

基于证据理论的多粒度决策背景最优粒度选取方法

王太滨¹,李德玉^{1,2*},翟岩慧^{1,2}

(1.山西大学 计算机与信息技术学院,山西 太原 030006;
2.山西大学 计算智能与中文信息处理教育部重点实验室,山西 太原 030006)

摘要:多粒度形式概念分析是数据挖掘与知识发现的重要工具。本文研究了覆盖多粒度下多粒度决策背景最优属性粒度组合选取方法。首先,基于覆盖属性粒化方法定义多粒度形式背景和多粒度决策形式背景,并且定义多粒度形式背景中的粗糙近似和信任结构。其次,基于粒协调性研究粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合选取方法,并且证明最优属性粒度组合可以由证据理论中的信任函数刻画。最后,基于粗糙集理论和证据理论统一给出粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合选取方法。

关键词:形式概念分析;多粒度;最优粒度选取;证据理论;粗糙集

中图分类号:TP18 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2024)04-0737-14

Optimal Granularity Selection in Multi-granularity Decision Context Based on Evidence Theory

WANG Taibin¹, LI Deyu^{1,2*}, ZHAI Yanhui^{1,2}

(1.School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
2.Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing of Ministry of Education, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Multi-granularity formal concept analysis is an important tool for data mining and knowledge discovery. In this paper, we study the method of selecting the optimal granularity combination of attributes in multi-granularity formal decision context under covering multi-granularity. Firstly, based on the covering granularity method of attributes, multi-granularity formal context and multi-granularity formal decision context are defined, and rough approximation and belief structure in multi-granularity formal context are also defined. Secondly, based on granule consistency, the selection method of optimal granularity combination of attributes in granule consistent multi-granularity formal decision context is studied, and it is proved that the optimal granularity combination of attributes can be characterized by the belief function in evidence theory. Finally, based on rough set theory and evidence theory, the selection method of optimal granularity combination of attributes in granule consistent multi-granularity formal decision context is given.

Key words: formal concept analysis; multi-granularity; optimal granularity selection; evidence theory; rough set

收稿日期:2023-02-17;接受日期:2023-03-23

基金项目:国家自然科学基金(61972238;62072294)

作者简介:王太滨(1998-),男,山东烟台人,硕士研究生,研究方向为粒计算与多尺度。E-mail:202022407050@email.sxu.edu.cn

* 通信作者:李德玉(LI Deyu),E-mail:lidysxu@163.com

引文格式:王太滨,李德玉,翟岩慧.基于证据理论的多粒度决策背景最优粒度选取方法[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):737-750. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023066

0 引言

形式概念分析(Formal Concept Analysis, FCA)是20世纪80年代初由德国 Wille 教授提出的数据分析和知识发现方法,其核心概念为形式背景和形式概念^[1]。概念格根据形式背景中对象与属性之间的二元关系建立概念层次结构,刻画概念间的泛化与特化关系,是FCA中支持数据分析和知识发现的核心数据结构。目前FCA已经被广泛地应用到推荐系统^[2]、智能推理^[3]、软件工程^[4]、信息检索^[5]等相关领域中。

经典的形式概念分析中,形式背景中的属性被认为是固定不变的。然而,在某些实际问题中,数据集的属性可能具有不同的粒度级别,相应地,导出的概念格可能揭示不同粒度下的信息和模式。近年来,人们将粒计算^[6]的思想和形式概念分析结合起来,对如上问题进行了研究。Belohlavek等^[7]提出了属性粒化理论框架,通过定义属性粒度树对形式背景中的属性粒化(属性合并或提升),实现概念知识的粗细转化。李金海等^[8-10]基于属性粒化理论提出了多粒度标记形式背景、介粒度形式背景和广义介粒度形式背景。

在处理复杂问题时,寻找合适的粒度层以有效解决问题是人们普遍比较关心的事情。在多粒度形式背景中,较细的属性粒度通常会导致更精确的推理,也会生成大量的冗余知识;较粗的属性粒度通常会生成较少的冗余知识,但也会导致更不精确的推理。因此,如何选取多粒度形式背景中的最优属性粒度是一个十分重要的问题。为此,李金海等^[11]基于信息熵和属性粒度树剪枝方法来选取多粒度形式背景的最优属性粒度组合。然而,现有的多粒度最优属性粒度组合选取方法,未考虑决策信息^[12]对属性粒度组合选取的影响。

与多粒度问题类似,在多尺度问题中^[13],属性不是固定不变的,而是具有多个层级。Wu等^[13]提出了多尺度决策系统,并基于条件属性与决策属性的协调性来选取最优尺度组合^[14]。粗糙集理论^[15]和证据理论^[16]是两个分别基于粗糙近似和信任结构处理不确定性问题的有效方法。基于决策系统中的粗糙近似和信任结构,Wu等^[17]衡量了不同属性尺度组合下决策系统中知识的不确定性,选取了协调多尺度决策系统的最优尺度组合。鉴于多尺度与多粒度问题的相似性,本文希望借鉴多尺度决策系统最优尺度方法,基于决策背景中的粗糙近似^[18]和信任结构^[19],刻画粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合。

1 预备知识

1.1 形式概念分析

定义 1^[1] 形式背景是一个三元组 (U, A, I) , $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为非空对象集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为非空属性集, $I \subseteq U \times A$ 为对象集和属性集上的二元关系, $(x, a) \in I$ 表示对象 x 具有属性 a , $(x, a) \notin I$ 表示对象 x 不具有属性 a 。

例 1 表 1 给出了一个形式背景 (U, A, I) , 其中对象集 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ 表示 8 部不同的电影, 属性集 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的元素 a_1 、 a_2 和 a_3 分别表示电影的类型为“喜剧”“动作”和“恐怖”。

定义 2^[1] 设 (U, A, I) 为形式背景。对于 $X \subseteq U, B \subseteq A$, 记 $X^\uparrow = \{a \in A | \forall x \in X, (a, x) \in I\}$, $B^\downarrow = \{x \in X | \forall a \in B, (x, a) \in I\}$ 。若 $X^\uparrow = B, B^\downarrow = X$, 则称序对 (X, B) 为形式概念, 其中 X 为 (X, B) 的外延, B 为 (X, B) 的内涵。将 (U, A, I) 中所有形式概念和形式概念的外延的集合分别标记为 $L(U, A, I)$ 和 $L_U(U, A, I) = \{X | (X, B) \in L(U, A, I)\}$ 。

设 (U, A, I) 为形式背景。对于 $X \subseteq U, B, B_1 \subseteq A$, 记 $X^{\uparrow_{B_1}} = \{a \in B_1 | \forall x \in X, (a, x) \in I\}$, $B^{\downarrow_{B_1}} = \{x \in X | \forall a \in B \cap B_1, (x, a) \in I\}$ 。

性质 1^[1] 设 (U, A, I) 为形式背景。对于 $X, X_1, X_2 \subseteq U, B, B_1, B_2 \subseteq A$, 下列性质成立:

表1 形式背景
Table 1 Formal context

(U,A,I)	a_1	a_2	a_3
x_1	1	0	0
x_2	1	0	0
x_3	1	1	0
x_4	1	1	0
x_5	1	1	1
x_6	0	1	0
x_7	0	1	1
x_8	0	0	1

- (1) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_2^\uparrow \subseteq X_1^\uparrow, B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2^\downarrow \subseteq B_1^\downarrow$;
- (2) $X \subseteq X^\downarrow, B \subseteq B^\uparrow$;
- (3) $X^\uparrow = X^{\uparrow\downarrow}, B^\downarrow = B^{\downarrow\uparrow}$;
- (4) $X \subseteq B^\downarrow \Leftrightarrow B \subseteq X^\uparrow, X \not\subseteq B^\downarrow \Leftrightarrow B \not\subseteq X^\uparrow$;
- (5) $(X_1 \cup X_2)^\uparrow = X_1^\uparrow \cap X_2^\uparrow, (B_1 \cup B_2)^\downarrow = B_1^\downarrow \cap B_2^\downarrow$;
- (6) $(X^\downarrow, X^\uparrow) \in L(U, A, I), (B^\downarrow, B^\uparrow) \in L(U, A, I)$;
- (7) 若 $B \cap B_1 = B \cap B_2$, 则 $B^{\uparrow B_1} = B^{\uparrow B_2}$;
- (8) $X^{\uparrow B_1 \cup B_2} = X^{\uparrow B_1} \cup X^{\uparrow B_2}$;
- (9) 若 $X \in L_U(U, A, I)$, 则 $X = \bigcup_{x \in X} x^{\uparrow\downarrow}$.

定义3^[11] 设 (U, A, I) 为形式背景。对于 $x \in U$, 称 $(x^\downarrow, x^\uparrow)$ 为对象概念(或粒概念), 分别称 x^\downarrow 和 x^\uparrow 为粒外延和粒内涵。

定义4^[12] 决策背景是一个五元组 (U, A, I, D, J) , $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为非空对象集, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为非空条件属性集, $D = \{d_1, d_2, \dots, d_r\}$ 为非空决策属性集, $A \cap D = \emptyset, (U, A, I)$ 是条件子背景, (U, D, J) 是决策子背景。

定义5^[12] 设 (U, A, I, D, J) 为决策背景, 分别称 $L(U, A, I)$ 和 $L(U, D, J)$ 中概念为条件概念和决策概念。对于 $x \in U$, 分别称 $(x^{\downarrow A}, x^{\uparrow A})$ 和 $(x^{\downarrow D}, x^{\uparrow D})$ 为条件粒概念和决策粒概念。

例2 表2中 (U, A, I, D, J) 是由表1中形式背景 (U, A, I) 附加决策信息生成的决策背景, 其中对象集 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ 表示8部不同的电影, 属性集 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的元素 a_1, a_2 和 a_3 分别表示“喜剧”“动作”和“恐怖”, 决策属性集 $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ 的元素 d_1, d_2 和 d_3 分别表示“适宜0—12岁儿童观看”“适宜12—18岁青年人观看”和“适宜18岁以上成年人观看”。

根据计算可知, 表2中的条件概念有 $(U, \emptyset), (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1\}), (\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{a_2\}), (\{x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2\}), (\{x_5, x_7, x_8\}, \{a_3\}), (\{x_5, x_7\}, \{a_2, a_3\}), (\{x_5\}, \{a_1, a_2, a_3\}), (\emptyset, A)$, 条件粒概念是特殊的条件概念, 有 $(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{a_1\}), (\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{a_2\}), (\{x_3, x_4, x_5\}, \{a_1, a_2\}), (\{x_5, x_7, x_8\}, \{a_3\}), (\{x_5, x_7\}, \{a_2, a_3\}), (\{x_5\}, \{a_1, a_2, a_3\})$ 。

表2中的决策概念有 $(U, \{d_3\}), (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{d_1, d_2, d_3\}), (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{d_2, d_3\}), (\emptyset, D)$, 决策粒概念是特殊的决策概念, 有 $(U, \{d_3\}), (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{d_1, d_2, d_3\}), (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{d_2, d_3\})$ 。

1.2 粗糙集理论

粗糙集理论与形式概念分析理论之间有很强的联系性, 使用形式背景中的偏序关系可以扩展经典粗糙集。

下面引入形式背景中对象之间的二元偏序关系定义。

表2 决策背景
Table 2 Decision context

(U,A,I,D,J)	a_1	a_2	a_3	d_1	d_2	d_3
x_1	1	0	0	1	1	1
x_2	1	0	0	1	1	1
x_3	1	1	0	1	1	1
x_4	1	1	0	1	1	1
x_5	1	1	1	0	1	1
x_6	0	1	0	0	1	1
x_7	0	1	1	0	0	1
x_8	0	0	1	0	0	1

定义6^[18] 设 (U,A,I) 为形式背景,对于任意的 $B \subseteq A$,称 $R_B = \{(x,y) \in U \times U | x^{\uparrow B} \subseteq y^{\uparrow B}\}$ 为 U 上的二元偏序关系。

显然,定义6中定义的二元关系 R_B 满足自反性、传递性和反对称性,因此 R_B 是 U 上的一个二元偏序关系, R_B 生成 U 的覆盖集 $U/R_B = \{[x]_{R_B} | x \in U\}$,其中 $[x]_{R_B} = \{y \in U | (x,y) \in R_B\}$ 表示由 $x \in U$ 诱导生成的偏序类。

下面的引理证明了 $x \in U$ 诱导生成的偏序类等价于 $x \in U$ 诱导生成的粒外延。

引理1 设 (U,A,I) 为形式背景, $B \subseteq A$,则对于 $\forall x \in U$,有 $[x]_{R_B} = x^{\uparrow B \downarrow B}$ 且 $U/R_B = \{x^{\uparrow B \downarrow B} | x \in U\}$ 。

证明 若 $y \in [x]_{R_B}$,则由定义6可知 $(x,y) \in R_B$,即 $x^{\uparrow B} \subseteq y^{\uparrow B}$,此时,由性质1(1),(2)可知 $y \in y^{\uparrow B \downarrow B} \subseteq x^{\uparrow B \downarrow B}$,因此 $[x]_{R_B} \subseteq x^{\uparrow B \downarrow B}$ 。反之,若 $y \in x^{\uparrow B \downarrow B}$,则由性质1(1),(3)可知 $x^{\uparrow B} = x^{\uparrow B \downarrow B \uparrow B} \subseteq y^{\uparrow B}$,因此,由定义6可知 $(x,y) \in R_B$,即 $y \in [x]_{R_B}$,因此 $x^{\uparrow B \downarrow B} \subseteq [x]_{R_B}$ 。故 $[x]_{R_B} = x^{\uparrow B \downarrow B}$, $U/R_B = \{[x]_{R_B} | x \in U\} = \{x^{\uparrow B \downarrow B} | x \in U\}$ 。

根据粗糙集理论中的上、下近似算子和粗糙隶属度的定义,我们引入定义7。

定义7^[18] 设 (U,A,I) 为形式背景, $x \in U, X \subseteq U, B \subseteq A, X$ 基于 R_B 的下近似、上近似分别定义为 $\underline{R}_B(X) = \{x \in U | [x]_{R_B} \subseteq X\} = \{x \in U | x^{\uparrow B \downarrow B} \subseteq X\}$ 和 $\overline{R}_B(X) = \{x \in U | [x]_{R_B} \cap X \neq \emptyset\} = \{x \in U | x^{\uparrow B \downarrow B} \cap X \neq \emptyset\}$ 。 x 相对 X 的粗糙隶属函数定义为 $\mu_X(x) = P(X|[x]_{R_B}) = \frac{|X \cap [x]_{R_B}|}{|[x]_{R_B}|} =$

$\frac{|X \cap x^{\uparrow B \downarrow B}|}{|x^{\uparrow B \downarrow B}|}$,其中 P 是条件概率函数, $|X|$ 表示集合 X 的基数。

性质2^[18] 设 (U,A,I) 为形式背景,对于 $X \subseteq U, B \subseteq A$,下列性质成立:

- (1) $\underline{R}_B(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}_B(X)$;
- (2) 若 $X \in L_U(U,A,I)$,则 $\underline{R}_B(X) = X$ 。

1.3 证据理论

证据理论是处理不确定性问题的有效方法。该理论的基本概念是由mass函数生成的信任结构,根据信任结构可导出一对对偶的测度,即信任函数和似然函数,以此度量知识的不确定性。下面引入证据理论信任结构及其生成的信任函数和似然函数的定义。

定义8^[16] 设 U 为非空有限论域,集函数 $m: \mathcal{P}(U) \rightarrow [0,1]$ 称为 U 上的一个mass函数,若满足

- (1) $m(\emptyset) = 0$,
- (2) $\sum_{A \subseteq U} m(A) = 1$ 。

称 $A \in \mathcal{P}(U)$ 为 m 的焦点,若 $m(A) > 0$,记 $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{P}(U) | m(A) > 0\}$,则序对 (\mathcal{M}, m) 称为 U

上的一个信任结构。

设 (\mathcal{M}, m) 为 U 上的一个信任结构。函数 $Bel: \mathcal{P}(U) \rightarrow [0, 1]$ 称为 U 上的信任函数, 若 $Bel(X) = \sum_{A \subseteq X} m(A)$, $\forall X \in \mathcal{P}(U)$; 函数 $Pl: \mathcal{P}(U) \rightarrow [0, 1]$ 称为 U 上的似然函数, 若 $Pl(X) = \sum_{A \cap X \neq \emptyset} m(A)$, $\forall X \in \mathcal{P}(U)$ 。

由同一信任结构导出的信任函数和似然函数是对偶的, 即 $Pl(X) = 1 - Bel(\sim X)$ 且 $Bel(X) \leq Pl(X)$ 。

粗糙集理论和证据理论之间有很强的联系。下面的定理表明, 经典的信任和似然函数可以通过形式背景中基于偏序关系的粗糙近似来表示。

定理 1^[19] 设 (U, A, I) 为一个形式背景, 对于 $X \subseteq U, B \subseteq A$, 记

$$Bel_B(X) = P(\underline{R}_B(X)) = \frac{|R_B(X)|}{|U|},$$

$$Pl_B(X) = P(\overline{R}_B(X)) = \frac{|\overline{R}_B(X)|}{|U|},$$

则 $Bel_B(X)$ 与 $Pl_B(X)$ 是一对对偶的信任函数与似然函数, 其对应的 mass 函数为 $m_B(X) = P(j_B(X)) = \frac{|j_B(X)|}{|U|}$, 其中 $j_B(X) = \{a \in U | a^{\downarrow B} = X\}$ 。

2 多粒度决策背景

在一些实际问题中, 粒度指的是存储数据的精炼或综合程度。其主要应用是实现不同粒度级别之间的最优粒度, 使用户获得感兴趣的知识。属性粒度越细, 对象的描述就越详细。例如, 属性“通过”($[60, 100]$ 分)可以细分为其他级别的属性粒度: “及格”($[60, 80]$ 分), “良”($[80, 90]$ 分), “优”($[90, 100]$ 分)。

本节定义多粒度形式背景、多粒度决策背景和多粒度形式背景在不同属性粒度组合下的粗糙近似和信任结构。

首先引入属性粒化生成的粒度树。

定义 9^[13] 设 (U, A, I) 为一个形式背景, 属性 $a \in A$ 生成的粒度树是具有以下属性的有根树:

- (1) 树的每一个结点都由一个不属于 A 的唯一属性名称标记, 根结点由 a 标记;
- (2) 所有叶结点到根结点的路径长度相同;
- (3) 对于每个结点 z , z^{\downarrow} 表示具有属性 z 的对象集, 其中根结点 a 的 a^{\downarrow} 由定义 2 给出;
- (4) 对于每个结点 z , 如果结点 z_1, \dots, z_s 是 z 的全部子结点, 则 $\{z_1^{\downarrow}, \dots, z_s^{\downarrow}\}$ 是 z^{\downarrow} 的覆盖, 满足 $z_1^{\downarrow} \cup \dots \cup z_s^{\downarrow} = z^{\downarrow}$ 且 $z_j^{\downarrow} \cap z_k^{\downarrow} = \emptyset (j, k = 1, 2, \dots, s)$ 。

由定义 9(4) 可知, 粒度树中具有子结点属性的对象集全体是具有父结点属性的对象集的覆盖, 因此将这种属性粒化方式称为覆盖属性粒化。再由定义 9(2) 可知, 粒度树中, 具有同层结点属性的对象集全体是具有根结点属性的对象集的覆盖, 因此, 粒度树中, 同层结点属性集与根结点属性具有粒度关系, 并且将同层全部结点属性集称为覆盖粒层, 下面给出覆盖粒层的定义和不同覆盖粒层的粒度粗细关系的定义。

定义 10 设 (U, A, I) 为形式背景, $a \in A$, 称 C_a 为 a 粒化生成的一个覆盖粒层, 若 C_a 为 a 生成的粒度树中某一层全部结点组成的属性集。

显然, 若 C_a 为 a 粒化生成的一个覆盖粒层, 则有 $\bigcup_{z \in C_a} z^{\downarrow} = a^{\downarrow}$ 。

下面举例说明覆盖属性粒化。

例 3 如图 1 所示, 以属性“喜剧”为根结点的粒度树有 2 个覆盖粒层, 分别为第一层 {“喜剧”},

第二层{“浪漫喜剧”“讽刺喜剧”},且{“浪漫喜剧”“讽刺喜剧”} \leq {“喜剧”}。需要特别说明的是,由于一定存在喜剧电影既是浪漫喜剧电影,也是讽刺喜剧电影,因此同时具有属性“浪漫喜剧”和“讽刺喜剧”的对象可能不为空,具有属性“浪漫喜剧”的对象集和具有属性“讽刺喜剧”的对象集组成的集族是具有属性“喜剧”的对象集的覆盖,因此{“浪漫喜剧”“讽刺喜剧”}是一个覆盖粒层。

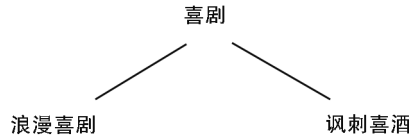


图1 属性粒度树

Fig. 1 Granularity tree of attribute

定义 11 设 (U, A, I) 为形式背景,设 $C_a^{k_1}, C_a^{k_2}$ 是 $a \in A$ 生成的粒度树的两个不同覆盖粒层,若对于 $\forall z_i \in C_a^{k_1}$,存在指标集 T_{z_i} 满足 $v_i \in C_a^{k_2} (t \in T_{z_i})$ 且 $\bigcup_{t \in T_{z_i}} v_t^\dagger = z_i^\dagger$,则称 $C_a^{k_2}$ 属性粒度细于 $C_a^{k_1}$,记为 $C_a^{k_2} \leq C_a^{k_1}$ 。

根据定义 11 中不同覆盖粒层的粒度粗细关系的定义可知,粒度树中层数越小(越接近根结点)的覆盖粒层越粗,层数越大(越接近叶结点)的覆盖粒层越细。

如果形式背景中的属性集可以划分为多个覆盖粒层,且覆盖粒层具有粒度关系,那么将这样的形式背景称为多粒度形式背景。

定义 12 设 (U, A, I) 为形式背景, A 中的 m 个属性 a_j 生成 K_j 层粒度树 T_{a_j} ,由 (U, A, I) 粒化生成的多粒度形式背景表示为 $\mathcal{F} = (U, \bigcup_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq K_j} C_{a_j}^k, I)$,其中 $C_{a_j}^k$ 表示 T_{a_j} 的第 k 层覆盖粒层, $I \subseteq U \times \bigcup_{1 \leq k \leq K_j, 1 \leq j \leq m} C_{a_j}^k$ 表示多粒度形式背景中对象集和属性集的二元关系。对于 $x \in U, z \in \bigcup_{1 \leq k \leq K_j, 1 \leq j \leq m} C_{a_j}^k$,若 $x \in z^\dagger$,则 $I(x, z) = 1$,否则 $I(x, z) = 0$ 。

根据定义 12 可以发现,多粒度形式背景中来自不同粒度树的覆盖粒层数 K_j 可以不同,因此可以将这样的多粒度形式背景称为广义多粒度形式背景。

下面举例说明多粒度形式背景。

例 4 表 3 中 \mathcal{F} 是由表 1 中形式背景 (U, A, I) 属性覆盖粒化生成的多粒度形式背景,其中 \mathcal{F} 中属性 $a_1, a_{11}^2, a_{12}^2, a_2, a_{21}^2, a_{22}^2, a_3, a_{31}^2$ 和 a_{32}^2 分别表示电影的类型为“喜剧”“浪漫喜剧”“讽刺喜剧”“动作”“武打”“枪战”“恐怖”“超自然恐怖”和“心理恐怖”。

表3 多粒度形式背景 \mathcal{F}

Table 3 Multi-granularity formal context \mathcal{F}

S	$C_{a_1}^1$	$C_{a_1}^2$		$C_{a_2}^1$	$C_{a_2}^2$		$C_{a_3}^1$	$C_{a_3}^2$	
	a_1	a_{11}^2	a_{12}^2	a_2	a_{21}^2	a_{22}^2	a_3	a_{31}^2	a_{32}^2
x_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_3	1	1	1	1	1	1	0	0	0
x_4	1	1	1	1	1	1	0	0	0
x_5	1	0	1	1	1	0	1	1	0
x_6	0	0	0	1	1	0	0	0	0
x_7	0	0	0	1	0	1	1	1	1
x_8	0	0	0	0	0	0	1	0	1

图 2 是表 3 中属性构成的两个属性粒度树。

由表 3 和图 2 可知, \mathcal{F} 中属性可以划分为 6 个覆盖粒层 $C_{a_1}^1 = \{a_1\}, C_{a_1}^2 = \{a_{11}^2, a_{12}^2\}, C_{a_2}^1 = \{a_2\},$

$C_{a_2}^2 = \{a_{21}^2, a_{22}^2\}, C_{a_3}^1 = \{a_3\}, C_{a_3}^2 = \{a_{31}^2, a_{32}^2\}$ 。其中 $C_{a_1}^1 = \{a_1\}, C_{a_1}^2 = \{a_{11}^2, a_{12}^2\}$ 来自同一个粒度树 T_{a_1} , 且 $C_{a_1}^2 \leq C_{a_1}^1$; $C_{a_2}^1 = \{a_2\}, C_{a_2}^2 = \{a_{21}^2, a_{22}^2\}$ 来自同一个粒度树 T_{a_2} 且 $C_{a_2}^2 \leq C_{a_2}^1$; $C_{a_3}^1 = \{a_3\}, C_{a_3}^2 = \{a_{31}^2, a_{32}^2\}$ 来自同一个粒度树 T_{a_3} 且 $C_{a_3}^2 \leq C_{a_3}^1$ 。

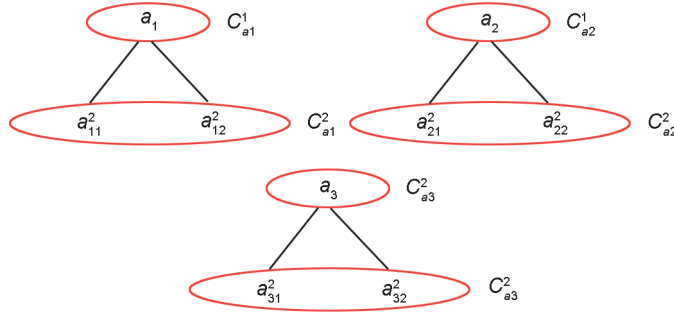


图2 \mathcal{F} 中条件属性组成的属性粒度树 T_{a_1} 、和 T_{a_2} 和 T_{a_3}

Fig. 2 Granularity tree T_{a_1}, T_{a_2} and T_{a_3} composed of conditional attributes in \mathcal{F}

设 (U, A, I) 为形式背景, C_a^k 是 $a \in A$ 生成的粒度树的第 k ($1 \leq k \leq K$) 层覆盖粒层。对于 $X \subseteq U, B, B_1 \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq K} C_a^k$, 令 $X^{\uparrow B_2} = \{z \in B_1 | x \in z^{\downarrow}, \forall x \in X\}$, $B^{\downarrow B_1} = \{y \in U | y \in z^{\downarrow}, \forall z \in B \cap B_1\}$, $X^{\uparrow B_1 \downarrow B_1} = \{y \in U | y \in z^{\downarrow}, \forall z \in X^{\uparrow B_1}\}$ 。

引理2 设 (U, A, I) 为形式背景, $C_a^{k_1}, C_a^{k_2}$ ($1 \leq k_1, k_2 \leq K$) 是 $a \in A$ 生成的粒度树的两个不同覆盖粒层。对于 $x \in U, B, B_1, B_2 \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq K} C_a^k$, 有:

- (1) 若 $C_a^{k_2} \leq C_a^{k_1}$, 则 $x^{\uparrow C_a^{k_2} \downarrow C_a^{k_2}} \subseteq x^{\uparrow C_a^{k_1} \downarrow C_a^{k_1}}$;
- (2) 若 $B \cap B_1 = B \cap B_2$, 则 $B^{\downarrow B_1} = B^{\downarrow B_2}$ 。

证明 (1) 对于 $y \in x^{\uparrow C_a^{k_2} \downarrow C_a^{k_2}}$, 若 $y \notin x^{\uparrow C_a^{k_1} \downarrow C_a^{k_1}}$, 则 $\exists z_j \in x^{\uparrow C_a^{k_1}}$ 满足 $y \notin z_j^{\downarrow}$ 。由于 $z_j \in x^{\uparrow C_a^{k_1}} \subseteq C_a^{k_1}$ 且 $C_a^{k_2} \leq C_a^{k_1}$, 由定义11可知, 存在指标集 T_{z_j} 满足 $v_t \in C_a^{k_2}$ ($t \in T_{z_j}$) 且 $\bigcup_{t \in T_{z_j}} v_t^{\downarrow} = z_j^{\downarrow}$ 。因为 $z_j \in x^{\uparrow C_a^{k_1}}$, 因此 $x \in z_j^{\downarrow}$, 故 $\exists z_t \in C_a^{k_2}$ 满足 $x \in z_t^{\downarrow} \subseteq z_j^{\downarrow}$, 即 $z_t \in x^{\uparrow C_a^{k_2}}$ 且满足 $z_t^{\downarrow} \subseteq z_j^{\downarrow}$ 。再由于 $y \notin z_j^{\downarrow}$, 因此 $y \notin z_t^{\downarrow}$, 进而可得 $y \notin x^{\uparrow C_a^{k_2} \downarrow C_a^{k_2}}$, 与 $y \in x^{\uparrow C_a^{k_2} \downarrow C_a^{k_2}}$ 矛盾。

(2) 由 $B \cap B_1 = B \cap B_2$ 可知, $B^{\downarrow B_1} = \{y \in U | y \in z^{\downarrow}, \forall z \in B \cap B_1\} = \{y \in U | y \in z^{\downarrow}, \forall z \in B \cap B_2\} = B^{\downarrow B_2}$ 。

将多粒度形式背景 \mathcal{F} 分解, 只保留 T_{a_j} 的第 l_j ($1 \leq l_j \leq K_j$) 个覆盖粒层 $C_{a_j}^{l_j}$ 中的属性, 生成单粒度形式背景 $\mathcal{F}^{\mathcal{L}} = (U, A^{\mathcal{L}}, I^{\mathcal{L}})$, 其中 $\mathcal{L} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ ($1 \leq l_j \leq K_j$), $A^{\mathcal{L}} = \bigcup_{1 \leq j \leq m} C_{a_j}^{l_j} \subseteq A$ 表示 $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ 的属性集, $I^{\mathcal{L}} \subseteq U \times A^{\mathcal{L}}$ 表示 $\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$ 中对对象集 U 和属性集 $A^{\mathcal{L}}$ 的二元关系。

显然, 一个多粒度形式背景可以被分解为 $\prod_{j=1}^m K_j$ 个单粒度形式背景。 \mathcal{F} 的属性粒度组合全体表示为 $\mathcal{L} = \{(l_1, l_2, \dots, l_m) | 1 \leq l_j \leq K_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ 。设 $\mathcal{L}' = (l_1', l_2', \dots, l_m')$, $\mathcal{L}'' = (l_1'', l_2'', \dots, l_m'') \in \mathcal{L}$, 若对于任意的 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有 $l_j' \leq l_j''$, 则称 \mathcal{L}' 比 \mathcal{L}'' 粗, 或 \mathcal{L}'' 比 \mathcal{L}' 细, 记作 $\mathcal{L}'' \leq \mathcal{L}'$ 。若 $\mathcal{L}'' \leq \mathcal{L}'$, 且存在 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $l_j' < l_j''$, 则称 \mathcal{L}' 严格粗于 \mathcal{L}'' , 或 \mathcal{L}'' 严格细于 \mathcal{L}' , 记作 $\mathcal{L}'' < \mathcal{L}'$ 。可验证 (\mathcal{L}, \leq) 是一个偏序集, 进一步定义 $\mathcal{L}' \wedge \mathcal{L}'' = (l_1' \wedge l_1'', l_2' \wedge l_2'', \dots, l_m' \wedge l_m'')$, $\mathcal{L}' \vee \mathcal{L}'' = (l_1' \vee l_1'', l_2' \vee l_2'', \dots, l_m' \vee l_m'')$, 其中 $l_j' \wedge l_j'' = \max(l_j', l_j'')$, $l_j' \vee l_j'' = \min(l_j', l_j'')$, 则 $(\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee)$ 为一个有界格, 也是一个完备格, 最小元 $\mathcal{L}^{\min} = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, 最大元 $\mathcal{L}^{\max} = \{1, 1, \dots, 1\}$ 。

下面定义多粒度形式背景在不同属性粒度组合下的粗糙近似, 且分析它们之间的关系。

定义13 设 \mathcal{F} 是由 (U, A, I) 粒化的多粒度形式背景, \mathcal{L} 为 \mathcal{F} 的全体属性粒度组合。对于 $\mathcal{L} =$

$(l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathcal{L}, A^c = \bigcup_{1 \leq j \leq m} C_{a_j}^{l_j}$, 记

$$R_{A^c} = \{(x, y) \in U \times U | x^{\uparrow A^c} \subseteq y^{\uparrow A^c}\},$$

$$[x]_{R_{A^c}} = \{y \in U | (x, y) \in R_{A^c}\} = \{y \in U | y \in x^{\uparrow A^c \downarrow A^c}\},$$

$$U/R_{A^c} = \{[x]_{R_{A^c}} | x \in U\} = \{x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} | x \in U\}.$$

对于 $X \subseteq G, X$ 在 \mathcal{L} 下的下近似、上近似定义为

$$\underline{R}_{A^c}(X) = \{x \in U | [x]_{R_{A^c}} \subseteq X\} = \{x \in U | x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq X\},$$

$$\overline{R}_{A^c}(X) = \{x \in U | [x]_{R_{A^c}} \cap X \neq \emptyset\} = \{x \in U | x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \cap X \neq \emptyset\}.$$

命题 1 设 \mathcal{F} 是由 (U, A, I) 粒化的多粒度形式背景, \mathcal{L} 为 \mathcal{F} 的全体属性粒度组合. 对于 $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathcal{L}$, 若 $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$, 则 $\underline{R}_{A^{c'}}(X) \subseteq \underline{R}_{A^c}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}_{A^c}(X) \subseteq \overline{R}_{A^{c'}}(X)$.

证明 由 $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ 可知 $\mathcal{L}'(j) \leq \mathcal{L}(j)$ (其中 $\mathcal{L}'(j)$ 和 $\mathcal{L}(j)$ 分别表示 l'_j 和 l_j), $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. 由于粒度树中层数越小(越接近根结点)的覆盖粒层越粗, 因此 $C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \leq C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}$ ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$). 再由引理 2(1) 可知, 对于任意的 $x \in U$, 有 $x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)}} \subseteq x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}}$ ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$).

由于 $A^{c'} = \bigcup_{1 \leq j \leq m} C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)}$, 由性质 1(8) 和 (5) 可知 $x^{\uparrow A^{c'} \downarrow A^{c'}} = (\bigcup_{j=1}^m x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow A^{c'}})^{\downarrow A^{c'}} = \bigcap_{j=1}^m x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow A^{c'}}$. 此时, 由于 $x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow A^{c'}} \subseteq C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \subseteq A^{c'}$, 因此 $x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow A^{c'}} \cap C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)} = x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow A^{c'}} \cap A^{c'}$, 由引理 2 可知 $x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow A^{c'}} = x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}}$, 故 $x^{\uparrow A^{c'} \downarrow A^{c'}} = \bigcap_{j=1}^m x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow A^{c'}} = \bigcap_{j=1}^m x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}}$, 同理 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} = \bigcap_{j=1}^m x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}}$. 再由于 $x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)}} \subseteq x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}}$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$) 可知, $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} = \bigcap_{j=1}^m x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}} \subseteq \bigcap_{j=1}^m x^{\uparrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)} \downarrow C_{a_j}^{\mathcal{L}'(j)}} = x^{\uparrow A^{c'} \downarrow A^{c'}}$.

此时, 若 $x \in \underline{R}_{A^{c'}}(X)$, 则 $x^{\uparrow A^{c'} \downarrow A^{c'}} \subseteq X$, 故 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq x^{\uparrow A^{c'} \downarrow A^{c'}} \subseteq X$, 因此 $x \in \underline{R}_{A^c}(X)$, 即 $\underline{R}_{A^{c'}}(X) \subseteq \underline{R}_{A^c}(X)$. 若 $x \in \overline{R}_{A^c}(X)$, 则 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \cap X \neq \emptyset$, 故 $x^{\uparrow A^{c'} \downarrow A^{c'}} \cap X \supseteq x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \cap X \neq \emptyset$, 因此 $\overline{R}_{A^c}(X) \subseteq \overline{R}_{A^{c'}}(X)$. 再由性质 2(1) 可知 $\underline{R}_{A^c}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}_{A^c}(X)$ 且 $\underline{R}_{A^{c'}}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}_{A^{c'}}(X)$, 再由 $\underline{R}_{A^{c'}}(X) \subseteq \underline{R}_{A^c}(X)$ 和 $\overline{R}_{A^c}(X) \subseteq \overline{R}_{A^{c'}}(X)$, 因此 $\underline{R}_{A^{c'}}(X) \subseteq \underline{R}_{A^c}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}_{A^c}(X) \subseteq \overline{R}_{A^{c'}}(X)$.

下面在不同属性粒度组合下定义多粒度形式背景的信任函数和似然函数, 并分析它们之间的关系.

定义 14 设 \mathcal{F} 是由 (U, A, I) 粒化的多粒度形式背景, \mathcal{L} 为 \mathcal{F} 的全部粒度组合. 对于 $\mathcal{L} \in \mathcal{L}, A^c = \bigcup_{1 \leq j \leq m} C_{a_j}^{\mathcal{L}(j)}$, 定义 \mathcal{L} 下的一对对偶的信任函数与似然函数为

$$Bel_{A^c}(X) = P(\underline{R}_{A^c}(X)) = \frac{|\underline{R}_{A^c}(X)|}{|U|},$$

$$Pl_{A^c}(X) = P(\overline{R}_{A^c}(X)) = \frac{|\overline{R}_{A^c}(X)|}{|U|},$$

其对应的 mass 函数为 $m_{A^c}(X) = P(j_{A^c}(X)) = \frac{|j_{A^c}(X)|}{|U|}$, 其中 $j_{A^c}(X) = \{a \in U | a^{\downarrow A^c \uparrow A^c} = X\}$.

命题 2 设 \mathcal{F} 是由 (U, A, I) 粒化的多粒度形式背景, \mathcal{L} 为 \mathcal{F} 的全部粒度组合. 对于 $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathcal{L}$, 若 $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$, 则 $\underline{Bel}_{A^{c'}}(X) \leq \underline{Bel}_{A^c}(X) \leq \frac{|X|}{|U|} \leq \overline{Pl}_{A^c}(X) \leq \overline{Pl}_{A^{c'}}(X)$.

证明 由命题 1 可知结论成立.

下面基于多粒度形式背景给出多粒度决策背景的定义.

定义 15 设 (U, A, I, D, J) 为决策背景, 由 (U, A, I, D, J) 粒化生成的多粒度决策背景表示为 $S = (U, \bigcup_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq K_j} C_{a_j}^k, I, D, J)$, 其中条件背景 $(U, \bigcup_{1 \leq k \leq K_j, 1 \leq j \leq m} C_{a_j}^k, I)$ 是由 (U, A, I) 粒化生成的多粒度

形式背景,决策背景 (U, D, J) 是一个单粒度形式背景。

根据定义 15,多粒度决策背景的条件属性具有属性粒度关系,而决策属性之间不具有属性粒度关系。因此,与多粒度形式背景类似,多粒度决策背景 S 可以通过分解条件属性获得 $\prod_{j=1}^m l_j$ 个单粒度决策背景 $S^c = (U, A^c, I^c, D, J)$, 其中 $A^c = \bigcup_{1 \leq j \leq m} C_{a_j}^{c(j)} \subseteq A$ 表示 S^c 的条件属性集, $I^c \subseteq U \times A^c$ 表示 S^c 中对象集 U 和条件属性集 A^c 的二元关系。

下面举例说明多粒度决策背景。

例 5 表 4 中 S 是由表 2 中决策背景 (U, A, I, D, J) 条件属性覆盖粒化生成的一个多粒度决策背景,其条件子背景是表 3 中由 (U, A, I) 属性覆盖粒化生成多粒度形式背景 \mathcal{F} 。

表 4 多粒度决策背景 S
Table 4 Multi-granularity decision formal context S

S	$C_{a_1}^1$		$C_{a_1}^2$		$C_{a_2}^1$		$C_{a_2}^2$		$C_{a_3}^1$		$C_{a_3}^2$		d_1	d_2	d_3
	a_1	a_{11}^2	a_{12}^2	a_2	a_{21}^2	a_{22}^2	a_3	a_{31}^2	a_{32}^2						
x_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1		
x_2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1		
x_3	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1		
x_4	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1		
x_5	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1		
x_6	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1		
x_7	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1		
x_8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1		

由于 S 的条件子背景是 \mathcal{F} , 因此 S 中条件属性构成的覆盖粒层和粒度树与 \mathcal{F} 中属性相同, 如图 2 所示。由图 2 可知 T_{a_1} 、 T_{a_2} 和 T_{a_3} 中皆有 2 个粒层, 因此多粒度决策背景 S 可以分解为 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 个单粒度决策背景, S 的全部属性粒度组合有: $\mathcal{L}^{\max} = (1, 1, 1)$, $\mathcal{L}^1 = (1, 1, 2)$, $\mathcal{L}^2 = (1, 2, 1)$, $\mathcal{L}^3 = (2, 1, 1)$, $\mathcal{L}^4 = (2, 2, 1)$, $\mathcal{L}^5 = (2, 1, 2)$, $\mathcal{L}^6 = (1, 2, 2)$, $\mathcal{L}^{\min} = (2, 2, 2)$, 其中 \mathcal{L}^{\min} 为最细的属性粒度组合, \mathcal{L}^{\max} 为最粗的属性粒度组合, 生成的单粒度决策背景 $S^{c^{\max}}$ 、 S^{c^1} 、 S^{c^2} 、 S^{c^3} 、 S^{c^4} 、 S^{c^5} 、 S^{c^6} 和 $S^{c^{\min}}$ 分别如表 5—表 12 所示。

表 5 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^{\max} = (1, 1, 1)$ 的单粒度决策背景 $S^{c^{\max}}$
Table 5 Single-granularity decision context $S^{c^{\max}}$ with $\mathcal{L}^{\max} = (1, 1, 1)$

$S^{c^{\max}}$	$C_{a_1}^1$		$C_{a_2}^1$		$C_{a_3}^1$		d_1	d_2	d_3
	a_1	a_2	a_3						
x_1	1	0	0	1	1	1			
x_2	1	0	0	1	1	1			
x_3	1	1	0	1	1	1			
x_4	1	1	0	1	1	1			
x_5	1	1	1	0	1	1			
x_6	0	1	0	0	1	1			
x_7	0	1	1	0	0	1			
x_8	0	0	1	0	0	1			

3 多粒度决策背景的最优粒度选择

本文基于协调性进行最优粒度选择, 首先引入决策背景的协调性。

定义 16^[20] 设 (U, A, I, D, J) 为决策背景。若 $\forall x \in U$ 满足 $x^{\uparrow A \downarrow A} \subseteq x^{\uparrow D \downarrow D}$, 则称 (U, A, I, D, J) 是一

表6 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^1=(1, 1, 2)$ 的单粒度决策背景 S^{c^1}

Table 6 Single-granularity decision context S^{c^1} with $\mathcal{L}^1=(1, 1, 2)$

S^{c^1}	$C_{a_1}^1$		$C_{a_2}^1$		$C_{a_3}^2$		d_1	d_2	d_3
	a_1	a_2	a_{31}^2	a_{32}^2					
x_1	1	0	0	0	1	1	1	1	
x_2	1	0	0	0	1	1	1	1	
x_3	1	1	0	0	1	1	1	1	
x_4	1	1	0	0	1	1	1	1	
x_5	1	1	1	0	0	1	1	1	
x_6	0	1	0	0	0	1	1	1	
x_7	0	1	1	1	0	0	1	1	
x_8	0	0	0	1	0	0	1	1	

表7 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^2=(1, 2, 1)$ 的单粒度决策背景 S^{c^2}

Table 7 Single-granularity decision context S^{c^2} with $\mathcal{L}^2=(1, 2, 1)$

S^{c^2}	$C_{a_1}^1$	$C_{a_2}^2$		$C_{a_3}^1$	d_1	d_2	d_3
	a_1	a_{21}^2	a_{22}^2	a_3			
x_1	1	0	0	0	1	1	1
x_2	1	0	0	0	1	1	1
x_3	1	1	1	0	1	1	1
x_4	1	1	1	0	1	1	1
x_5	1	1	0	1	0	1	1
x_6	0	1	0	0	0	1	1
x_7	0	0	1	1	0	0	1
x_8	0	0	0	1	0	0	1

表8 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^3=(2, 1, 1)$ 的单粒度决策背景 S^{c^3}

Table 8 Single-granularity decision context S^{c^3} with $\mathcal{L}^3=(2, 1, 1)$

S^{c^3}	$C_{a_1}^2$		$C_{a_2}^1$	$C_{a_3}^1$	d_1	d_2	d_3
	a_{11}^2	a_{12}^2	a_2	a_3			
x_1	1	0	0	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0	1	1	1
x_3	1	1	1	0	1	1	1
x_4	1	1	1	0	1	1	1
x_5	0	1	1	1	0	1	1
x_6	0	0	1	0	0	1	1
x_7	0	0	1	1	0	0	1
x_8	0	0	0	1	0	0	1

表9 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^4=(2, 2, 1)$ 的单粒度决策背景 S^{c^4}

Table 9 Single-granularity decision context S^{c^4} with $\mathcal{L}^4=(2, 2, 1)$

S^{c^4}	$C_{a_1}^2$		$C_{a_2}^2$		$C_{a_3}^1$	d_1	d_2	d_3
	a_{11}^2	a_{12}^2	a_{21}^2	a_{22}^2	a_3			
x_1	1	0	0	0	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0	0	1	1	1
x_3	1	1	1	1	0	1	1	1
x_4	1	1	1	1	0	1	1	1
x_5	0	1	1	0	1	0	1	1
x_6	0	0	1	0	0	0	1	1
x_7	0	0	0	1	1	0	0	1
x_8	0	0	0	0	1	0	0	1

表10 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^5=(2,1,2)$ 的单粒度决策背景 S^{c^5}

Table 10 Single-granularity decision context S^{c^5} with $\mathcal{L}^5=(2,1,2)$

S^{c^5}	$C_{a_1}^2$		$C_{a_2}^1$	$C_{a_3}^2$		d_1	d_2	d_3
	a_{11}^2	a_{12}^2	a_2	a_{31}^2	a_{32}^2			
x_1	1	0	0	0	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0	0	1	1	1
x_3	1	1	1	0	0	1	1	1
x_4	1	1	1	0	0	1	1	1
x_5	0	1	1	1	0	0	1	1
x_6	0	0	1	0	0	0	1	1
x_7	0	0	1	1	1	0	0	1
x_8	0	0	0	0	1	0	0	1

表11 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^6=(1,2,2)$ 的单粒度决策背景 S^{c^6}

Table 11 Single-granularity decision context S^{c^6} with $\mathcal{L}^6=(1,2,2)$

S^{c^6}	$C_{a_1}^1$	$C_{a_2}^2$		$C_{a_3}^2$		d_1	d_2	d_3
	a_1	a_{21}^2	a_{22}^2	a_{31}^2	a_{32}^2			
x_1	1	0	0	0	0	1	1	1
x_2	1	0	0	0	0	1	1	1
x_3	1	1	1	0	0	1	1	1
x_4	1	1	1	0	0	1	1	1
x_5	1	1	0	1	0	0	1	1
x_6	0	1	0	0	0	0	1	1
x_7	0	0	1	1	1	0	0	1
x_8	0	0	0	0	1	0	0	1

表12 对应属性粒度组合为 $\mathcal{L}^{\min}=(2,2,2)$ 的单粒度决策背景 $S^{c^{\min}}$

Table 12 Single-granularity decision context $S^{c^{\min}}$ with $\mathcal{L}^{\min}=(2,2,2)$

S	$C_{a_1}^2$		$C_{a_2}^2$		$C_{a_3}^2$		d_1	d_2	d_3
	a_{11}^2	a_{12}^2	a_{21}^2	a_{22}^2	a_{31}^2	a_{32}^2			
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
x_2	1	1	0	0	0	0	1	1	1
x_3	1	1	1	1	0	0	1	1	1
x_4	1	1	1	1	0	0	1	1	1
x_5	0	1	1	0	1	0	0	1	1
x_6	0	0	1	0	0	0	0	1	1
x_7	0	0	0	1	1	1	0	0	1
x_8	0	0	0	0	0	1	0	0	1

个粒协调决策背景,否则称 (U, A, I, D, J) 是一个粒不协调决策背景。

接下来基于决策背景的协调性定义多粒度决策背景的协调性。

定义17 设 S 为 (U, A, I, D, J) 粒化生成的多粒度决策背景, \mathcal{L} 是 S 的属性粒度组合全体, $\mathcal{L}^{\min}=\{1,1,\dots,1\} \in \mathcal{L}$ 是 \mathcal{L} 中最细的属性粒度组合。若 $S^{c^{\min}}=(U, A^{c^{\min}}, I^{c^{\min}}, D, J)$ 是粒协调决策背景,则称 S 是粒协调多粒度决策背景,否则称 S 是粒不协调多粒度决策背景。

多粒度决策背景具有多个属性粒度组合,如何为多粒度决策背景选取最优属性粒度组合,使之形成的单粒度决策背景更适用于处理当前环境下的问题是十分重要的。在粒协调多粒度决策背景中,随着属性粒度组合越来越粗,对对象的区分能力会减弱,归纳生成的知识更具有意义,但随着属性粒度组合的转变,可能会导致分解生成的单粒度决策背景是不协调的。因此,在多粒度决策背景中,与决策协调且区分最弱的那个属性粒度组合就是要寻找的最优属性粒度组合。下面

定义协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合。

定义 18 设 S 是粒协调多粒度决策背景, L 是 S 的属性粒度组合全体。若存在 $\mathcal{L}^o \in L$, 使得 $S^{\mathcal{L}^o}$ 是粒协调决策背景, 且对于任意的 $\mathcal{L} \succcurlyeq \mathcal{L}^o, S^{\mathcal{L}}$ 是粒不协调多粒度决策背景, 则称 \mathcal{L}^o 是 S 的最优属性粒度组合。

根据定义 18, \mathcal{L}^o 是最优属性粒度组合当且仅当 \mathcal{L}^o 是使得 $S^{\mathcal{L}^o}$ 为粒协调多粒度决策背景的最粗粒度组合。需要指出是, S 中最优粒度组合可能不唯一。

例 5 对于表 4 所示的多粒度决策背景 S, S 的全部属性粒度组合有: $\mathcal{L}^{\max} = (1, 1, 1), \mathcal{L}^1 = (1, 1, 2), \mathcal{L}^2 = (1, 2, 1), \mathcal{L}^3 = (2, 1, 1), \mathcal{L}^4 = (2, 2, 1), \mathcal{L}^5 = (2, 1, 2), \mathcal{L}^6 = (1, 2, 2), \mathcal{L}^{\min} = (2, 2, 2)$, 生成的单粒度决策背景 $S^{\mathcal{L}^{\max}}, S^{\mathcal{L}^1}, S^{\mathcal{L}^2}, S^{\mathcal{L}^3}, S^{\mathcal{L}^4}, S^{\mathcal{L}^5}, S^{\mathcal{L}^6}$ 和 $S^{\mathcal{L}^{\min}}$ 分别如表 5—表 12 所示。

首先判断 S 是否为粒协调多粒度决策背景。根据表 4 计算可知, $x_1^{\uparrow D \downarrow D}, \dots, x_8^{\uparrow D \downarrow D} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, U, U$ 。

根据表 12 计算可知, $x_1^{\uparrow A^{\min} \downarrow A^{\min}}, \dots, x_8^{\uparrow A^{\min} \downarrow A^{\min}} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_7\}, \{x_7, x_8\}$ 。根据计算结果可得, 对于 $\forall x \in U$ 均有 $x^{\uparrow A^{\min} \downarrow A^{\min}} \subseteq x^{\uparrow D \downarrow D}$, 因此 $S^{\mathcal{L}^{\min}}$ 是粒协调决策背景, 再由定义 17 可知 S 是粒协调多粒度决策背景。

接下来分析 S 的最优粒度组合。根据表 9 计算可知, $x_1^{\uparrow A^c \downarrow A^c}, \dots, x_8^{\uparrow A^c \downarrow A^c} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_7\}, \{x_5, x_7, x_8\}$, 即对于 $\forall x \in U$ 均有 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq x^{\uparrow D \downarrow D}$, 因此由定义 16 可知 $S^{\mathcal{L}^4}$ 是粒协调决策背景。

类似计算可知, $S^{\mathcal{L}^{\max}}, S^{\mathcal{L}^1}, S^{\mathcal{L}^2}, S^{\mathcal{L}^3}, S^{\mathcal{L}^5}, S^{\mathcal{L}^6}$ 是粒不协调决策背景, 因此 \mathcal{L}^4 是 S 的最优粒度。

下面结论表明, 可以通过证据理论刻画决策背景的粒协调性和粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合。

定理 2 $S = (U, A, I, D, J)$ 为多粒度决策背景, L 为 \mathcal{F} 的全部粒度组合。对于 $\mathcal{L} \in L$, 有:

(1) $S^{\mathcal{L}}$ 是粒协调决策背景当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_D(X)$;

(2) $S^{\mathcal{L}}$ 是粒不协调决策背景当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) < \sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_D(X)$ 。

证明 (1) 由性质 2 (2) 可知, $\forall X \in L_U(U, D, J)$ 有 $\underline{R}_D(X) = X$, 结合 $\underline{R}_{A^c}(X) \subseteq X$ 可知 $\underline{R}_{A^c}(X) \subseteq \underline{R}_D(X)$ 。

若 $S^{\mathcal{L}}$ 是粒协调决策背景, 则由定义 16 可知, $\forall x \in U$ 有 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq x^{\uparrow D \downarrow D}$; 特别地, 对于 $X \in L_U(U, D, J)$, 若 $x \in \underline{R}_D(X) \subseteq U$, 则 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq x^{\uparrow D \downarrow D}$ 。由 $x \in \underline{R}_D(X)$ 可知 $x^{\uparrow D \downarrow D} \subseteq X$, 因此 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq X$, 即 $x \in \underline{R}_{A^c}(X)$ 。故 $\forall X \in L_U(U, D, J)$ 有 $\underline{R}_D(X) \subseteq \underline{R}_{A^c}(X)$, 结合 $\underline{R}_{A^c}(X) \subseteq \underline{R}_D(X)$ 可知

$\underline{R}_{A^c}(X) = \underline{R}_D(X)$, 进而可得 $\underline{Bel}_{A^c}(X) = \frac{|\underline{R}_{A^c}(X)|}{|U|} = \frac{|\underline{R}_D(X)|}{|U|} = \underline{Bel}_D(X)$ 。因此

$\sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_D(X)$ 。

反之, 若 $\sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U, D, J)} \underline{Bel}_D(X)$, 则 $\forall X \in L_U(U, D, J)$ 有 $\frac{|\underline{R}_{A^c}(X)|}{|U|} =$

$\underline{Bel}_{A^c}(X) = \underline{Bel}_D(X) = \frac{|\underline{R}_D(X)|}{|U|}$, 进而可得 $|\underline{R}_{A^c}(X)| = |\underline{R}_D(X)|$, 结合 $\underline{R}_{A^c}(X) \subseteq \underline{R}_D(X)$ 可知

$\underline{R}_{A^c}(X) = \underline{R}_D(X)$ 。

由于 $\forall x \in U$ 有 $x^{\uparrow D \downarrow D} \in L_U(U, D, J)$, 因此由性质 2 (2) 可知 $\underline{R}_D(x^{\uparrow D \downarrow D}) = x^{\uparrow D \downarrow D}$, 即 $\underline{R}_{A^c}(x^{\uparrow D \downarrow D}) = \underline{R}_D(x^{\uparrow D \downarrow D}) = x^{\uparrow D \downarrow D}$, 结合 $x \in x^{\uparrow D \downarrow D}$ 可得 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq x^{\uparrow D \downarrow D}$ 。因此 $\forall x \in U$ 有 $x^{\uparrow A^c \downarrow A^c} \subseteq x^{\uparrow D \downarrow D}$, $S^{\mathcal{L}}$ 是粒协调决

策背景。

总结可得 S^c 是粒协调决策背景当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$ 。

(2) 由性质 2 (2) 可知, $\forall X \in L_U(U,D,J)$ 有 $\underline{R}_D(X) = X$, 结合 $\underline{R}_{A^c}(X) \subseteq X$ 可知 $\underline{R}_{A^c}(X) \subseteq \underline{R}_D(X)$, 因此 $\underline{Bel}_{A^c}(X) \leq \underline{Bel}_D(X)$, 进而可得 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) \leq \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$ 。

由 (1) 可知, S^c 是粒协调决策背景当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$, 而 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) \leq \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$, 因此 S^c 是粒不协调决策背景当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) < \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$ 。

根据定理 2, S^c 是粒协调决策背景当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$, S^c 是粒不协调决策背景当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) < \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$, 即证据理论中信任函数可以刻画决策背景的粒协调性。下面我们基于信任函数来刻画粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合。

定理 3 设 S 为 (U, A, I, D, J) 粒化生成的粒协调多粒度决策背景, \mathcal{L} 为 S 的全部粒度组合, $\mathcal{L}^{\min} \in \mathcal{L}$ 为最细的粒度组。对于 $\mathcal{L}^o \in \mathcal{L}$, 如下条件等价:

(1) \mathcal{L}^o 是 S 的最优属性粒度组合;

(2) $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^{\mathcal{L}^o}}(X)$, 且 $\forall \mathcal{L} > \mathcal{L}^o$, 有 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) < \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^{\mathcal{L}}}(X)$ 。

证明 由定理 2 和定义 18 可知结论成立。

根据定理 3 可知, 可通过证据理论中的信任函数刻画粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合, \mathcal{L}^o 是 S 的最优属性粒度组合, 当且仅当 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) = \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$, 且 $\forall \mathcal{L} > \mathcal{L}^o$, 有 $\sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_{A^c}(X) < \sum_{X \in L_U(U,D,J)} \underline{Bel}_D(X)$ 。

根据定义 16, 在粒协调决策背景中, 具有相同条件的对象具有相同的决策, 即从决策角度看, 粒协调决策背景中不存在不确定性。再由定义 17 可知, 粒协调多粒度决策背景 S 中属性粒度最细的单粒度决策背景 $S^{\mathcal{L}^{\min}}$ 是粒协调决策背景, 因此 $S^{\mathcal{L}^{\min}}$ 中不存在不确定性。然而, 由于 $S^{\mathcal{L}^{\min}}$ 中属性过多, 导致数据稀疏, 生成的知识冗余度高、稀疏性强、应用性不广, 因此希望通过合并属性来粗化属性粒度层级, 进而减少知识冗余度。在合并过程中, 随着属性粒度变粗, 决策背景中可能引入了新的不确定性。因此, 在定义 18 中, 我们希望在保持粒协调性不变的情况下 (即不确定性保持在最低), 尽可能地粗化决策背景中的属性粒度, 并将最终获得的属性粒度组合定义为最优粒度。

定理 2 从定量的角度刻画了决策背景中的粒协调性, 即粒协调决策背景中的不确定性可以表示为 $S^{\mathcal{L}^{\min}}$, 因此最优粒度即在保持不确定性 $S^{\mathcal{L}^{\min}}$ 的基础下, 尽量合并决策背景中的属性, 从而减少了生成知识的冗余度。

4 结论

本文研究结果表明, 用多尺度研究的最优尺度选取方法可以被移植到多粒度研究中来。我们考虑决策信息对最优粒度选取的影响, 基于多粒度决策背景中的粒协调性, 给出粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合选取方法, 并且证明了粒协调多粒度决策背景的最优属性粒度组合可以由证据理论中的信任函数定量地刻画。在后续的研究中, 我们希望能基于证据理论研究不完备多粒度决策背景的最优粒度组合的选取问题。

参考文献:

- [1] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations[M]. DOI: 10.5555/550737.
- [2] ZOU C F, ZHANG D Q, WAN J F, *et al.* Using Concept Lattice for Personalized Recommendation System Design [J]. *IEEE Syst J*, 2017, **11**(1): 305–314. DOI: 10.1109/JSYST.2015.2457244.
- [3] ZHAI Y H, JIA N, ZHANG S X, *et al.* Study on Deduction Process and Inference Methods of Decision Implications[J]. *Int J Mach Learn Cyber*, 2022, **13**(7): 1959–1979. DOI: 10.1007/s13042-021-01499-y.
- [4] SAMPATH S, SPRENKLE S, GIBSON E, *et al.* Applying Concept Analysis to User-session-based Testing of Web Applications[J]. *IEEE Trans Softw Eng*, 2007, **33**(10): 643–658. DOI: 10.1109/TSE.2007.70723.
- [5] CARPINETO C, ROMANO G. A Lattice Conceptual Clustering System and Its Application to Browsing Retrieval[J]. *Mach Lang*, 1996, **24**(2): 95–122. DOI: 10.1023/A: 1018050230279.
- [6] ZADEH L A. Toward a Theory of Fuzzy Information Granulation and Its Centrality in Human Reasoning and Fuzzy Logic[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 1997, **90**(2): 111–127. DOI: 10.1016/S0165-0114(97)00077-8.
- [7] BELOHLAVEK R, DE BAETS B, KONECNY J. Granularity of Attributes in Formal Concept Analysis[J]. *Inf Sci Int J*, 2014, **260**: 149–170. DOI: 10.1016/j.ins.2013.10.021.
- [8] 李金海, 吴伟志, 邓硕. 形式概念分析的多粒度标记理论[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, **54**(2): 30–40. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.9.2018.002.
LI J H, WU W Z, DENG S. Multi-scale Theory in Formal Concept Analysis[J]. *J Shandong Univ Nat Sci*, 2019, **54**(2): 30–40. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.9.2018.002.
- [9] 李金海, 李玉斐, 米允龙, 等. 多粒度形式概念分析的介粒度标记方法[J]. 计算机研究与发展, 2020, **57**(2): 447–458. DOI: 10.7544/issn1000-1239.2020.20190279.
LI J H, LI Y F, MI Y L, *et al.* Meso-granularity Labeled Method for Multi-granularity Formal Concept Analysis [J]. *J Comput Res Dev*, 2020, **57**(2): 447–458. DOI: 10.7544/issn1000-1239.2020.20190279.
- [10] 李金海, 贺建君, 吴伟志. 多粒度形式概念分析的类属性块优化[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, **55**(5): 1–12. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.c.2020.002.
LI J H, HE J J, WU W Z. Optimization of Class-attribute Block in Multi-granularity Formal Concept Analysis[J]. *J Shandong Univ Nat Sci*, 2020, **55**(5): 1–12. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.c.2020.002.
- [11] 李金海, 贺建君. 多粒度形式背景的不确定性度量与最优粒度选择[J]. 控制与决策, 2022, **37**(5): 1299–1308. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1365.
LI J H, HE J J. Uncertainty Measurement and Optimal Granularity Selection for Multi-granularity Formal Context[J]. *Control Decis*, 2022, **37**(5): 1299–1308. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1365.
- [12] 魏玲, 祁建军, 张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学:信息科学, 2008, **38**(2): 195–208.
WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute Reduction of Concept Lattice in Decision-making Formal Background[J]. *Sci Sin Technol*, 2008, **38**(2): 195–208.
- [13] WU W Z, LEUNG Y. Theory and Applications of Granular Labelled Partitions in Multi-scale Decision Tables[J]. *Inf Sci*, 2011, **181**(18): 3878–3897. DOI: 10.1016/j.ins.2011.04.047.
- [14] WU W Z, LEUNG Y. Optimal Scale Selection for Multi-scale Decision Tables[J]. *Int J Approx Reason*, 2013, **54**(8): 1107–1129. DOI: 10.1016/j.ijar.2013.03.017.
- [15] PAWLAK Z. Rough Sets[J]. *Int J Comput Inf Sci*, 1982, **11**(5): 341–356. DOI: 10.1007/bf01001956.
- [16] SHAFER G. *A Mathematical Theory of Evidence*[M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976
- [17] WU W Z, LEUNG Y. A Comparison Study of Optimal Scale Combination Selection in Generalized Multi-scale Decision Tables[J]. *Int J Mach Learn Cyber*, 2020, **11**(5): 961–972. DOI: 10.1007/s13042-019-00954-1.
- [18] GRECO S, MATARAZZO B, SLOWINSKI R. Rough Approximation by Dominance Relations[J]. *Int J Intell Syst*, 2002, **17**(2): 153–171. DOI: 10.1002/int.10014.
- [19] 陈东晓, 李进金. 形式背景的下近似协调与粒协调的关系[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2020, **41**(1): 130–136. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201907035.
CHEN D X, LI J J. Relationships Between Lower Approximation Consistent and Granular Consistent in Formal Contexts[J]. *J Huaqiao Univ Nat Sci*, 2020, **41**(1): 130–136. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201907035.
- [20] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular Computing and Knowledge Reduction in Formal Contexts[J]. *IEEE Trans Knowl Data Eng*, 2009, **21**(10): 1461–1474. DOI: 10.1109/TKDE.2008.223.