

## 周期驱动二能级系统的动力学特征频率

张美娟<sup>1</sup>, 韩婴婴<sup>2\*</sup>, 张秀荣<sup>3\*</sup>, 李卫东<sup>2,4\*</sup>

- (1. 山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006;  
2. 深圳技术大学 工程物理学院, 先进材料诊断技术中心, 超强激光与先进材料技术深圳重点实验室, 广东 深圳 518118;  
3. 山西大学 物理电子工程学院, 山西 太原 030006;  
4. 南方科技大学 广东省量子科学技术与工程重点实验室, 广东 深圳 518055)

**摘要:** 驱动强度对研究周期驱动系统的动力学特性有重要影响。本文主要采用 Floquet 理论和龙格-库塔数值方法研究了周期驱动二能级系统的动力学过程, 分析了动力学过程的特征频率, 并与常用的解析方法进行了对比。研究表明, 当驱动强度  $A/\omega_0 < 2.57$  时, 单值的低频振荡项是整个动力学过程的主要成分, 此时忽略了高频振荡项的旋转波近似是成立的; 随着驱动强度的增加, 当  $A/\omega_0 \geq 2.57$  时, 高频振荡项的占比越来越大, 并逐渐成为整个动力学过程的主要频率成分。我们的研究也表明了反旋转杂化近似解析方法仅在一定驱动强度范围内成立, 且当驱动强度较大时, 可以通过多光子过程进行频率拓展。

**关键词:** 周期驱动; 二能级系统; 特征频率; 概率幅

中图分类号: O436 文献标志码: A 文章编号: 0253-2395(2024)03-0598-07

## Dynamic Characteristic Frequencies of Periodically Driven Two-Level Systems

ZHANG Meijuan<sup>1</sup>, HAN Yingying<sup>2\*</sup>, ZHANG Xiurong<sup>3\*</sup>, LI Weidong<sup>2,4\*</sup>

- (1. Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;  
2. Shenzhen Key Laboratory of Ultra-intense Laser and Advanced Material Technology, Center for Advanced Material Diagnostic Technology, and College of Engineering Physics, Shenzhen Technology University, Shenzhen 518118, China;  
3. School of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;  
4. Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China)

**Abstract:** The driving strength has an important influence on studying the dynamics characteristics of periodically driven systems. In this paper, the Floquet theory and the Runge-Kutta numerical method are used to study the dynamic processes of periodically driven two-level systems, and the characteristic frequencies of the dynamic processes are analyzed, and compared with the commonly used analytical methods. The results show that when the driving strength  $A/\omega_0 < 2.57$ , the single-valued low-frequency oscillation term is the main component of the overall dynamical process. At this point, the rotational wave approximation that ignores the high-frequency oscillation terms is valid; With the increase of driving strength, when  $A/\omega_0 \geq 2.57$ , the proportion of high-frequency oscillation

收稿日期: 2023-01-13; 接受日期: 2023-03-23

基金项目: 国家自然科学基金(11874247; 12205199); 国家重点研究开发计划(017YFA0304500); 广东省重点实验室(2019B121203002); 中国量子光学与量子光学器件国家重点实验室计划(KF201703)

作者简介: 张美娟(1997-), 女, 山西朔州人, 硕士研究生, 研究方向为量子光学。E-mail: 17636261039@sina.cn

\* 通信作者: 韩婴婴(HAN Yingying), E-mail: hanyingying@sztu.edu.cn; 张秀荣(ZHANG Xiurong), E-mail: xrzhang@sxu.edu.cn; 李卫东(LI Weidong), E-mail: liweidong@sztu.edu.cn

引文格式: 张美娟, 韩婴婴, 张秀荣, 等. 周期驱动二能级系统的动力学特征频率[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(3): 598-604. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2023074

terms becomes larger, and gradually becomes the main frequency component of the whole dynamic process. Our research also shows that the counterrotating hybridized rotating wave analytical method holds only for a certain range of driving strength, and when the driving strength is large, frequency expansion can be performed by multiphoton process.

**Key words:** periodically driven; two-level system; characteristic frequency; amplitude of probability

## 0 引言

周期驱动以其广泛的可调性对量子物理基础研究和量子工程技术的发展起到了重要的推动作用<sup>[1]</sup>。近年来,其作为一种量子调控手段被广泛地应用在各种量子系统中<sup>[2-7]</sup>,相较于静态驱动,周期驱动可以增加时间维度上的可调性,同时还可以产生新物态和新现象,比如 Floquet 孤子<sup>[8]</sup>、时间晶体<sup>[9]</sup>、时间光栅<sup>[10]</sup>等。以上利用周期驱动调控量子系统性质的研究统称为 Floquet engineering。周期驱动的技术手段应用到二能级系统上已经被广泛地研究了几十年,这一原型被应用在物理学几乎每个子领域的各种研究中<sup>[11-12]</sup>,比如高次谐波产生<sup>[13]</sup>、纳米机械谐振器<sup>[14]</sup>,以及目前正在快速发展的量子信息处理和量子计算领域<sup>[15]</sup>等等。

尽管人们对周期驱动二能级系统已经做了大量的研究,但是在在大参数范围内求解这个模型的精确解析解还是很困难的任务。众所周知处理这种模型最广泛使用的方法是旋转波近似(RWA)<sup>[16]</sup>,但它在在大失谐或强驱动的情况下不再适用。然而,随着量子信息的快速发展,人们需要强驱动的技术手段来加快信息的传递<sup>[17-18]</sup>。在这种需求下,我们注意到有关强驱动系统的研究已经引起了人们的广泛关注,并取得了很大的进展<sup>[19-22]</sup>。2015年,有研究人员给出了一种适用于任何驱动强度的类似于RWA形式的解析方法——反旋转杂化近似方法(Counterrotating hybridized rotating wave),简称 CHRW 方法<sup>[20]</sup>;2020年,有人提出了一种在强耦合状态下任意控制两能级系统演化的方案,确保用户可以获得任意期望的目标态<sup>[21]</sup>;2021年,一种通用可调的框架构建控制场被应用于两能级系统的强驱动极限<sup>[22]</sup>。因此,虽然周期驱动系统在量子调控等领域非常重要,但现有理论方法的适用范围仍是有限的,所以,

有必要对任意周期驱动强度下二能级系统的动力学特征频率进行研究。

本文利用 Floquet 理论和龙格-库塔法数值模拟了周期驱动二能级系统的动力学过程,并从频率成分和频率概率幅两个角度全面分析了系统动力学过程的特征频率。文章的第1部分简单介绍了 Floquet 理论和 CHRW 方法的原理及运算过程。第2部分利用两种数值方法研究了周期驱动二能级系统的动力学过程并利用快速傅里叶变换法(FFT)提取动力学过程的频率成分,并进一步研究了系统动力学特征频率所对应的概率幅。第3部分是总结。

## 1 研究方法

### 1.1 数值方法

考虑一个经典的周期驱动模型——单模场驱动下的二能级系统,其哈密顿量表示为:

$$H(t) = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \frac{A}{2} \cos(\omega t) \sigma_x, \quad (1)$$

其中  $\sigma_{x,y,z}$  为泡利矩阵,  $\omega_0$  为系统的跃迁频率,  $\omega$  为外加驱动场的频率,  $A$  为外加驱动场的强度,且将系统的基态和激发态分别标识为  $|1\rangle$  和  $|2\rangle$ 。当外加驱动场的驱动频率和系统的跃迁频率相等时,电子从基态跃迁到激发态。

由于含时系统演化算符的时序问题,使得解析求解含时系统的动力学过程变得十分困难。由此,人们通常利用 Floquet 理论将有限维度的含时哈密顿量转化成无穷维的不含时哈密顿量  $H_F$ ,进一步根据计算精度和系统条件的限制对该无穷维的哈密顿量进行有效的截断<sup>[23]</sup>,从而通过数值方法得到系统等效的本征值及本征态。以我们的研究系统为例,首先将公式(1)做傅里叶级数展开  $H(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H^{[n]} \exp(-in\omega t)$ <sup>[24]</sup>,然后按如下形式写出 Floquet 矩阵  $H_F$ :

$$H_F = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & H^{[0]} - 2\omega & H^{[-1]} & H^{[-2]} & H^{[-3]} & H^{[-4]} & \dots \\ \dots & H^{[1]} & H^{[0]} - \omega & H^{[-1]} & H^{[-2]} & H^{[-3]} & \dots \\ \dots & H^{[2]} & H^{[1]} & H^{[0]} & H^{[-1]} & H^{[-2]} & \dots \\ \dots & H^{[3]} & H^{[2]} & H^{[1]} & H^{[0]} + \omega & H^{[-1]} & \dots \\ \dots & H^{[4]} & H^{[3]} & H^{[2]} & H^{[1]} & H^{[0]} + 2\omega & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中,  $H^{[0]} = \omega_0 \sigma_z / 2$ ;  $H^{[\pm 1]} = A \sigma_x / 4$ ;  $H^{[\pm n]} = 0, (n \neq 0, 1)$ 。对于上述无穷维的哈密顿量,若截取  $n = 50$ ,则得到一个维度为  $202 \times 202$  的矩阵,可以用数值方法求解其相应的本征值和本征态。

1.2 解析方法

处理哈密顿量(1)最成功且常用的方法是RWA,该方法在近共振和弱驱动的情况下能很好地描述系统的动力学过程。然而,在大失谐或者强驱动的情况下,RWA不再是一个很好的近似方法<sup>[25]</sup>。近期我们关注到文献[20]中提出的CHRW法,该方法宣称可以适用于任意驱动强度下的二能级系统。表1展示了RWA和CHRW法的简化过程和成立条件。

表1中  $H_0 = (\omega_0/2)\sigma_z, \sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2, \tilde{A} = 2A(1 - \xi), J_1$ 表示第一类贝塞尔函数,从表1可以看出CHRW解析方法成立的条件即为参数  $\xi$  在0到1范围内存在唯一满足方程  $J_1(A\xi/\omega)\omega_0 = A(1 - \xi)/2$  的解。然而,我们发现在某些范围内  $\xi$  没有符合条件的解或者是存在多个解的情况。例如,当  $A/\omega_0 = 6, \omega/\omega_0 = 1, \xi$  的解为1.06,不符合  $\xi$  的取值范围;当  $A/\omega_0 = 1.8, \omega/\omega_0 = 0.4, \xi$  的解为0.36, 0.71,不是唯一解。这些都是CHRW法不成立的情况,表示该方法有一定的局限性。下面我们将利用Floquet数值方法和上述两种解析方法讨论哈

密顿量(1)的动力学特性。

2 结果和讨论

2.1 系统动力学的频率成分

由于准能量决定了Floquet系统固有的拉比频率,因此采用含时动力学的傅里叶变换是在实验中观察准能量谱的一种有效方法<sup>[26]</sup>。如图1(a)所示,我们利用龙格-库塔方法,数值模拟了共振条件下( $\omega = \omega_0$ )不同驱动强度时系统激发态的布居数  $P_1$  随时间变化的动力学过程。我们发现在驱动强度  $A/\omega_0 = 1$  时,系统的动力学过程类似于拉比振荡。随着驱动强度  $A$  的增加,比如在  $A/\omega_0 = 8$  时,系统的动力学过程变得很复杂,表现为在幅度较大的振荡之间,还有幅度更小、频率更快的振荡,这是由不可忽略的反旋转波项引起的<sup>[27]</sup>。为了更直观地分析系统动力学过程所对应的频率成分及其振幅,我们进一步对图1(a)中的动力学过程进行了傅里叶变换,如图1(b)所示。当  $A/\omega_0 = 1$  时,低频成分的振幅远大于高频成分的振幅,表明忽略高频成分的RWA近似成立。但是当  $A/\omega_0 = 8$ ,高频成分的振幅明显大于低频成分的振幅,表明高频成分不可忽略。

为了进一步研究频率成分的规律,我们计算了系统动力学特征频率随驱动强度  $A$  的变化情况,如图2所示,图中条纹的亮度表明相应频

表1 两种解析方法的两次么正变换

Table 1 Two unitary transformations of the two analytic methods

解析方法	RWA <sup>[19]</sup>	CHRW <sup>[20]</sup>
第一次么正变换	$U_1 = \exp(-iH_0 t/\hbar) H_1(t) \approx (A/4)(e^{i\Delta t} \sigma_+ + e^{-i\Delta t} \sigma_-)$ 这里忽略高频项 $e^{\pm i(\omega + \omega_0)t}$	$U_1 = \exp[-iA\xi \sin(\omega t) \sigma_x / 2\omega]$ $\tilde{H}_1(t) \approx [\omega_0 J_0(A\xi/\omega)/2] \sigma_z + (\tilde{A}/4)(e^{-i\omega t} \sigma_+ + e^{i\omega t} \sigma_-)$ 这里忽略高次谐波项,并且利用条件 $J_1(A\xi/\omega)\omega_0 = A(1 - \xi)/2, \xi \in [0, 1]$
第二次么正变换	$U_2 = \exp(i\Delta t \sigma_z / 2),$ $H_2 = (\Delta/2)\sigma_z + (A/4)\sigma_x,$ $\Delta = \omega_0 - \omega, \Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + A^2/4}$	$U_2 = \exp(-i\omega t \sigma_z / 2)$ $\tilde{H}_2 = (\tilde{\Delta}/2)\sigma_z + (\tilde{A}/4)\sigma_x$ $\tilde{\Delta} = J_0(A\xi/\omega)\omega_0 - \omega, \tilde{\Omega}_R = \sqrt{\tilde{\Delta}^2 + \tilde{A}^2/4}$

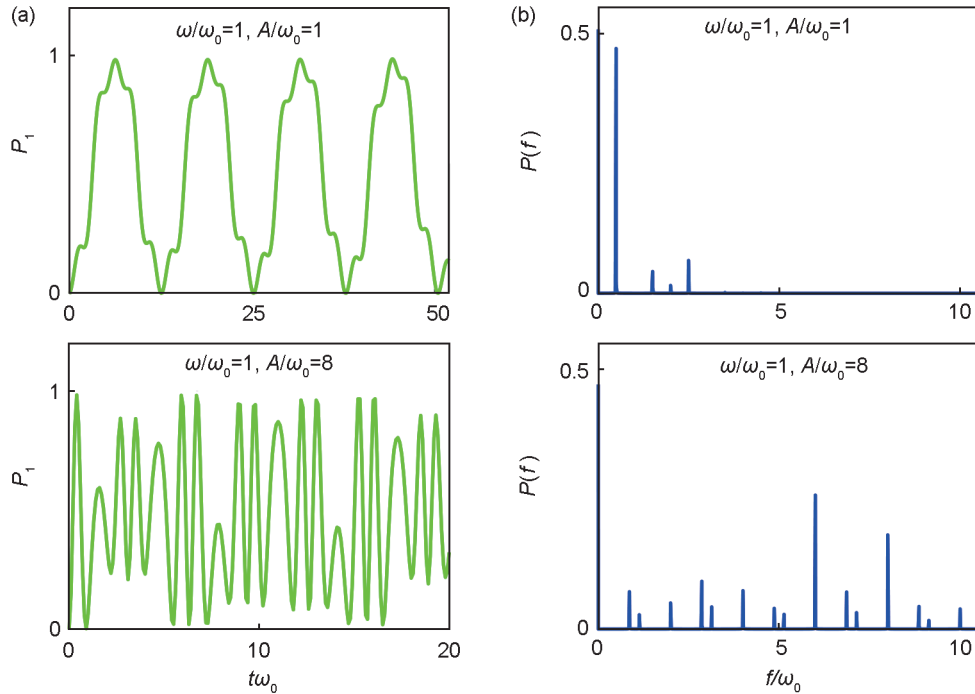


图1 共振条件下的系统动力学过程

(a) 系统激发态的布局数随时间变化的动力学过程; (b) 动力学过程的傅里叶变换

Fig. 1 System dynamics processes under resonant conditions

(a) The dynamic process of the layout of the excited states of the system over time; (b) Fourier transform of dynamic processes

率成分的振幅,亮度越高表明该频率成分在动力学过程中占比越大。我们发现这些频率成分有很强的规律性,在驱动强度较弱时,低频是动力学过程的主要频率成分,表明忽略高频振荡项的RWA是成立的。在驱动强度较强时,高频成分占比越来越大,并呈现出明显的平移对称性,平移周期是 $2\omega$ 。

为了分析这些频率成分的物理图像,我们进

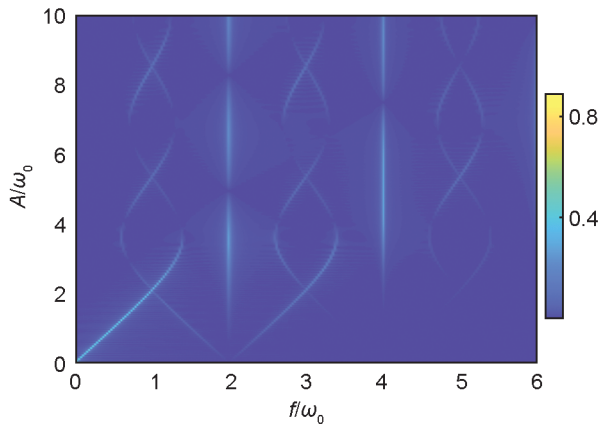


图2 不同驱动强度下系统动力学过程的傅里叶变换

Fig. 2 Fourier transform of system dynamics at different driving strengths

一步通过数值求解的方法得到Floquet矩阵(2)的本征值  $\epsilon_1 + n\omega, \epsilon_2 + n\omega, (n = 0, \pm 1, \dots, \pm 50)$ 。图3中的红、蓝实线分别展示的是  $\pm\Delta\epsilon + (2n + 1)\omega$ <sup>[26]</sup>, 其中  $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$ , 绿色的实线为  $2n\omega$ , 黑色的“\*”是从图2中提取的频率成分。我们发现Floquet理论给出的动力学特征频率与龙格-库塔数值法给出的特征频率完全吻合。同时,从Floquet理论可以看出系统的特征频率有平移对称性,平移量是 $2n\omega$ 。当 $n=0$ 时,系统的特征频率为  $\pm\Delta\epsilon + \omega$ , 表明为单光子过程的频率成分。当 $n=1$ 时,系统的特征频率为  $\pm\Delta\epsilon + 3\omega$ , 表明为三光子过程的频率成分。上述分析表明当我们知道单光子过程的频率成分后,就可以拓展到多光子过程。因此,我们将CHRW法给出的单光子拉比频率  $\tilde{\Omega}_R$  的解析解拓展到多光子过程  $\pm\tilde{\Omega}_R + 2n\omega$  (紫色的三角形)。我们发现当 $A$ 较小时,CHRW给出的频率成分与Floquet数值解和龙格-库塔数值解符合得较好。当 $A$ 逐渐变大时,这种方法与两种数值解会有所偏差,这是由CHRW法忽略的高次谐波项引起的。同时,在  $A/\omega_0 \in [3.84, 7.01]$  的范围

之内,CHRW 解析法没有符合条件的解。

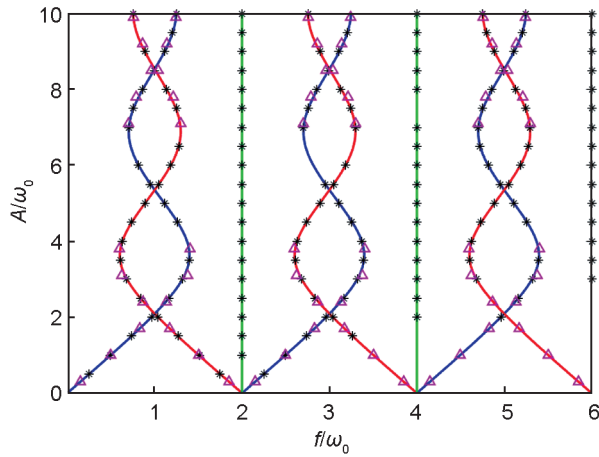


图3 Floquet 数值法、龙格-库塔数值法和CHRW 解析法给出的动力学特征频率的对比

Fig. 3 Comparison of dynamic characteristic frequencies given by Floquet numerical method, Runge-Kutta numerical method and CHRW analytical method

### 2.2 系统动力学特征频率的概率幅

为了分析动力学过程的主要频率  $f_{main}$ , 我们进一步分析了特征频率的概率幅, 如图4所示。

图4(a)是对图1(b)中的  $P(f)$  进行了重新整理  $|P(f)|^2 / \sum_{f \neq 0} |P(f)|^2$ , 其中由于零频对应的是动力学中的常数项, 故不作分析。我们发现当  $A/\omega_0 = 1$  时,  $f/\omega_0 = 0.5$  的概率幅占 95%, 为系统动力学过程的主要频率。当  $A/\omega_0 = 8$  时,  $f/\omega_0 = 6$  和  $f/\omega_0 = 8$  的频率概率幅分别为 40% 和 20%, 其他的频率概率幅均小于 5%。此时我们将  $f/\omega_0 = 6$  和  $f/\omega_0 = 8$  定义为系统动力学过程的主要频率和次要频率。这里我们将概率幅大于等于主要频率概率幅 50% 的频率成分定为不可忽略的次要频率。在图4(b)中, 我们给出了任意驱动强度下系统动力学过程的主要频率和次要频率, 其中红色的点代表主频率, 绿色的“+”号代表次要频率。从图中可以清晰地看出系统动力学过程的主要频率和次要频率随驱动强度的变化情况: 当  $A/\omega_0 < 2.57$  时, 只有一个低频的主要频率, 没有次要频率, 这表明系统的动力学过程接近于拉比振荡, 且此时的主频率随着  $A/\omega_0$  的增大而增大, 此时系统

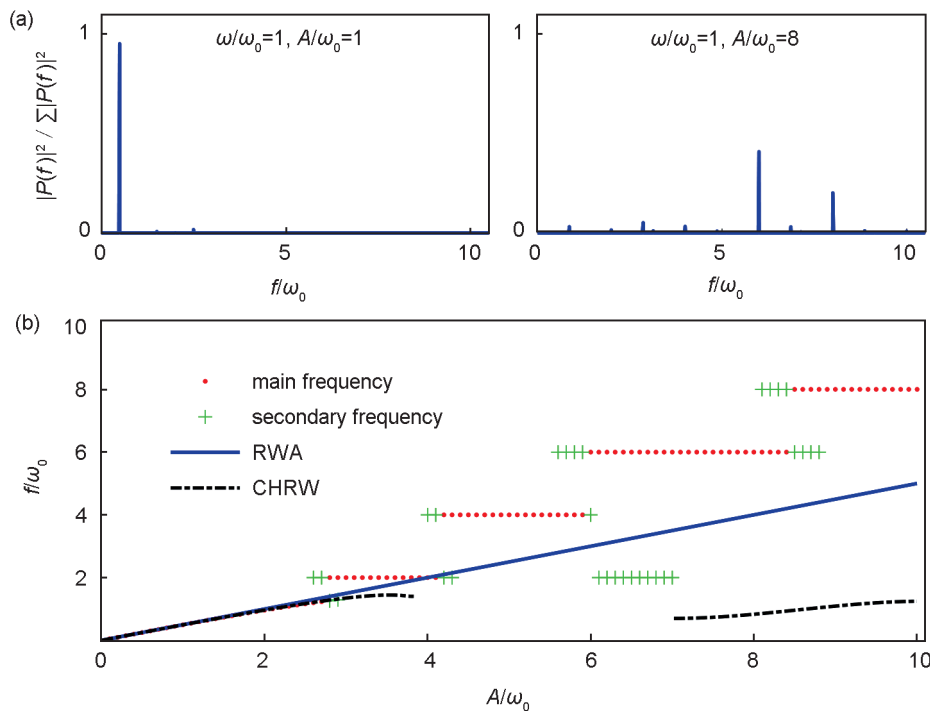


图4 共振条件下系统动力学特征频率的概率幅

(a) 系统动力学特征频率的概率幅; (b) 系统动力学的主次频和RWA、CHRW 的有效拉比频率

Fig. 4 Probability amplitude of the characteristic frequency of system dynamics under resonance conditions

(a) The probability amplitude of the characteristic frequency of system dynamics; (b) Main and secondary frequencies of system dynamics and effective rabi frequencies of RWA and CHRW

以单光子过程为主;当  $A/\omega_0 \geq 2.57$  时,开始出现次要频率,表明系统的动力学过程含有多个不可忽略的频率成分,且高频项为主要频率,此时出现了不可忽略的多光子过程。

图 4(b)中蓝色的实线为 RWA 给出的有效拉比频率  $\Omega_R$ 。我们发现当  $A/\omega_0 < 1.35$  时,  $\Omega_R$  和系统动力学过程的主要频率符合得很好,即  $|\Omega_R - f_{\min}| \leq 0.01$ 。当  $A/\omega_0 \geq 1.35$  时,两者有明显的偏差,这表明 RWA 只有在弱驱动条件下成立。图 4(b)中黑色的点划线为 CHRW 解析方法给出的有效拉比频率  $\tilde{\Omega}_R$ 。我们发现  $\tilde{\Omega}_R$  给出的是单光子过程中的主要频率,且  $A/\omega_0 < 2.44$  时,  $\tilde{\Omega}_R$  和系统动力学过程的主要频率符合得很好。同时,可以看到  $A/\omega_0 \in [3.84, 7.01]$  区间内没有 CHRW 的有效拉比频率,这是因为在此范围内没有符合条件的  $\xi$ 。

### 3 结论

本文我们采用 Floquet 理论数值法、龙格-库塔数值法、RWA 解析法和 CHRW 解析法,分析了不同驱动强度下周期驱动二能级系统的动力学特征频率。研究发现,在驱动强度较弱时,系统动力学的特征频率是单值的低频振荡;当驱动强度较强时,系统动力学的特征频率包含了更多的、不可忽略的高频成分。从计算方法上讲, Floquet 理论给出的系统动力学特征频率成分与龙格-库塔数值法给出的频率成分相同; RWA 解析法给出的有效拉比频率在驱动强度  $A/\omega_0 < 1.35$  时与数值解相同; CHRW 解析法给出的有效拉比频率是单光子过程的频率成分,可以拓展到多光子过程。驱动强度  $A/\omega_0 < 2.57$  时,只有一个低频的主要频率,此时系统的能级跃迁以单光子过程为主,且 RWA 能够较好地描述系统的动力学过程;当  $A/\omega_0 \geq 2.57$  时,高频振荡项为系统动力学过程的主要频率,且出现了不可忽略的次要频率,此时多光子过程不可忽略且 RWA 不再成立。所以,本文研究表明目前的 CHRW 方法还存在一定的局限性,我们需要一个更有效的解析方法去解决周期驱动动力学二能级系统的过程。

### 参考文献:

- [1] WEITENBERG C, SIMONET J. Tailoring Quantum Gases by Floquet Engineering[J]. *Nat Phys*, 2021, **17** (12): 1342-1348. DOI: 10.1038/s41567-021-01316-x.
- [2] LU X T, WANG T, LI T, *et al.* Doubly Modulated Optical Lattice Clock: Interference and Topology[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **127**(3): 033601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.033601.
- [3] WANG D W, SONG C, FENG W, *et al.* Synthesis of Antisymmetric Spin Exchange Interaction and Chiral Spin Clusters in Superconducting Circuits[J]. *Nat Phys*, 2019, **15**(4): 382-386. DOI: 10.1038/s41567-018-0400-9.
- [4] QIAO H F, KANDEL Y P, DYKE J S V, *et al.* Floquet-enhanced Spin Swaps[J]. *Nat Commun*, 2021, **12**(1): 2142. DOI: 10.1038/s41467-021-22415-6.
- [5] YANG Z S, YANG Q H, HU J P, *et al.* Dissipative Floquet Majorana Modes in Proximity-induced Topological Superconductors[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **126**(8): 086801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.086801.
- [6] CLARK L W, JIA N Y, SCHINE N, *et al.* Interacting Floquet Polaritons[J]. *Nature*, 2019, **571**(7766): 532-536. DOI: 10.1038/s41586-019-1354-5.
- [7] RUDNER M S, LINDNER N H. Band Structure Engineering and Non-equilibrium Dynamics in Floquet Topological Insulators[J]. *Nat Rev Phys*, 2020, **2**(5): 229-244. DOI: 10.1038/s42254-020-0170-z.
- [8] MITCHELL M, DI CARLI A, SINUCO-LEÓN G, *et al.* Floquet Solitons and Dynamics of Periodically Driven Matter Waves with Negative Effective Mass[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **127**(24): 243603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.243603.
- [9] MI X, IPPOLITI M, QUINTANA C, *et al.* Time-crystalline Eigenstate Order on a Quantum Processor[J]. *Nature*, 2022, **601**(7894): 531-536. DOI: 10.1038/s41586-021-04257-w.
- [10] HAN Y Y, LUO X Q, LI T F, *et al.* Time-domain Grating with a Periodically Driven Qutrit[J]. *Phys Rev Applied*, 2019, **11**: 014053. DOI: 10.1103/physrevapplied.11.014053.
- [11] DELL'ANNO F, DE SIENA S, ILLUMINATI F. Multiphoton Quantum Optics and Quantum State Engineering [J]. *Phys Rep*, 2006, **428**(2/3): 53-168. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.01.004.
- [12] GRIFONI M, HÄNGGI P. Driven Quantum Tunneling [J]. *Phys Rep*, 1998, **304**(5/6): 229-354. DOI: 10.1016/s0370-1573(98)00022-2.
- [13] FIGUEIRA DE MORISSON FARIA C, ROTTER I. High-order Harmonic Generation in a Driven Two-level

- Atom: Periodic Level Crossings and Three-step Processes[J]. *Phys Rev A*, 2002, **66**: 013402. DOI: 10.1103/physreva.66.013402.
- [14] RADEONYCHEV Y V, TOKMAN M D, LITVAK A G, *et al.* Acoustically Induced Transparency in Optically Dense Resonance Medium[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, **96**(9): 093602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.093602.
- [15] IRISH E K, GEA-BANACLOCHE J, MARTIN I, *et al.* Dynamics of a Two-level System Strongly Coupled to a High-frequency Quantum Oscillator[J]. *Phys Rev B*, 2005, **72**(19): 195410. DOI: 10.1103/physrevb.72.195410.
- [16] SCULLY M O, ZUBAIRY M S. Quantum optics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- [17] BÜRVENICH T J, EVERS J, KEITEL C H. Nuclear Quantum Optics with X-ray Laser Pulses[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, **96**(14): 142501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.142501.
- [18] WU Y, YANG X X. Strong-coupling Theory of Periodically Driven Two-level Systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2007, **98**(1): 013601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.013601.
- [19] FUCHS G D, DOBROVITSKI V V, TOYLI D M, *et al.* Gigahertz Dynamics of a Strongly Driven Single Quantum Spin[J]. *Science*, 2009, **326**(5959): 1520–1522. DOI: 10.1126/science.1181193.
- [20] YAN Y Y, LÜ Z G, ZHENG H. Bloch-Siegert Shift of the Rabi Model[J]. *Phys Rev A*, 2015, **91**(5): 053834. DOI: 10.1103/physreva.91.053834.
- [21] RAN D, ZHANG B, CHEN Y H, *et al.* Effective Pulse Reverse-engineering for Strong Field-matter Interaction[J]. *Opt Lett*, 2020, **45**(13): 3597–3600. DOI: 10.1364/OL.397053.
- [22] FIGUEIREDO ROQUE T, CLERK A A, RIBEIRO H. Engineering Fast High-fidelity Quantum Operations with Constrained Interactions[J]. *Npj Quantum Inf*, 2021, **7**: 28. DOI: 10.1038/s41534-020-00349-z.
- [23] SON S K, HAN S Y, CHU S Y. Floquet Formulation for the Investigation of Multiphoton Quantum Interference in a Superconducting Qubit Driven by a Strong Ac Field[J]. *Phys Rev A*, 2009, **79**(3): 032301. DOI: 10.1103/PhysRevA.79.032301.
- [24] HANYI, LUOXQ, LITF, *et al.* Analytical Double-unitary-transformation Approach for Strongly and Periodically Driven Three-level Systems[J]. *Phys Rev A*, 2020, **101**(2): 022108. DOI: 10.1103/physreva.101.022108.
- [25] SHIRLEY J H. Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time[J]. *Phys Rev*, 1965, **138**(4B): B979–B987. DOI: 10.1103/physrev.138.b979.
- [26] SONG W L, YOU J B, XU J K, *et al.* Floquet Engineering of Two Weakly Coupled Superconducting Flux Qubits[J]. *Phys Rev Applied*, 2020, **14**(5): 054049. DOI: 10.1103/physrevapplied.14.054049.
- [27] DENG C, ORGIAZZI J L, SHEN F, *et al.* Observation of Floquet States in a Strongly Driven Artificial Atom[J]. *Phys Rev Lett*, 2015, **115**(13): 133601. DOI: 10.1103/physrevlett.115.133601.