

交换环 Z_n 上的零除数图的 Gutman 指数

苗红丽,梅银珍*

(中北大学 数学学院,山西 太原 030051)

摘要:交换环上的零除数图是一个无向的简单连通图,其顶点集为环上的零因子的集合。基于度与距离的 Gutman 指数,本文主要采用分类讨论的方法,首先对环上的零除数图进行顶点划分,其次对零除数图的诱导子图上的度与距离及相互之间的连接关系进行讨论,从而刻画出了某些情况下的零除数图的 Gutman 指数。

关键词:Gutman 指数;交换环;零除数图;诱导子图

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2024)02-0295-07

The Gutman Index of the Zero-divisor Graph on the Commutative Ring Z_n

MIAO Hongli, MEI Yinzhen*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: A zero-divisor graph over a commutative ring is an undirected simple connected graph, whose vertex set is the set of zero factors over the ring. Based on the Gutman index of degree and distance, the method of classification discussion is mainly adopted in this paper. Firstly, the vertex of the zero-divisor graph on the ring is divided. Secondly, the degree and distance on the induced subgraphs of the zero-divisor graph and the connection relationship between them are discussed. Thus the Gutman index of the zero-divisor graph in some cases is described.

Key words: Gutman index; commutative ring; zero-divisor graph; induced subgraph

0 引言

拓扑指数是化学图论中重要的内容之一。它是分子结构的数学描述符,被用来反映分子的大小、形状等特征,对实现分子结构信息的数值化起着非常重要的作用。1947年,美国化学家 Wiener^[1]提出了第一种拓扑指数-Wiener 指数,它被用来估计烷烃的沸点。随后,科研工作者们根据需要相继提出 200 余种其他的拓扑指数,如 Zagreb 指数、Randić 指数、Schultz 指数、Gutman 指数等。其中 Gutman 指数也被称为第二类舒尔茨指数,该指数在单圈图、双圈图、刺图等已经取得了一些结果,关于其他的一些研究成果,可查阅文献[2-6]。

交换环上的零除数图的研究是近年来出现的一个研究热点。它是与图论相结合的一个研究课题。交换环上的零除数图的概念最先是在 1988 年由 Beck^[7]提出的,当时他主要讨论了交换环的着色问题。接着,Anderson 和 Livingston^[8]在 1999 年给出了将图与交换环相关联的方法。之后更多的专家学者加入了关于零除数图的研究^[9-15]。其中 Selvakumar 等^[9]讨论了环上高斯整数环的零

收稿日期:2022-12-19;接受日期:2023-03-23

基金项目:国家自然科学基金(61774137);山西省回国留学人员科研项目(2022-149);山西省自然科学基金(20210302124212)

作者简介:苗红丽(1997-),女,山西吕梁人,硕士研究生,研究方向为图论及其应用。E-mail:1826902935@qq.com

* 通信作者:梅银珍(MEI Yinzhen),E-mail:myzmath@nuc.edu.cn

引文格式:苗红丽,梅银珍.交换环 Z_n 上的零除数图的 Gutman 指数[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(2):295-301. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023063

除数图的维纳指数; Asir 等^[10]给出了一种计算任意正整数的环上的零除数图的维纳指数的构造方法; Magi 等^[11]研究了零除数图的邻接矩阵以及特征值; Gürsoy 等^[12]计算了一些交换环上的零除数图的 Sombor 指数; Suthar 等^[13]给出了零除数图的线图在环上的覆盖; Pirzada 等^[14]研究了关于环的零除数图的无信号拉普拉斯谱; Yalcin^[15]给出了几个特殊的零除数图的度距离。

本文是对前人有关交换环上的零除数图的拓扑指数的研究从只有度到度与距离相结合的拓展,刻画了一些特殊情况时,零除数图的 Gutman 指数。此研究内容也适用于其他化学图的有关度与距离相结合的拓扑指数的研究。

1 准备工作

定义 1 设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是环,若环中乘法适合交换律,则称 R 是交换环^[16]。如果 a 和 b 是环 R 上的两个非零元素使得 $ab = 0$,那么 a 和 b 是 R 的零因子。 R 上的零因子集合可记为 $Z(R)$,零除数图 $\Gamma(Z_n)$ 是以 $Z(Z_n)$ 为顶点的无向简单连通图。

定义 2^[17] 图 G 是一个有序三元组 $(V(G), E(G), \phi(G))$,其中 $V(G)$ 是非空的顶点集, $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集,而 $\phi(G)$ 是关联函数,它使 G 的每条边对应 G 的无序顶点对(不必相异)。若 e 是一条边,而 u, v 是使得 $\phi_G(e) = uv$ 的顶点,则称 e 连接 u 和 v ,顶点 u 和 v 称为 e 的端点。

定义 3 图 G 中顶点的个数称为图 G 的阶数,即当 $n = |V(G)|$ 时,称图 G 为 n 阶图。

定义 4 无环无重边的图称为简单图。

定义 5 G 中与顶点 u 相连的边数称为顶点 u 的度,记作 $d(u)$ 。

定义 6 图 G 中两个顶点 u, v 的最短轨道的长度,称为 u 与 v 之间的距离,记作 $d(u, v)$ 。

定义 7 设 G 为 n 阶简单图,若 G 的任意两个顶点均邻接,则称 G 为 n 阶完全图,记为 K_n 。

定义 8 在图 G 中,如果顶点集 $V(G)$ 可以划分成两个类使得任意一条边的两个端点分别属于不同的类中(即同一类中的顶点不邻接),则称 G 为二部图。若二部图中,不同类中任意两个顶点均邻接,则称它为完全二部图。如果这两个类分别有 m 和 n 个顶点,那么此时的完全二部图用 $K_{m,n}$ 表示。特别地,若 $m = 1$,则称 $K_{1,n}$ 为星图,其中 $K_{1,n}$ 中度数为 n 的顶点称为星图的中心。

定义 9 设 $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$,若 $V' \subseteq V$, $E' = \{(u, v) | u, v \in V', (u, v) \in E\}$,则称 G' 为 G 的诱导子图。需注意的是,对于 V' ,只要在 G 中有边,那么在 G' 中同样应该有边。

定义 10^[2] 图 R 的 Gutman 指数是指无序顶点对的距离与其顶点度的乘积的和,即 $\text{Gut}(R) = \sum_{\{u, v\} \in V(R)} d(u)d(v)d(u, v)$,简写为 $G(R) = \sum_{\{u, v\} \in V(R)} d(u)d(v)d(u, v)$ 。而对图上任意的顶点 u 的 Gutman 指数是 $G(u) = d(u) \sum_{v \in V(G)} d(v)d(u, v)$ 。图 R 的 Gutman 指数也可表示为

$$G(R) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(R)} \left(d(u) \sum_{v \in V(G)} d(v)d(u, v) \right) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(R)} G(u).$$

2 $\Gamma(Z_n)$ 的 Gutman 指数

为了证明过程方便简洁,在下文中均用 $G_i(u)$ 表示当 $u \in A_i$ 时的 Gutman 指数。

定理 1 若 p 是任意的素数,则 $G(\Gamma(Z_p)) = 0$ 。

证明 设 p 是任意的素数,显然 $Z(Z_p) = \emptyset$,即 $\Gamma(Z_p)$ 上不存在顶点,故 $G(\Gamma(Z_p)) = 0$ 。

定理 2 若 p 是任意的奇素数,则 $G(\Gamma(Z_{p^2})) = \frac{(p-1)(p-2)^3}{2}$ 。

证明 设 p 是任意的奇素数, 则有 $V(\Gamma(Z_{p^2})) = A$, 其中

$$A = \{px \mid x = 1, 2, \dots, p-1\} \text{ 且 } |A| = p-1.$$

若 $u, v \in V(\Gamma(Z_{p^2}))$, 则

$$d(u) = d(v) = p-2, d(u, v) = 1.$$

因此 $\Gamma(Z_{p^2})$ 是有 $p-1$ 个顶点的完全图, 即 $\Gamma(Z_{p^2}) \cong K_{p-1}$. 故

$$G(\Gamma(Z_{p^2})) = \sum_{(u,v) \in V(\Gamma(Z_{p^2}))} d(u)d(v)d(u,v) = \frac{(p-1)(p-2)^3}{2}.$$

定理3 若 p 是任意的奇素数, 则

$$G(\Gamma(Z_{p^3})) = \frac{(p-1)(5p^5 - 12p^4 - 2p^3 + 18p^2 - 2p - 8)}{2}.$$

证明 设 p 是任意的奇素数, 则 $V(\Gamma(Z_{p^3})) = A_1 \cup A_2$, 其中

$$A_1 = \{px \mid x = 1, 2, \dots, p^2-1, p^2 \mid x\}, A_2 = \{p^2x \mid x = 1, 2, \dots, p-1\}.$$

且 $|A_1| = p^2 - p, |A_2| = p-1, \Gamma(Z_{p^3})$ 包含 p^2-1 个顶点。

若 $x \in A_1, y \in A_2$, 则 $d(x, y) = 1$ 。

若 $u_1, v_1 \in A_1, u_2, v_2 \in A_2$, 则

$$\begin{aligned} d(u_1) &= d(v_1) = p-1, d(u_1, v_1) = 2, \\ d(u_2) &= d(v_2) = p^2-2, d(u_2, v_2) = 1. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} G_1(u) &= d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u,v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u,v) = \\ & (p-1)[2(p-1)(p^2-p-1) + (p^2-2)(p-1)] = (p-1)^2(3p^2-2p-4). \\ G_2(u) &= d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u,v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u,v) = \\ & (p^2-2)[(p-1)(p^2-p) + (p^2-2)(p-2)] = (p^2-2)(2p^3-4p^2-p+4). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} G(\Gamma(Z_{p^3})) &= \frac{1}{2} \sum_{u \in V(\Gamma(Z_{p^3}))} G(u) = \frac{1}{2} \left[\sum_{u \in A_1} G_1(u) + \sum_{u \in A_2} G_2(u) \right] = \\ & \frac{1}{2} \left[(p-1)^2(3p^2-2p-4)(p^2-p) + (p^2-2)(2p^3-4p^2-p+4)(p-1) \right] = \\ & \frac{(p-1)(5p^5 - 12p^4 - 2p^3 + 18p^2 - 2p - 8)}{2}. \end{aligned}$$

定理4 若 p 是任意的奇素数, 则

$$G(\Gamma(Z_{p^4})) = \frac{1}{2}(p-1)(12p^7 - 23p^6 - 5p^5 + 8p^4 + 24p^3 - 2p^2 - 8p - 8).$$

证明 设 p 是任意的奇素数, 则 $V(\Gamma(Z_{p^4})) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 其中

$$A_1 = \{px \mid x = 1, 2, \dots, p^3-1, p^2 \mid x, p^3 \mid x\},$$

$$A_2 = \{p^2x \mid x = 1, 2, \dots, p^2-1, p^3 \mid x\}, A_3 = \{p^3x \mid x = 1, 2, \dots, p-1\},$$

且 $|A_1| = p^3 - p^2, |A_2| = p^2 - p, |A_3| = p-1, \Gamma(Z_{p^4})$ 有 p^3-1 个顶点, 其诱导子图的连接图如图1。

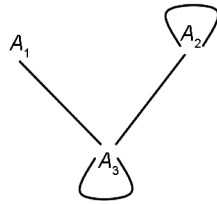


图1 $\Gamma(Z_{p^3})$ 的诱导子图的连接图

Fig. 1 Connection graph of $\Gamma(Z_{p^3})$ induced subgraph

若 $x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3$, 则

$$d(x, y) = 2, d(x, z) = 1, d(y, z) = 1.$$

若 $u_1, v_1 \in A_1, u_2, v_2 \in A_2, u_3, v_3 \in A_3$, 则

$$d(u_1) = d(v_1) = p - 1, d(u_2) = d(v_2) = p^2 - 2, d(u_3) = d(v_3) = p^3 - 2, \\ d(u_1, v_1) = 2, d(u_2, v_2) = 1, d(u_3, v_3) = 1.$$

所以

$$G_1(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_3} d(v)d(u, v) = \\ (p - 1)[2(p - 1)(p^3 - p^2 - 1) + 2(p^2 - 2)(p^2 - p) + (p^3 - 2)(p - 1)] = \\ (p - 1)(5p^4 - 7p^3 - 2p^2 + 4).$$

$$G_2(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_3} d(v)d(u, v) = \\ (p^2 - 2)[2(p - 1)(p^3 - p^2) + (p^2 - 2)(p^2 - p - 1) + (p^3 - 2)(p - 1)] = \\ (p^2 - 2)(4p^4 - 6p^3 - p^2 + 4).$$

$$G_3(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_3} d(v)d(u, v) = \\ (p^3 - 2)[(p - 1)(p^3 - p^2) + (p^2 - 2)(p^2 - p) + (p^3 - 2)(p - 2)] = \\ (p^3 - 2)(3p^4 - 5p^3 - p^2 + 4).$$

故

$$G(\Gamma(Z_{p^3})) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(\Gamma(Z_{p^3}))} G(u) = \frac{1}{2} \left[\sum_{u \in A_1} G_1(u) + \sum_{u \in A_2} G_2(u) + \sum_{u \in A_3} G_3(u) \right] = \\ \frac{1}{2} [(p - 1)(5p^4 - 7p^3 - 2p^2 + 4)(p^3 - p^2) + (p^2 - 2)(4p^4 - 6p^3 - p^2 + 4)(p^2 - p) + \\ (p^3 - 2)(3p^4 - 5p^3 - p^2 + 4)(p - 1)] = \frac{1}{2} (p - 1)(12p^7 - 23p^6 - 5p^5 + 8p^4 + 24p^3 - 2p^2 - 8p - 8).$$

定理5 若 q 是任意的奇素数, 则 $G(\Gamma(Z_{2q})) = 2q^2 - 5q + 3$ 。

证明 因为 $\Gamma(Z_{2q})$ 包含 q 个顶点并且顶点的集合为 $\{2, 2 \cdot 2, \dots, 2 \cdot (q - 1), q\}$ 。显然, 顶点 q 与其他任意顶点邻接, 则 $d(q) = q - 1, d(2x) = 1, x = 1, 2, \dots, q - 1, \Gamma(Z_{2q})$ 是一个星图, 且 $\Gamma(Z_{2q}) \cong K_{1, q-1}$, 其中 q 为图的中心。故

$$G(\Gamma(Z_{2q})) = \sum_{\{u, v\} \in V(\Gamma(Z_{2q}))} d(u)d(v)d(u, v) = \left[2 \times \frac{(q - 1)(q - 2)}{2} + (q - 1)^2 \right] = 2q^2 - 5q + 3.$$

定理6 若 q 是任意的奇素数, 则 $G(\Gamma(Z_{3q})) = 10q^2 - 24q + 14$ 。

证明 设 q 是任意的奇素数, 则 $V(\Gamma(Z_{3q})) = A_1 \cup A_2$, 其中

$$A_1 = \{3x \mid x = 1, 2, \dots, q-1\}, A_2 = \{qx \mid x = 1, 2\} \text{ 且 } |A_1| = q-1, |A_2| = 2.$$

若 $u_1, v_1 \in A_1, q, 2q \in A_2$, 则

$$d(u_1) = d(v_1) = 2, d(u_1, v_1) = 2,$$

$$d(q) = d(2q) = q-1, d(q, 2q) = 2, d(u_1, q) = d(u_1, 2q) = 1.$$

显然, $\Gamma(Z_{3q})$ 是一个完全二部图, 且 $\Gamma(Z_{3q}) \cong K_{2, q-1}$. 所以

$$G_1(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v) d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v) d(u, v) = 8(q-2) + 4(q-1) = 12q - 20.$$

$$G_2(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v) d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v) d(u, v) = 2(q-1)^2 + 2(q-1)^2 = 4(q-1)^2.$$

故

$$\begin{aligned} G(\Gamma(Z_{3q})) &= \frac{1}{2} \sum_{u \in V(\Gamma(Z_{3q}))} G(u) = \frac{1}{2} \left[\sum_{u \in A_1} G_1(u) + \sum_{u \in A_2} G_2(u) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [(q-1)(12q-20) + 8(q-1)^2] = 10q^2 - 24q + 14. \end{aligned}$$

定理7 若 p, q 是任意奇素数且 $p \neq q$, 则

$$G(\Gamma(Z_{pq})) = (p-1)(q-1)(3pq - 4p - 4q + 5).$$

证明 设 $p \neq q$ 是任意奇素数, 则 $V(\Gamma(Z_{pq})) = A_1 \cup A_2$, 其中

$$A_1 = \{px \mid x = 1, 2, \dots, q-1, q \mid x\}, A_2 = \{qx \mid x = 1, 2, \dots, p-1, p \mid x\}.$$

且 $|A_1| = q-1, |A_2| = p-1$.

若 $x \in A_1, y \in A_2$, 则 $d(x, y) = 1$.

若 $u_1, v_1 \in A_1, u_2, v_2 \in A_2$, 则

$$d(u_1) = d(v_1) = p-1, d(u_2) = d(v_2) = q-1, d(u_1, v_1) = 2, d(u_2, v_2) = 2.$$

显然, $\Gamma(Z_{pq})$ 是一个完全二部图, 且 $\Gamma(Z_{pq}) \cong K_{p-1, q-1}$. 所以

$$\begin{aligned} G_1(u) &= d(u) \sum_{v \in A_1} d(v) d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v) d(u, v) = \\ &= (p-1)[2(p-1)(q-2) + (q-1)(p-1)] = (p-1)^2(3q-5). \\ G_2(u) &= d(u) \sum_{v \in A_1} d(v) d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v) d(u, v) = \\ &= (q-1)[(p-1)(q-1) + 2(q-1)(p-2)] = (q-1)^2(3p-5). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} G(\Gamma(Z_{pq})) &= \frac{1}{2} \sum_{u \in V(\Gamma(Z_{pq}))} G(u) = \frac{1}{2} \left[\sum_{u \in A_1} G_1(u) + \sum_{u \in A_2} G_2(u) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [(q-1)(p-1)^2(3q-5) + (p-1)(q-1)^2(3p-5)] = \\ &= (p-1)(q-1)(3pq - 4p - 4q + 5). \end{aligned}$$

定理8 若 $p \neq q$ 是任意的奇素数, 则

$$G(\Gamma(Z_{pq^2})) = \frac{1}{2}(q-1)(27p^2q^3 - 46pq^3 - 32p^2q^2 + 28pq^2 + 20q^3 + 2p^2q + 26pq - 2q^2 - 16q - 8).$$

证明 设 $p \neq q$ 是任意奇素数, 则 $V(\Gamma(Z_{pq^2})) = \bigcup_{i=1}^4 A_i$, 其中

$$A_1 = \{px \mid x = 1, 2, \dots, q^2 - 1, q \nmid x\}, A_2 = \{qx \mid x = 1, 2, \dots, pq - 1, p \nmid x, q^2 \nmid x\},$$

$$A_3 = \{pqx \mid x = 1, 2, \dots, q - 1\}, A_4 = \{q^2x \mid x = 1, 2, \dots, p - 1\}.$$

且 $|A_1| = q^2 - q, |A_2| = (p - 1)(q - 1), |A_3| = q - 1, |A_4| = p - 1, \Gamma(Z_{pq^2})$ 有 $q^2 + pq - q - 1$ 个顶点, 其诱导子图的连接图如图 2。

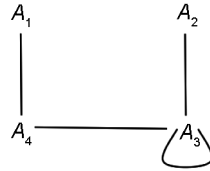


图 2 $\Gamma(Z_{pq^2})$ 的诱导子图的连接图

Fig. 2 Connection graph of $\Gamma(Z_{pq^2})$ induced subgraph

若 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3, x_4 \in A_4$, 则

$$d(x_1, x_2) = 3, d(x_1, x_3) = 2, d(x_1, x_4) = 1,$$

$$d(x_2, x_3) = 1, d(x_2, x_4) = 2, d(x_3, x_4) = 1.$$

若 $u_1, v_1 \in A_1, u_2, v_2 \in A_2, u_3, v_3 \in A_3, u_4, v_4 \in A_4$, 则

$$d(u_1) = d(v_1) = p - 1, d(u_2) = d(v_2) = q - 1, d(u_3) = d(v_3) = pq - 2,$$

$$d(u_4) = d(v_4) = q^2 - 1, d(u_1, v_1) = d(u_2, v_2) = d(u_4, v_4) = 2, d(u_3, v_3) = 1.$$

所以

$$G_1(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u, v) +$$

$$d(u) \sum_{v \in A_3} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_4} d(v)d(u, v) =$$

$$(p - 1) \left[2(p - 1)(q^2 - q - 1) + 3(q - 1)^2(p - 1) + 2(pq - 2)(q - 1) + (q^2 - 1)(p - 1) \right] =$$

$$(p - 1)(8pq^2 - 6q^2 - 10pq + 4q + 4).$$

$$G_2(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_3} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_4} d(v)d(u, v) =$$

$$(q - 1) \left[3(p - 1)(q^2 - q) + 2(q - 1)(pq - p - q) + (pq - 2)(q - 1) + 2(q^2 - 1)(p - 1) \right] =$$

$$(q - 1)(8pq^2 - 7q^2 - 8pq + 3q + 4).$$

$$G_3(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_3} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_4} d(v)d(u, v) =$$

$$(pq - 2) \left[2(p - 1)(q^2 - q) + (q - 1)^2(p - 1) + (pq - 2)(q - 2) + (q^2 - 1)(p - 1) \right] =$$

$$(pq - 2)(5pq^2 - 4q^2 - 6pq + 2q + 4).$$

$$G_4(u) = d(u) \sum_{v \in A_1} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_2} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_3} d(v)d(u, v) + d(u) \sum_{v \in A_4} d(v)d(u, v) =$$

$$(q^2 - 1) \left[(p - 1)(q^2 - q) + 2(q - 1)^2(p - 1) + (pq - 2)(q - 1) + 2(q^2 - 1)(p - 2) \right] =$$

$$(q^2 - 1)(6pq^2 - 7q^2 - 6pq + 3q + 4).$$

故

$$G(\Gamma(Z_{pq^2})) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(\Gamma(Z_{pq^2}))} G(u) = \frac{1}{2} \left[\sum_{u \in A_1} G_1(u) + \sum_{u \in A_2} G_2(u) + \sum_{u \in A_3} G_3(u) + \sum_{u \in A_4} G_4(u) \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[(p-1)(8pq^2 - 6q^2 - 10pq + 4q + 4)(q^2 - q) + (q-1)^2(8pq^2 - 7q^2 - 8pq + 3q + 4)(p-1) + (pq-2)(5pq^2 - 4q^2 - 6pq + 2q + 4)(q-1) + (q^2-1)(6pq^2 - 7q^2 - 6pq + 3q + 4)(p-1) \right] = \frac{1}{2} (q-1)(27p^2q^3 - 46pq^3 - 32p^2q^2 + 28pq^2 + 20q^3 + 2p^2q + 26pq - 2q^2 - 16q - 8).$$

3 结论

本文基于度与距离的 Gutman 指数,详细刻画了 $n = p^i, 2q, 3q, pq, pq^2, i = 1, 2, 3, 4$ 的环 Z_n 上的零除数图 $\Gamma(Z_n)$ 的 Gutman 指数。本研究是对前人有关零除数图的拓扑指数的研究从只有度到度与距离相结合的扩展,这对研究其他化学图的 Schultz 指数或 Gutman 指数有一定的借鉴意义。

下一步将准备对 Z_n 上的零除数图继续进行深入研究,希望能找到规律,得到一般情形下的零除数图的 Gutman 指数的构造方法及通用公式。

参考文献:

- [1] WIENER H. Structural Determination of Paraffin Boiling Points[J]. *J Am Chem Soc*, 1947, **69**(1): 17-20. DOI: 10.1021/ja01193a005.
- [2] WANG K L, GUO H L. The (Vertex) Gutman Index of one Vertex Union of Two Cycles[J]. *J Phys: Conf Ser*, 2022, **2173**(1): 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/2173/1/012017.
- [3] FENG M M, YU X R, ZHANG J, et al. The Gutman Index of the Unicyclic Graphs with Pendent Edges[J]. *J Phys Conf Ser*, 2021, **2012**(1): 012053. DOI: 10.1088/1742-6596/2012/1/012053.
- [4] ALI B, IMRAN M, MALIK M A, et al. Gutman Index of Some Derived Graphs[J]. *Adv Appl Discret Math*, 2019, **20**(1): 165-184. DOI: 10.17654/DM020010165.
- [5] AZARI M. On the Gutman Index of Thorn Graphs[J]. *Kragujevac J Sci*, **2018**(40): 33-48. DOI: 10.5937/kgjsci1840033a.
- [6] LIU X M, ZHAN Q. The Expected Values for the Gutman Index and Schultz Index in the Random Regular Polygonal Chains[J]. *Molecules*, 2022, **27**(20): 6838. DOI: 10.3390/molecules27206838.
- [7] BECK I. Coloring of Commutative Rings[J]. *J Algebra*, 1988, **116**(1): 208-226. DOI: 10.1016/0021-8693(88)90202-5.
- [8] ANDERSON D F, LIVINGSTON P S. The Zero-divisor Graph of a Commutative Ring[J]. *J Algebra*, 1999, **217**(2): 434-447. DOI: 10.1006/jabr.1998.7840.
- [9] SELVAKUMAR K, GANGAESWARIP, ARUNKUMAR G. The Wiener Index of the Zero-divisor Graph of a Finite Commutative Ring with Unity[J]. *Discrete Appl Math*, 2022, **311**: 72-84. DOI: 10.1016/j.dam.2022.01.012.
- [10] ASIR T, RABIKKA V. The Wiener Index of the Zero-divisor Graph of Z_n [J]. *Discrete Appl Math*, 2022, **319**: 461-471. DOI: 10.1016/j.dam.2021.02.035.
- [11] MAGI P M, JOSE S M, KISHORE A. Adjacency Matrix and Eigenvalues of the Zero Divisor Graph $\Gamma(Z_n)$ [J]. *J Math Comput Sci*, 2020, **10**(4): 1285-1297. DOI: 10.28919/jmcs/4590.
- [12] GÜRISOY A, ÜLKER A, GÜRISOY A. Sombor Index of Zero-divisor Graphs of Commutative Rings[J]. *Analele Stiintifice Ale Univ Ovidius Constanta Ser Matematica*, 2022, **30**(2): 231-257. DOI: 10.2478/auom-2022-0028.
- [13] SUTHAR S, PRAKASH O. Covering of Line Graph of Zero Divisor Graph over Ring Z_n [J]. *Br J Math Comput Sci*, 2015, **5**(6): 728-734. DOI: 10.9734/bjmcs/2015/14436.
- [14] PIRZADA S, RATHER B, SHABAN R U, et al. On Signless Laplacian Spectrum of the Zero Divisor Graphs of the Ring Z_n [J]. *Korean J Math*, 2021, **29**(1): 13-24. DOI: 10.11568/kjm.2021.29.1.13.
- [15] YALÇIN N F. Degree Distance of Zero-divisor Graph $\Gamma(Z_n)$ [J]. *Sakarya Univ J Sci*, 2020, **24**(3): 531-535. DOI: 10.16984/saufenbilder.549532.
- [16] STEVEN D S, FOOTE R M. Abstract algebra[M]. Hoboken: Wiley, 2004. DOI:10.2307/3607096.
- [17] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan, 1976. DOI: 10.1057/jors.1917.45.