

近邻相互作用下 mosaic 模型的局域化研究

焦艳, 梁军军*

(山西大学 物理电子工程学院, 山西 太原 030006)

摘要:本文研究了近邻相互作用下一维无自旋费米系统中 mosaic 模型在非公度光学晶格中的局域化问题,通过调节相互作用强度和准周期势强度来实现热化到多体局域的转变。利用精确对角化方法计算系统中基态与中间六分之一能级对应的本征态的规范参与率,发现在热化相和多体局域相之间存在混合相。在此区域内,系统中间能级对应的激发态比基态更早局域化,这与相互作用 Aubry-André 模型的混合相性质不同。分别利用密度矩阵重整化群和精确对角化方法,计算基态单粒子激发的密度波动函数和激发态近邻能级间距比与纠缠熵,得到混合相的两条相边界。从相图中可以发现,在多体系统中弱准周期势只能使激发态局域却不能使基态局域,而相互作用的存在降低了基态局域所需的准周期势强度。

关键词:多体局域;热化;精确对角化;密度矩阵重整化群

中图分类号:O413.3 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2024)02-0385-07

Localization of Mosaic Model with Neighbor Interaction

JIAO Yan, LIANG Junjun*

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: In this paper, we study the localization problem of mosaic model in a one-dimensional spinless fermi system in an incommensurate optical lattice with near neighbor interactions, which realizes the transition from thermalization to multi-body localization by adjusting the intensity of interaction and quasi-periodic potential. The normalized participation rate of the eigenstates corresponding to the ground state and the middle sixth energy level in the system is calculated by the exact diagonalization method. It is found that there are mixed phases between the thermal phase and the multi-body local phase. In this region, the excited state corresponding to the intermediate energy level of the system is localized earlier than that corresponding to the ground state, which is different from the mixed phase property of the interaction Aubry-Andre model. By means of density matrix renormalization group and exact diagonalization method, the density fluctuation function of ground-state single particle excitation, the ratio of neighbor level spacing and entanglement entropy of excited state are calculated, and two phase boundaries of mixed phase are obtained. It can be seen from the phase diagram that the weak quasi-periodic potential can only localize the excited state but not the ground state in the multi-body system, and the existence of the interaction reduces the required quasi-periodic potential strength for the ground state localization.

Key words: multi-body localization; thermalization; exact diagonalization; density matrix renormalization group

0 引言

1958年,美国物理学家安德森预言了无相互作用系统中的安德森局域化(Anderson Local-

ization, AL)^[1]现象,引起了人们的广泛关注。研究发现,在一维和二维系统中,无序会导致局域化现象,在三维情况下则会出现迁移率边^[2-3]。然而在三维系统中研究迁移率边是极

收稿日期:2022-12-29;接受日期:2023-03-23

基金项目:国家自然科学基金(11875181)

作者简介:焦艳(1997-),女,山西忻州人,硕士研究生,研究方向为凝聚态物理。E-mail:15735640320@163.com

*通信作者:梁军军(LIANG Junjun),E-mail:liangjj@sxu.edu.cn

引文格式:焦艳,梁军军.近邻相互作用下 mosaic 模型的局域化研究[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(2):385-391. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023073

为困难的,因此人们致力于在低维系统中开发迁移率边。1980年 Aubry 和 André 提出的 Aubry-André (AA)模型是研究 AL 最简单的模型,但由于该模型本身存在自对偶性,使得系统中无法出现迁移率边^[4]。Roati 等于 2008 年在冷原子系统里成功模拟了 AA 模型,并且观测到了 AL 现象,自此人们开始以 AA 模型为平台对其扩展模型进行研究^[5]。例如在 AA 模型的基础上加入 P 波配对项来研究拓扑超导相到安德森局域相的转变^[6-7],加入相互作用项研究热化相到多体局域相 (MBL) 的转变^[8-10],等等。

近年来,人们对多体系统中呈现的热化和 MBL 现象表现出了极大的兴趣。一个孤立的量子多体系统经过长时间动力学演化后初态信息丢失,此时系统中局域可观测量期望的时间平均与微正则系综的统计平均是相等的,系统为可热化的,满足本征态热化假说 (Eigenstate Thermalization Hypothesis, ETH)^[11]。当系统中存在无序时,将会出现违背 ETH 的 MBL 现象^[12],此时系统能够保留一定的初态信息。2016 年, Wang 等提出了多体系统中除热化相和 MBL 相外还可能存在一个介于两者之间的混合相,在这个混合相中基态与激发态表现出不同的局域行为^[13]; 2021 年, Wang 等证明了系统中多体临界 (MBC) 相的存在,提出 MBC 相的能级统计服从临界统计,波函数表现出深度多重分形行为,得到 MBC 相扩展但是非热化的结论^[14]; 2020 年,他们利用具有一维自旋-轨道耦合和非公度塞曼势的光拉曼晶格方案实现了 MBL^[15]。以 AA 模型为例,人们研究其在多体系统中热化到 MBL 的转变,随着无序强度增加,系统从热化相逐渐转变到多体局域相,但在某一无序强度范围内,基态处于局域状态而中间能级对应的本征态处于扩展状态,通过密度矩阵重整化群 (DMRG)^[16] 和精确对角化 (ED)^[17] 方法分别计算基态和中间态从热化到多体局域的转变点,进而确定该强度范围。改变相互作用强度计算上述无序强度范围,就能够得到一个基态局域而中间态扩展的混合相的相图^[13]。将 AA 模型的准周期加以调制,使得系统中每隔特定个格点才能感受到一个准周期势 (如准周期势只影响偶格点而不影响奇格

点),这样就得到了 mosaic 模型^[18]。人们得到了该模型中的单粒子系统的精确迁移率边,进而分析了该系统的局域性质,而当粒子之间存在关联时,多体系统的局域化将会表现成什么样的行为则是本文的研究内容。接下来我们将计算多体系统中 mosaic 模型不同能级的规范参与率^[19],对于基态,研究其单粒子密度波动函数、单粒子密度矩阵,对于激发态,研究中间三分之一能级对应本征态的能级统计^[20]、纠缠熵^[21]等物理量,从而研究该模型在多体系统中热化到多体局域的转变以及基态和激发态在中间相中的不同行为。对多体局域的研究一方面深化了热力学统计理论的内涵,另一方面多体局域为研究时间晶体^[22]等夯实了基础。

1 理论模型

我们研究在一维非公度光学晶格中具有最近邻相互作用的无自旋费米系统,在 mosaic 模型的基础上加入相互作用,其哈密顿量表示为

$$H = t \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + H.c.) + 2 \sum_j \lambda_j \hat{n}_j + V \hat{n}_j \hat{n}_{j+1},$$

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda \cos(2\pi(\omega j + \theta)), & j = m\kappa \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

其中 t 是最近邻格点间的跃迁系数 (将其设为能量单位,取值为 1), \hat{c}_j^\dagger (\hat{c}_j) 是第 j 个格点上费米子的产生 (湮灭) 算符, λ 为准周期势强度, ω 是一个无理数,取值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 只有格点数为 κ 的 m 倍 ($m=1, 2, 3, \dots$) 时才能够感受到这一准周期势, θ 为相位差, \hat{n}_j 为第 j 个格点上的粒子数算符,其表达式为 $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$, V 为相互作用强度, N 为系统中粒子数, L 为系统尺寸。以下研究均在开边界条件下进行,以 $\kappa=2, N=L/2$ 为例。

本文使用 DMRG 和 ED 方法分别对基态和中间激发态进行计算。其中 DMRG 可以用来研究一维较大尺寸系统的基态性质,通过改变扫描数 (SWEEPS) 和最大态 (MAXSTATES) 来调节计算精度,但不能计算激发态物理量。因此我们使用 ED 计算中间激发态,首先确定系统的一组正交完备基,然后将哈密顿量分别作用在每一个基矢上构成一个稀疏矩阵,计算

这个稀疏矩阵的本征值和本征态,进一步求得所需可观测量。但由于系统尺寸过大会使希尔伯特空间维度指数增长,造成计算困难,只适用于计算小尺寸系统。为提高计算效率,我们使用 DMRG 方法研究基态,使用 ED 方法对中间激发态进行研究。

2 结果与分析

2.1 基态与激发态对比研究

为了研究 mosaic 模型在多体系统中热化到多体局域的转变,我们计算多体系统中本征态的规范参与率(NPR):

$$\eta(E) = \frac{1}{\sum_{\{n_1, n_2, \dots, n_L\}} |\Psi_E(\{n_1, n_2, \dots, n_L\})|^4 V_H}, \quad (2)$$

其中 Ψ_E 为 Fock 基下的多体波函数, E 为对应的能级, V_H 为希尔伯特空间维度。在热力学极限下, NPR 值趋于 0 表明其对应能级的本征态处于多体局域的状态, NPR 为有限值时其多体波函数展现出扩展性质,如图 1 所示。通过对比发现,在准周期势较强区域(4.4 左右),系统基态的 NPR 值大于中间六分之一能级对应的本征态的 NPR 值,这表明在强准周期势作用下系统中间能级对应的本征态先于基态局域。

由于系统中基态与中间六分之一能级对应的本征态在固定相互作用强度和准周期势的情

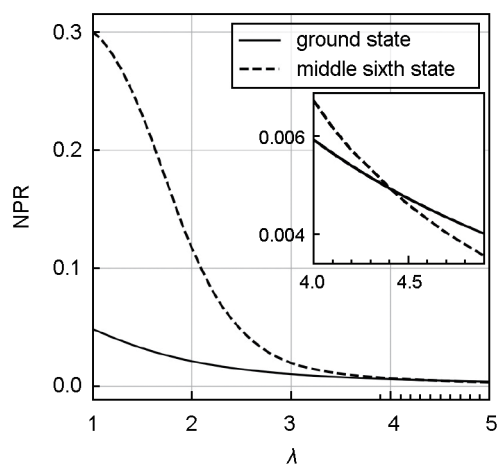


图 1 $L=16, V=0.4$ 时基态和中间六分之一能级对应本征态的 NPR 值随着准周期势强度的变化曲线

Fig. 1 Change curve of NPR value of ground state and middle one-sixth level corresponding eigenstate with quasi-periodic potential intensity when $L=16$ and $V=0.4$

况下表现出了不同的局域行为,我们分别通过 DMRG 和 ED 方法对基态和中间三分之一能级对应的激发态进行研究。

2.2 基态研究

2.2.1 单粒子激发的密度波动函数

通过多体系统中单个粒子的分布概率来描述所有粒子的分布。为了能够直观地观察到粒子在多体系统中的分布概率,我们向系统中加一个粒子,将其视为一个新系统,分别计算原系统与新系统中基态的密度分布 $\rho_N(i) = \langle \Psi(N) | \hat{n}_i | \Psi(N) \rangle$, 将两个值相减,就可以得到单个粒子在系统中的密度分布 $\delta n_i = \rho_{N+1}(i) - \rho_N(i)$, 利用该分布我们可以判断系统是否处于局域化。尺寸太小则粒子分布规律不明显,在这里我们使用 DMRG 方法对 $L=80, V=0.6$ 的系统进行计算,调节准周期势强度来观察系统单粒子密度分布,如图 2 所示。图 2(a)、(b) 分别为 $\lambda=3$ 和 $\lambda=7$ 时的系统单粒子密度分布,当 $\lambda=3$ 时,粒子在格点上均匀分布,当 $\lambda=7$ 时,粒子被局域在某些格点上,不再扩展在整个系统中,这说明准周期势强度的增加能够使系统基态由扩展变为局域。

为了进一步确定基态从扩展到局域的转变点,我们计算单粒子激发的密度波动函数 $I_{df} = \sum_i (\delta n_i)^2$, 这与单粒子系统中的逆参与率(IPR)是对应的,因此多体系统中的参与率可写为 $PR = 1/I_{df}$, 为表达方便我们用 IPR 表示 I_{df} 。在热力学极限下,当基态扩展时,粒子在系统中呈均匀分布,此时格点上粒子的密度较小, IPR 趋于零, PR 值接近于 $L/2$; 当基态局域时某些格点上粒子密度较大, PR 和 IPR 都接近于 1。如图 3 所示,图 3(a)、(b) 分别为 $V=0.6$ 时 IPR、PR 随准周期势强度的变化曲线,在图 3(a)中, IPR 随 λ 增大而增大,逐渐趋近于 1,在图 3(b)中, PR 随 λ 增大而减小,也逐渐趋近于 1,这表明系统基态波函数由扩展变得越来局域。图 3(c)为 $d(PR)/d\lambda$ 随 λ 的变化,图中出现的尖峰即为基态扩展到多体局域的转变点,对比不同尺寸下基态从扩展到多体局域的转变点,发现其具有尺寸效应,随着尺寸的增大,转变点稳定在 $\lambda=4.4$ 左右。图 3(c)中的插图对

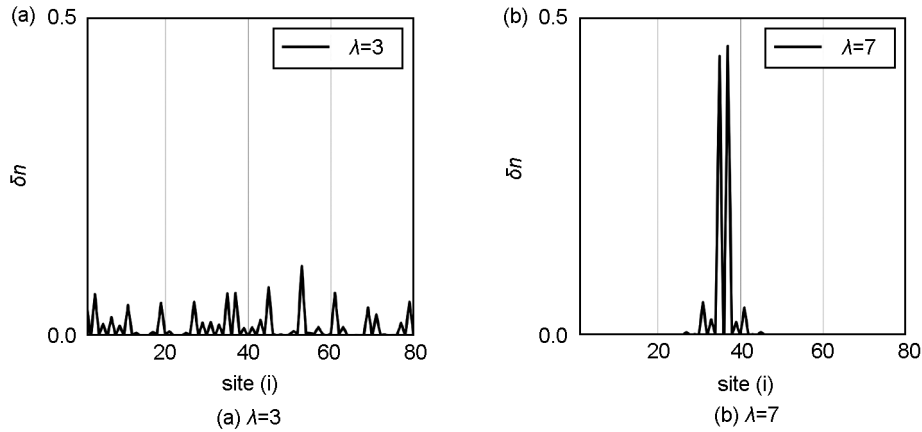


图2 $V=0.6$ 时不同准周期势强度 λ 下的单粒子密度分布

Fig. 2 One-particle density distribution with different disorder intensities λ at $V=0.4$

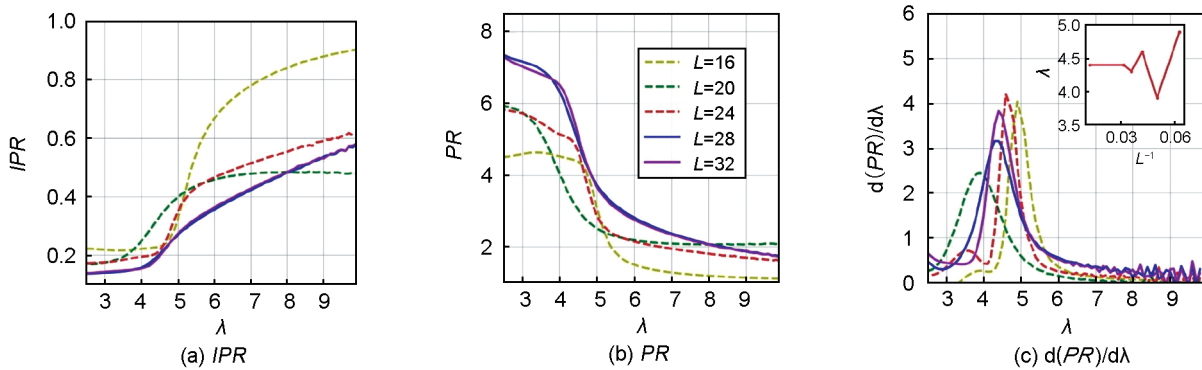


图3 $V=0.6$ 时 $IPR, PR, d(PR)/d\lambda$ 随准周期势强度 λ 的变化曲线

Fig. 3 Variation curves of $IPR, PR, d(PR)/d\lambda$ with quasi-periodic potential intensity λ when $V=0.6$

所有计算所得的基态转变点做尺寸分析,表明系统基态从热化到多体局域的转变点趋于一个稳定值($\lambda \approx 4.4$)。

改变相互作用强度分别得到不同的转变点,根据这些转变点描绘出一个基态从热化相转变为多体局域相的相图,具体相图将会在文章最后给出。

2.2.2 单粒子密度矩阵

为了验证得到的相图,分别取基态热化相和多体局域相区域的点计算其单粒子密度矩阵(OPEM) $\rho_{ij} = \langle \Psi_m | c_i^\dagger c_j | \Psi_m \rangle$,如图4所示。图4(a)为基态热化相中的OPEM,由于系统为半填充,其矩阵对角元均在1/2左右,表明整个系统中粒子均匀分布;图4(b)为基态多体局域相中的OPEM,其对角元趋近于0或1,这表明粒子被局域在某些格点上,与我们的相图一致。

2.3 激发态研究

2.3.1 近邻能级间距比

最近邻能级间距分布和最近邻能级间距比都能够描述能谱涨落,但计算最近邻能级间距分布需要先计算能谱展宽,再将其映射到新的无量纲能级后进行统计平均,而计算多体系统的能谱展宽是非常困难的,因此人们提出了最近邻能级间距比。利用ED方法先将系统哈密顿量对角化得到所有能级的本征值 E_n ,将 E_n 升序排列后使得相邻本征值相减,这样就得到了最近邻能级间距 $\delta_n = E_{n+1} - E_n$,再将相邻两个能级间距较小值与较大值相比,得到无量纲的最近邻能级间距比 $r_n = \min(\delta_n, \delta_{n-1}) / \max(\delta_n, \delta_{n-1})$,通过改变哈密顿量中的相位来取不同的样本对 r_n 进行统计平均得到平均近邻能级间距比 $\langle r \rangle$ 。能级统计在热化相中服从高斯正交分布,通过随机矩阵方法得到 $\langle r \rangle \approx 0.529$,在多体局域相中服从泊松统计, $\langle r \rangle \approx 0.387$ 。从图5中可以看出,随着准

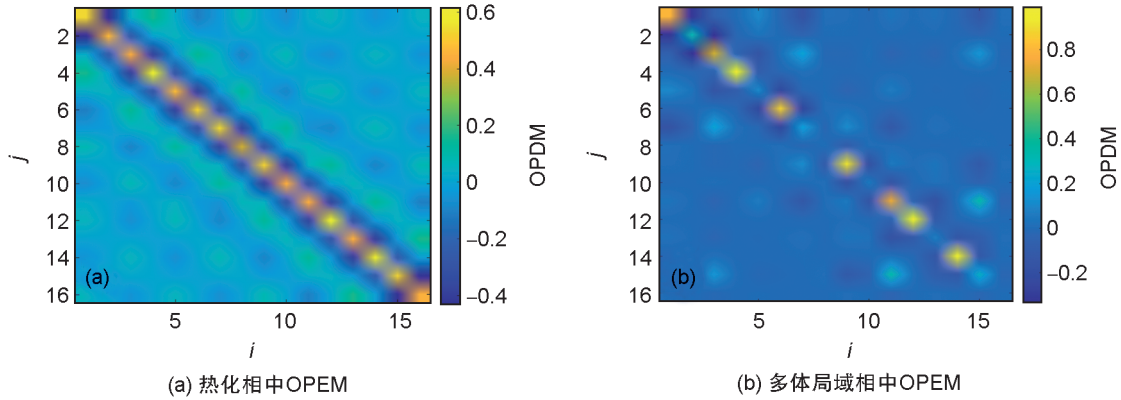
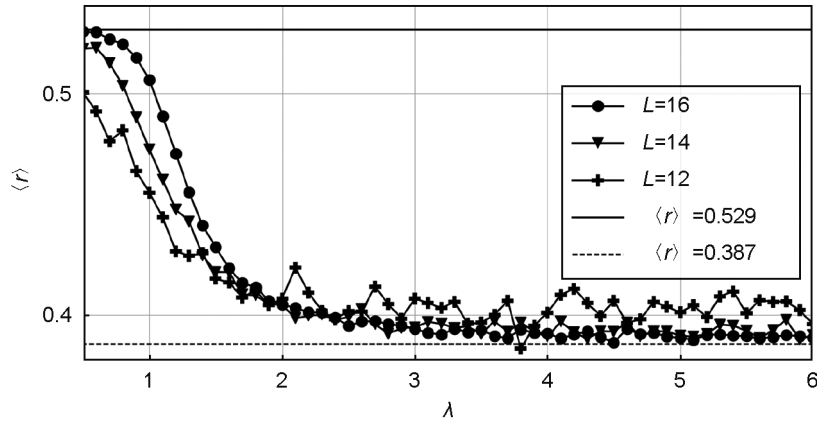


图4 基态分别处于热化相和多体局域相时的OPEM

Fig. 4 OPEM when the ground states are respectively in thermalized phase and multi-body local phase

图5 $\langle r \rangle$ 随准周期势强度的变化Fig. 5 Change of $\langle r \rangle$ with quasi-periodic potential strengths

周期势强度增加,平均近邻能级间距比 $\langle r \rangle$ 从0.529逐渐转变到了0.387,但是中间还有相当一部分值既不在0.529附近,也不靠近0.387,这说明在热化和多体局域相中间可能还存在一个混合相,其能级统计既不服从高斯正交分布,也不服从泊松统计^[23]。

2.3.2 纠缠熵

系统纠缠熵变动幅度较大时极易出现相变,因此我们可以通过计算系统中间激发态的平均纠缠熵 $\langle S \rangle$ 来确定其热化到多体局域的相变点。将系统分为A、B两部分,其中A部分作为研究的子系统,B部分作为其热浴,将哈密顿量对角化得到系统完整本征态,取出其中一个态 $|n\rangle$,求其密度矩阵 $\rho^{(n)} = |n\rangle\langle n|$,对A部分求迹得到其约化密度矩阵 $\rho_A^{(n)} = \text{Tr}_B(\rho^{(n)})$,再将 ρ_A 对角化得到其本征值,纠缠熵 $S = -\sum_i \rho_i \ln \rho_i$,其中 ρ_i 即为约化密度矩阵的第 i 个本征值。通

过改变相位来获取不同的样本,计算纠缠熵后求其平均值,便得到 $\langle S \rangle$ 。在一维准周期系统中,热化相的纠缠熵满足体积律,与晶格尺寸成正比;多体局域相的纠缠熵满足面积率,其大小与晶格尺寸无关。图6(a)展示了不同系统尺寸下中间三分之一能级对应本征态的 $\langle S \rangle$ 随准周期势强度的变化,在 λ 较小处与系统尺寸成正比,在 λ 较大处则为一个与尺寸无关的数,这表明了系统中间激发态发生了从扩展到局域的转变;图6(b)展示了纠缠熵的导数 $d\langle S \rangle/d\lambda$ 随 λ 增大的变化,此时出现的尖峰即为激发态从扩展到局域的转变点。

2.4 相图

通过研究不同相互作用下基态的IPR值和中间三分之一态的纠缠熵,分析出基态和激发态从扩展到局域的转变点,从而得到系统相图,如图7所示。在这里我们限定相互作用的范围为 $0 \sim 2t$,区域I和II为基态扩展区,区域

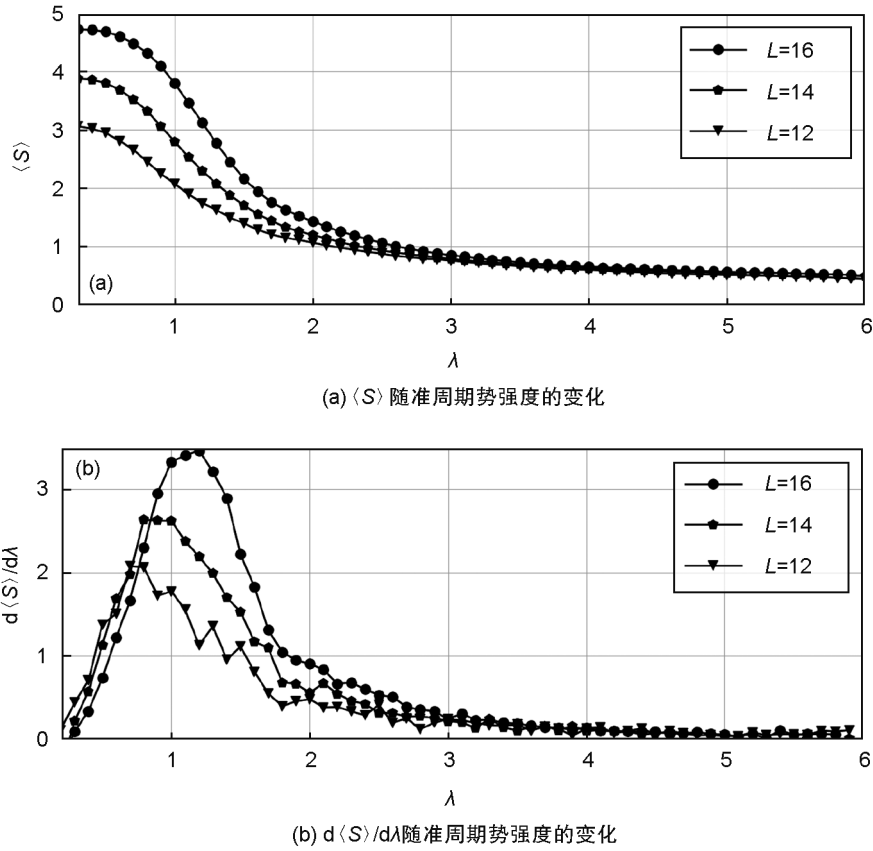


图6 V=0.4时不同尺寸下<S>及其导数随准周期势强度的变化

Fig. 6 The variation of <S> and its derivatives with quasi-periodic potential strength at different sizes when V=0.4

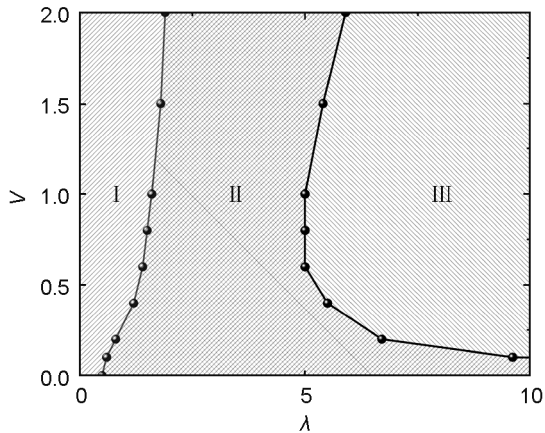


图7 系统取不同参数对应的相图

区域 I 为热化相,区域 II 为扩展和局域共存的混合相,区域 III 为 MBL 相

Fig. 7 The system taking the phase diagram corresponding to different parameters

Region I is the thermal phase, region II is the mixed phase of expansion and local coexistence, and region III is the MBL phase

II 和 III 为激发态局域区,此时区域 I 为热化相,区域 III 为多体局域相,中间的区域 II 为基态处于扩展状态而激发态处于局域状态的混合

相。在区域 II 右侧边界在 lambda=10 时依然没有与横坐标相交,当系统中粒子数为半填充,但粒子间不存在相互作用时,基态一直处于扩展状态,加入相互作用后,基态出现 MBL 现象。

3 结论

通过对粒子数半填充的一维无自旋费米系统中热化到多体局域相变的研究,明确其中存在热化相、混合相、MBL 相三个部分,其中混合相的部分扩展态与局域态共存,通过 NPR 对比可以直观地对其进行表述。为了确定混合相的边界,研究单粒子激发的密度分布确定热化相和混合相之间的边界,研究纠缠熵确定混合相和 MBL 相之间的边界,由此得到相图中的区域 II。由相图我们可以看出,当 V=0 时基态处于扩展状态,准周期势对其影响较小,而激发态在准周期势较弱的状态下变得局域,表明准周期势对激发态影响很大;当 V>0 时,基态在准周期势较强区域处于局域状态,激发态在准周期势较弱区域已经局域,则在混

合相中激发态先于基态局域。由此可见,对于 mosaic 模型,在多体系统中弱准周期势只能使激发态局域而不能使基态局域。

参考文献:

- [1] ANDERSON P W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices[J]. *Phys Rev*, 1958, **109**(5): 1492–1505. DOI: 10.1103/physrev.109.1492.
- [2] GANESHAN S, PIXLEY J H, DAS SARMA S. Nearest Neighbor Tight Binding Models with an Exact Mobility Edge in one Dimension[J]. *Phys Rev Lett*, 2015, **114**(14): 146601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.146601.
- [3] BIDDLE J, DAS SARMA S. Predicted Mobility Edges in One-dimensional Incommensurate Optical Lattices: an Exactly Solvable Model of Anderson Localization[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, **104**(7): 070601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070601.
- [4] AUBRY S, ANDRÉ G. Analyticity Breaking and Anderson Localization in Incommensurate Lattices[J]. *Ann Israel Phys Soc*, 1980, **3**(133):18.
- [5] ROATI G, D'ERRICO C, FALLANI L, *et al.* Anderson Localization of a Non-interacting Bose-Einstein Condensate [J]. *Nature*, 2008, **453**(7197): 895–898. DOI: 10.1038/nature07071.
- [6] WANG J, LIU X J, GAO X L, *et al.* Phase Diagram of a Non-abelian Aubry-André-harper Model with P-wave Superfluidity[J]. *Phys Rev B*, 2016, **93**(10): 104504. DOI: 10.1103/physrevb.93.104504.
- [7] WANG Y C, WANG Y C, CHEN S. Spectral Statistics, Finite-size Scaling and Multifractal[J]. *Eur Phys J B*, 2016, **89**(11): 254. DOI: 10.1140/epjb/e2016-70473-y.
- [8] IYER S, OGANESYAN V, REFAEL G, *et al.* Many-body Localization in a Quasiperiodic System[J]. *Phys Rev B*, 2013, **87**(13): 134202. DOI: 10.1103/physrevb.87.134202.
- [9] CAO A, SAJJAD R, MAS H, *et al.* Interaction-driven Breakdown of Dynamical Localization in a Kicked Quantum Gas[J]. *Nat Phys*, 2022, **18**(11): 1302–1306. DOI: 10.1038/s41567-022-01724-7.
- [10] SETIAWAN F, DENG D L, PIXLEY J H. Transport Properties across the Many-body Localization Transition in Quasiperiodic and Random Systems[J]. *Phys Rev B*, 2017, **96**(10): 104205. DOI: 10.1103/physrevb.96.104205.
- [11] SREDNICKI M. Chaos and Quantum Thermalization [J]. *Phys Rev E*, 1994, **50**(2): 888–901. DOI: 10.1103/physreve.50.888.
- [12] HUSE D A, NANDKISHORE R, OGANESYAN V. Phenomenology of Fully Many-body-localized Systems [J]. *Phys Rev B*, 2014, **90**(17): 174202. DOI: 10.1103/physrevb.90.174202.
- [13] WANG Y C, HU H P, CHEN S. Many-body Ground State Localization and Coexistence of Localized and Extended States in an Interacting Quasiperiodic System [J]. *Eur Phys J B*, 2016, **89**(3): 77. DOI: 10.1140/epjb/e2016-60873-4.
- [14] WANG Y C, CHENG C, LIU X J, *et al.* Many-body Critical Phase: Extended and Nonthermal[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **126**(8): 080602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.080602.
- [15] WANG Y C, ZHANG L, NIU S, *et al.* Realization and Detection of Nonergodic Critical Phases in an Optical Raman Lattice[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(7): 073204. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.073204.
- [16] WHITE S R. Density Matrix Formulation for Quantum Renormalization Groups[J]. *Phys Rev Lett*, 1992, **69**(19): 2863–2866. DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.2863.
- [17] LIN H Q, GUBERNATIS J E, GOULD H, *et al.* Exact Diagonalization Methods for Quantum Systems[J]. *Comput Phys*, 1993, **7**(4): 400–407. DOI: 10.1063/1.4823192.
- [18] WANG Y C, XIA X, ZHANG L, *et al.* One-dimensional Quasiperiodic Mosaic Lattice with Exact Mobility Edges[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(19): 196604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.196604.
- [19] LI X P, GANESHAN S, PIXLEY J H, *et al.* Many-body Localization and Quantum Nonergodicity in a Model with a Single-particle Mobility Edge[J]. *Phys Rev Lett*, 2015, **115**(18): 186601. DOI: 10.1103/physrevlett.115.186601.
- [20] PAL A, HUSE D A. Many-body Localization Phase Transition[J]. *Phys Rev B*, 2010, **82**(17): 174411. DOI: 10.1103/physrevb.82.174411.
- [21] SERBYN M, PAPIĆ Z, ABANIN D A. Local Conservation Laws and the Structure of the Many-body Localized States[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **111**(12): 127201. DOI: 10.1103/physrevlett.111.127201.
- [22] ELSE D V, BAUER B, NAYAK C. Floquet Time Crystals[J]. *Phys Rev Lett*, 2016, **117**(9): 090402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.090402.
- [23] BERTRAND C L, GARCÍA-GARCÍA A M. Anomalous Thouless Energy and Critical Statistics on the Metallic Side of the Many-body Localization Transition[J]. *Phys Rev B*, 2016, **94**(14): 144201. DOI: 10.1103/physrevb.94.144201.