$\begin{aligned} \lambda(v_1)(v_1)_{xx} - \lambda(v_2)(v_2)_{xx} &= \left(-P + S \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy \right) (v_1)_{xx} - \left(-P + S \int_{\Omega} (v_2)_x^2 dx dy \right) (v_2)_{xx} = \\ & -P((v_1)_{xx} - (v_2)_{xx}) + S \left((v_1)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy - (v_2)_{xx} \int_{\Omega} (v_2)_x^2 dx dy \right) = \\ -P(v)_{xx} + S \left((v_1)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy - (v_2)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy + (v_2)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy - (v_2)_{xx} \int_{\Omega} (v_2)_x^2 dx dy \right) = \\ & -P(v)_{xx} + S \left((v)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy + (v_2)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 - (v_2)_x^2 dx dy \right). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I_3 &= 2 \int_{\Omega} \{ \lambda(v_1)(v_1)_{xx} - \lambda(v_2)(v_2)_{xx} \} u_t dx dy = \\ & 2 \int_{\Omega} -P(v)_{xx} u_t dx dy + 2 \int_{\Omega} S \left((v)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy \right) u_t dx dy + 2 \int_{\Omega} S \left((v_2)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 - (v_2)_x^2 dx dy \right) u_t dx dy = \\ & 2i_1 + 2i_2 + 2i_3, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} i_1 &= -P \int_{\Omega} v_{xx} u_t dx dy \leq P \|v_{xx}\|_2 \|u_t\|_2 \leq c_1 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2; \\ i_2 &= S \int_{\Omega} \left((v)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 dx dy \right) u_t dx dy \leq S \|v_1\|_{H^1}^2 \int_{\Omega} |v_{xx} u_t| dx dy \leq S \|v_1\|_{H^1}^2 \|v_{xx}\|_2 \|u_t\|_2 \leq c_2 M^2 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2; \\ i_3 &= S \int_{\Omega} \left((v_2)_{xx} \int_{\Omega} (v_1)_x^2 - (v_2)_x^2 dx dy \right) u_t dx dy = S \int_{\Omega} \left[((v_1)_x - (v_2)_x) ((v_1)_x + (v_2)_x) \right] dx dy \int_{\Omega} (v_2)_{xx} u_t dx dy = \\ & S \int_{\Omega} \left[(v)_x ((v_1)_x + (v_2)_x) \right] dx dy \int_{\Omega} (v_2)_{xx} u_t dx dy \leq S \|(v)_x\|_2 \|(v_1)_x + (v_2)_x\|_2 \|(v_2)_{xx}\|_2 \|u_t\|_2 \leq \\ & S \left(\|(v_1)_x\|_2 + \|(v_2)_x\|_2 \right) \|(v)_x\|_2 \|(v_2)_{xx}\|_2 \|u_t\|_2 \leq c_3 M^2 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2, \end{aligned}$$

则

$$I_3 = 2 \int_{\Omega} \{ \lambda(v_1)(v_1)_{xx} - \lambda(v_2)(v_2)_{xx} \} u_t dx dy \leq 2(c_1 + c_2 M^2 + c_3 M^2) \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2 = C_6 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2.$$

因此, (16) 式可估计为

$$\begin{aligned} \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{H^2}^2 &\leq \int_0^t C_4 M^2 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2 + C_5 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2 + C_6 \|v\|_{H^2} \|u_t\|_2 ds \leq \\ & (C_4 M^2 + C_5 + C_6) \int_0^t \|v_1 - v_2\|_{H^2} \|u_t\|_2 ds \leq \\ & (C_4 M^2 + C_5 + C_6) \sqrt{t} \|v_1 - v_2\|_{Z_T} \left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_2 \sqrt{T} \|v_1 - v_2\|_{Z_T} \left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

其中 $K_2 = C_4 M^2 + C_5 + C_6$ 与 T 无关。

由 $0 \leq F'(t) \leq K\sqrt{F(t)} \Rightarrow \sqrt{F(t)} \leq KT/2$, 可得 $\left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{K_2}{2} T\sqrt{T} \|v_1 - v_2\|_{Z_T}$, 于是

$$\|u_t\|_2^2 + \|u\|_{H^2}^2 \leq \frac{K_2^2}{2} T^2 \|v_1 - v_2\|_{Z_T}^2,$$

即

$$\|(u)^1 - (u)^2\|_{Z_T} \leq \frac{\sqrt{2} K_2}{2} T \|v_1 - v_2\|_{Z_T},$$

其中 C 与 T 无关。因此, 当 T 足够小时, γ 是一个压缩映射。证毕。

由引理 4—5 以及不动点理论, 知映射 γ 的一个不动点就是问题 (1) 的唯一解。

参考文献:

- [1] GAZZOLA F, WANG Y D. Modeling Suspension Bridges through the von Kármán Quasilinear Plate Equations[M]//Contributions to Nonlinear Elliptic Equations and Systems. Cham: Springer International Publishing, 2015: 269–297. DOI: 10.1007/978-3-319-19902-3_18.
- [2] GAZZOLA F, FERRERO A. A Partially Hinged Rectangular Plate as a Model for Suspension Bridges[J]. *Discrete Continuous Dyn Syst*, 2015, **35**(12): 5879–5908. DOI: 10.3934/dcds.2015.35.5879.
- [3] WANG Y D. An Evolution von Kármán Equation Modeling Suspension Bridges[J]. *Nonlinear Anal*, 2018, **169**: 59–78. DOI: 10.1016/j.na.2017.12.002.
- [4] 王永达. 一类模拟悬索桥的 von Kármán 方程的解的存在性[J]. *数学物理学报*, 2022, **42**(4): 1112–1121. DOI: 10.3969/j.issn.1003-3998.2022.04.012.
- WANG Y D. Existence Results for von Kármán Equations Modeling Suspension Bridges[J]. *Acta Math Sci*, 2022, **42**(4): 1112–1121. DOI: 10.3969/j.issn.1003-3998.2022.04.012.
- [5] AL-GWAIZ M, BENCI V, GAZZOLA F. Bending and Stretching Energies in a Rectangular Plate Modeling Suspension Bridges[J]. *Nonlinear Anal*, 2014, **106**(211): 18–34. DOI: 10.1016/j.na.2014.04.011.
- [6] KANG J R. Existence and Blow-up of Solutions for von Kármán Equations with Time Delay and Variable Exponents[J]. *Appl Math Comput*, 2020, **371**(4): 124917. DOI: 10.1016/j.amc.2019.124917.
- [7] ARIOLI G, GAZZOLA F. On a Nonlinear Nonlocal Hyperbolic System Modeling Suspension Bridges[J]. *Milan J Math*, 2015, **83**(2): 211–236. DOI: 10.1007/s00032-015-0239-9.
- [8] 王高雄, 周之铭, 朱思铭. 常微分方程[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- WANG G X, ZHOU Z M, ZHU S M. Ordinary differential equation[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006.