

关联噪声对维纳过程和拉比振荡的影响

宋鑫¹,张秀荣^{2*},李卫东^{3,4*}

(1.山西大学 理论物理研究所,山西 太原 030006;

2.山西大学 物理电子工程学院,山西 太原 030006;

3.深圳技术大学 工程物理学院,先进材料诊断技术中心,超强激光与先进材料技术深圳重点实验室,广东 深圳 518118;

4.南方科技大学 广东省量子科学技术与工程重点实验室,广东 深圳 518055)

摘要:本文利用数值方法,对关联的有色噪声下的类维纳过程和拉比振荡进行了研究。通过统计在同一时刻类维纳过程与维纳过程的位置方差,发现在有色噪声影响下粒子的扩散速率更快;而且棕色噪声比 $1/f$ 噪声下粒子扩散得更快。对近共振条件下二能级原子系统的拉比振荡,在关联噪声与非关联噪声下的频谱进行了分析,研究发现:随着噪声强度的增加,非关联噪声导致在共振频率附近的频率成分增加,这表现为对拉比谱的展宽,而对于关联噪声,在噪声强度较小时也会导致共振频率附近的频率成分增加,但噪声强度进一步增大将会导致振荡的主要频率成分向零频附近移动。

关键词:维纳过程;拉比振荡;白噪声;有色噪声

中图分类号:O436 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2024)03-0578-05

The Effect of the Correlated Noises on the Wiener Process and the Rabi Oscillation

SONG Xin¹, ZHANG Xiurong^{2*}, LI Weidong^{3,4*}

(1. Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

2. School of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

3. Shenzhen Key Laboratory of Ultraintense Laser and Advanced Material Technology, Center for Advanced Material Diagnostic Technology, and College of Engineering Physics, Shenzhen Technology University, Shenzhen 518118, China;

4. Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Science and Engineering, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China)

Abstract: In this paper, the Wiener-like process and the Rabi oscillation with the correlated colored noises are studied numerically. By counting the position variance of the Wiener-like process and the Wiener process at the same time, it is found that the diffusion rate of particles is faster under the influence of the colored noises. And particles will diffuse faster with the brown noise than with $1/f$ noise. The Rabi oscillation of the two-level atomic system under near-resonance conditions is analyzed, and it is found that with the increase of noise intensity, the non-correlated noise leads to an increase in the frequency component near the resonance frequency, which is manifested as the broadening of the Rabi spectrum, and for the correlated noise, the frequency content near the resonance frequency will also increase when the noise intensity is small. However, the further increasing the noise intensity will cause the main

收稿日期:2023-01-13;接受日期:2023-03-23

基金项目:国家自然科学基金(11874247);国家重点研究开发计划(2017YFA0304500);广东省重点实验室(2019B121203002);中国量子光学与量子光学器件国家重点实验室计划(KF201703)

作者简介:宋鑫(1997-),男,山东济南人,硕士研究生,主要研究方向为冷原子物理。E-mail:3512167172@qq.com

*通信作者:张秀荣(ZHANG Xiurong),E-mail:xrzhang@sxu.edu.cn;李卫东(LI Weidong),E-mail:wldi@sxu.edu.cn

引文格式:宋鑫,张秀荣,李卫东.关联噪声对维纳过程和拉比振荡的影响[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(3):578-582. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023075

frequency components of the oscillation to move to near the zero frequency.

Key words: Wiener process; Rabi oscillation; white noise; colored noise

0 引言

在实际测量中,无论经典系统还是量子系统总是不可避免地与环境发生耦合,产生各种各样的噪声。由于噪声不可完全消除,所以我们需要了解噪声对系统的影响。在研究经典粒子的布朗运动时,人们引入维纳过程来描述白噪声对粒子运动的影响。在量子系统中,以二能级拉比振荡为基础的量子系统具有非常广泛的应用前景,典型的系统包括原子钟系统、金刚石氮-空位色心系统^[1-4]等。在这些系统中,噪声的影响同样非常重要,比如在原子钟系统中,影响其稳定度的噪声有原子探测噪声、本地振荡器振荡频率不稳定引起的噪声等^[5-8];因此搭载原子钟的卫星导航系统会应用多重信号分类方法(multiple signal classification, MUSIC)等技术来消除噪声的干扰,其中MUSIC算法要求噪声信号为零均值的高斯白噪声,且各通道间的噪声互不相关^[9]。然而在实际应用中,噪声信号往往是在时间上相关联的有色噪声,这严重影响了MUSIC抗干扰算法的性能。因此,需要研究有色噪声对经典系统和量子系统的影响。

本文主要研究有色噪声的类维纳过程与经典维纳过程的不同,以及有色噪声对二能级原子体系拉比振荡的影响。文章首先介绍有色噪声的类维纳过程,借助粒子的位置方差,理解其与经典维纳过程的区别;然后将有色噪声引入到二能级原子系统的拉比振荡中,通过四阶Runge-Kutta方法进行数值模拟,研究不同种类、不同强度的有色噪声对拉比振荡的影响,最后进行总结。

1 类维纳过程

在概率论中,维纳过程是一个重要的随机过程。对于随时间 t 变化的信号 $X(t)$,如果其初态为零,具有独立平稳增量,且分布服从于正态分布,则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为维纳过程,它经常被用来描述噪声^[10-11]。噪声是指一系列不规则信号,其中功率谱为常数的噪声被称为白噪

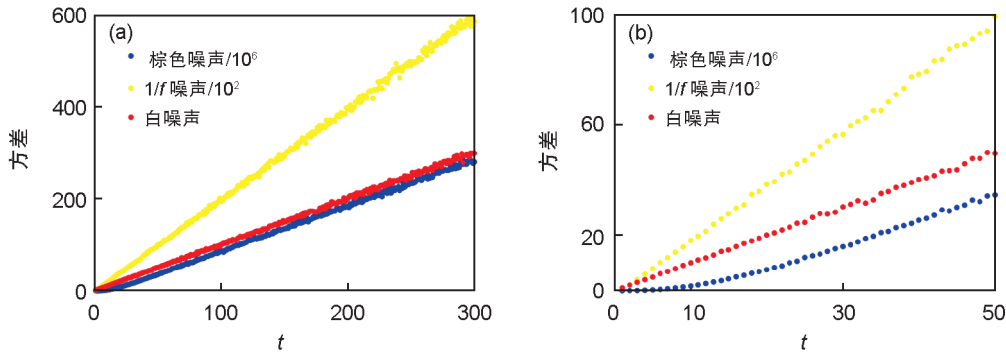
声,不是常数的噪声为有色噪声。白噪声的自相关函数是 δ 函数,不同时刻的取值是彼此独立、互不相关的,而有色噪声是相关联的^[12-13]。在本文中,主要研究的有色噪声为 $1/f$ 噪声与棕色噪声^[14-15],其功率谱可表示为 $P(f) \approx \frac{A}{f^\alpha}$,其中 P 为功率, A 为常数, f 为频率, α 为噪声种类。当 $\alpha=1$ 时,代表 $1/f$ 噪声; $\alpha=2$ 时,代表棕色噪声。经典的维纳过程是用来描述粒子布朗运动的,也称为布朗运动过程,以一维的布朗运动为例,该过程可以表示为 $\{W_n(t), t \geq 0\}$,其中

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j, \quad (1)$$

$W_n(t)$ 为 t 时刻的粒子位置, n 为单位时间内的碰撞次数,时间步长为 $\Delta t = \frac{1}{n}$, $n_t = \frac{t}{\Delta t}$ 为总步数,符号 $\lfloor \cdot \rfloor$ 代表向下取整, ξ_j 是平均值为0、方差为1的随机数,也就是白噪声。所以维纳过程通常被认为是白噪声的积分,这里因为时间是离散化的,因此用求和来代替。

如果我们将(1)式中求和的噪声替换成有色噪声,就可以生成新的维纳过程。我们借助MATLAB软件自带的有色噪声生成函数ColoredNoise来生成 $1/f$ 噪声与棕色噪声的随机数 ξ_i 与 ξ_k ,通过替换 ξ_j 来生成新的维纳过程。计算表明,新生成的维纳过程与经典维纳过程不同,例如经典维纳过程要求 $W(t)$ 是满足正态分布的,而对于棕色噪声来讲,当 $t=20$ 时,粒子在各位置的概率密度几乎是相同的,所以本文称有色噪声下的维纳过程为类维纳过程。下面,我们将借助粒子的位置方差来表明两种过程的不同。

如图1所示,我们分别计算了白噪声(红色点)、 $1/f$ (黄色点)噪声和棕色噪声(蓝色点)影响下在粒子位置方差随时间的变化图。在计算中,不同噪声下(类)维纳过程在每个时间 t 的位置都统计了 $N=10\ 000$ 组数据,对 N 求粒子位置的均值与方差。由于在有色噪声影响下,粒



注:其中红色代表白噪声下的标准维纳过程,黄色代表 $1/f$ 噪声下的类维纳过程,蓝色为棕色噪声下的类维纳过程;图(b)为(a)在时间较小时的局部放大图。

图1 粒子的位置方差随时间的变化图像

Note: The red dots show the standard Wiener process with white noise; Yellow dots represent a Wiener-like process with $1/f$ noise; Blue dots are the Wiener-like process with the brown noise. The figure (b) is a partial enlarged view of the figure (a) at the smaller value of time

Fig. 1 Image of the variation of particle position variance with time

子位置方差的变化率较大,为了方便比较,我们在图1中对有色噪声下的位置方差行了重新标度,其中黄色点线代表的 $1/f$ 噪声影响下的位置方差比原值缩小了 10^2 倍,蓝色点线代表的棕色噪声的结果缩小了 10^6 倍。在图1(a)中,红色点代表白噪声下的经典维纳过程,可以看到,其方差是与时间 t 成正比例关系的,且斜率近似为1,这些是经典中标准维纳过程的基本性质;而对于 $1/f$ 噪声和棕色噪声下的类维纳过程,其斜率明显不同,而且通过图1(b)中的局部放大图可以看出,在棕色噪声下的类维纳过程中,位置方差随时间变化的斜率有一个由小变大的过程,在时间较大后斜率趋于平稳。通过方差对比可以看到,与标准的维纳过程相比,类维纳过程的位置方差约为同时刻标准维纳过程方差的 $10^2\sim 10^6$ 倍,且随时间迅速增大。而位置的方差越大,意味着粒子布朗运动的扩散速率越大。由此可以看出,在有色噪声的影响下,粒子的扩散速率会增大,位置的不确定度也增加了。

通过上述位置方差的比较,可以看出对于维纳过程这一经典过程,有色噪声使得经典粒子的运动越发地不确定,接下来我们探究有色噪声对量子系统的影响。

2 有色噪声对拉比振荡的影响

二能级原子模型是量子系统中最简单、最实用的模型之一。对于理想的二能级原子系

统,它的基态和激发态分别用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 来表示,用一束频率为 ω 的激光激发原子,此时整个系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\Delta = \omega - \omega_0$ 为失谐量, ω_0 表示原子的跃迁频率, Ω 为拉比频率。在一定的初态条件下,我们求解相应的薛定谔方程,可以得到粒子在任意时刻处于基态和激发态的概率幅 $C_0(t)$ 和 $C_1(t)$ ^[16-17]。系统任意时刻处在激发态 $|1\rangle$ 的概率为 $P_1(\Delta, t) = |C_1(t)|^2$,布居率 P_1 随时间做周期振荡,此即拉比振荡。

在现实条件下,激光场的频率受到噪声影响会发生频率的偏移。本文中假设激光场频率的偏移量为 $Z(t)$,设 $Z(t) = S \cdot z(t)$, S 为控制系数,用来控制噪声的强度, $z(t)$ 为噪声值。这时系统的失谐量变为 $\Delta + Z(t)$,相应的哈密顿量变为:

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta + Z(t) & \Omega \\ \Omega & -\Delta - Z(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

上述含时哈密顿量对应的薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_0(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta + Z(t) & \Omega \\ \Omega & -\Delta - Z(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_0(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

在一般情况下是很难解析求解的,但是可以利用数值方法进行数值求解。

我们用四阶Runge-Kutta方法^[18-19],假设系统初始状态为基态,在近共振条件 $\Delta/\Omega = 0.01$

下,对方程(4)进行了数值求解。一般来说,噪声的引入会破坏原来的拉比振荡,使得振荡频率成分变得复杂。为了分析此特性,我们对拉比振荡曲线进行了频谱分析。对于一定强度的某种噪声,重复求解薛定谔方程(4)式共50次,对每一时刻的布居率 $P_1(t)$ 取平均,再对 $P_1(t)$ 做快速傅里叶变换得到频谱 $F(f)$,其中 f 为频率,并对 $F(f)$ 做归一化处理。

图2分别展示了三种不同种类的噪声下,不同噪声强度时拉比振荡的频谱图。纵坐标为各频率分量的幅值 a 与总幅值 A 的比值(这里排除了零频分量的影响,将零频分量幅值设置为0),横坐标为归一化的角频率 $2\pi f/\Omega$,其中(d),(e),(f)分别为(a),(b),(c)的局部放大图。在所有的图中,当 $S=0$ 时,也就是不添加噪声的情况下,可以看到红色点代表的拉比振荡频率是单一的,即拉比频率。在图2(a)中,是添加白噪声后拉比振荡的频谱图,在 $S\approx 0.07$ 时,绿色点线表明出现了原振荡频率以外的频率分量,且随着 S 的增大,其他频率幅值占比开始增大,原振荡频率幅值占比降低;在 $S=1$ 时,蓝色点线已经包含非常多的频率成分,但是都在原振荡频率附近,如图2(d)所示。在图2(b),(c),(e)和(f)中,分别为添加 $1/f$ 噪声和棕色噪声后拉比振荡的频谱图,可以看到,在噪声强度不太大时,原振荡频率附近也出现了

其他频率的成分,并且随着 S 的增大,频率成分也逐渐增多;可是当 $1/f$ 噪声的强度为 $S=1$ 以及棕色噪声的强度为 $S=0.07$ 时,在原振荡频率附近的频率成分都已经消失,而零频附近的频率成分在不断增多。

我们发现在图2中,三种噪声都会破坏拉比振荡的周期性,但是三种噪声对周期影响的方式,表现不完全相同。三种噪声在小于一定强度时,都使共振频率附近产生许多频率分量;而随着噪声强度的增加,有色噪声可进一步导致在零频附近的频率分量增加,原振荡频率附近的分量逐渐消失。同时,上述现象出现的噪声强度不同。对于白噪声,当噪声强度控制系数 S 达到0.07时,对拉比振荡的影响就已经较大了,在共振频率附近产生了很多频率分量;而 $1/f$ 噪声和棕色噪声,相应的强度控制系数分别仅为0.007和0.00035,这说明三种噪声中棕色噪声对拉比振荡周期性的破坏性最大,其次是 $1/f$ 噪声,最后是白噪声。

3 结论

本文借助数值计算,研究了具有时间关联的有色噪声对经典的维纳过程和量子系统中拉比振荡的影响。通过对类维纳过程的位置方差与标准维纳过程的方差对比,发现类维纳过程的方差增长不再与时间成严格的正比例增长关

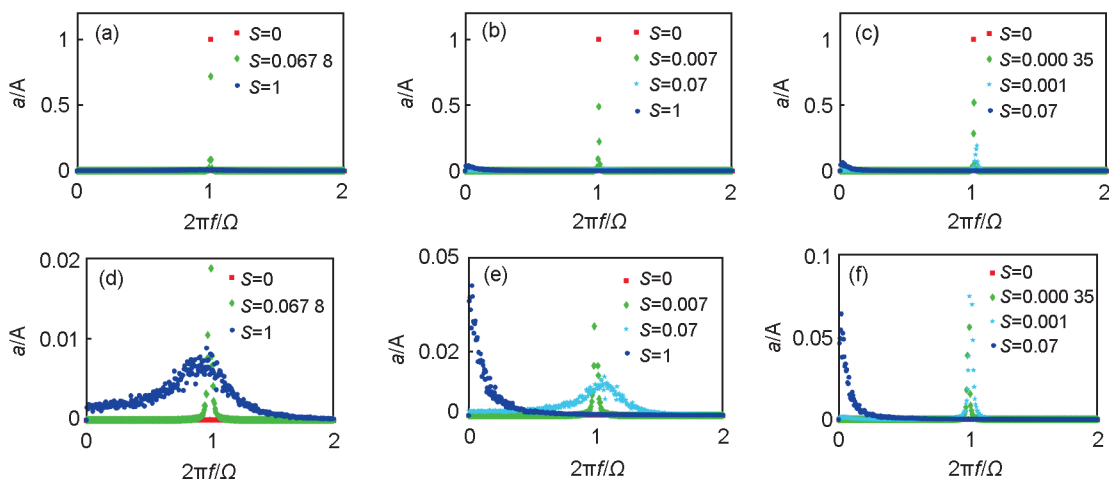


图2 三种噪声在不同噪声强度下的拉比振荡频谱图

其中图(a),(b),(c)分别代表白噪声、 $1/f$ 噪声和棕色噪声的情况,(d),(e),(f)分别为(a),(b),(c)的局部放大图

Fig. 2 The spectrograms of the Rabi oscillations with three types of noise and different noise intensities

The figures (a), (b) and (c) show the different effects of white noise, $1/f$ noise and brown noise respectively, and the figures (d), (e) and (f) are partial enlarged view of figures (a), (b) and (c), respectively

系,这主要是由于与白噪声不同,加入的有色噪声具有时间关联性;有色噪声会极大地影响经典维纳过程中粒子的扩散速度,使得粒子在全空间出现的概率趋于一致。而对于拉比振荡的二能级量子系统,有色噪声会使得拉比振荡的频率成分增多,并且随着噪声强度的增大,低频振荡的成分在不断增多。可见,无论是经典系统还是量子系统,具有时间关联的有色噪声都会比白噪声更多地改变系统的性质,因而需要引起人们更多的关注。

参考文献:

- [1] ZHAO N, HONERT J, SCHMID B, *et al.* Sensing Single Remote Nuclear Spins[J]. *Nat Nanotechnol*, 2012, **7**(10): 657-662. DOI: 10.1038/nnano.2012.152.
- [2] MAZE J R, STANWIX P L, HODGES J S, *et al.* Nanoscale Magnetic Sensing with an Individual Electronic Spin in Diamond[J]. *Nature*, 2008, **455**(7213): 644-647. DOI: 10.1038/nature07279.
- [3] BALASUBRAMANIAN G, CHAN I Y, KOLESOV R, *et al.* Nanoscale Imaging Magnetometry with Diamond Spins under Ambient Conditions[J]. *Nature*, 2008, **455**(7213): 648-651. DOI: 10.1038/nature07278.
- [4] 李路思,李红蕙,周黎黎,等.利用金刚石氮-空位色心精确测量弱磁场的探索[J].物理学报,2017,**66**(23): 230601. DOI: 10.7498/aps.66.230601.
LI L S, LI H H, ZHOU L L, *et al.* Measurement of Weak Static Magnetic Field with Nitrogen-vacancy Color Center[J]. *Acta Phys Sin*, 2017, **66**(23): 230601. DOI: 10.7498/aps.66.230601.
- [5] 伍贻威,杨斌,肖胜红,等.原子钟模型和频率稳定度分析方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2019,**44**(8): 1226-1232. DOI: 10.13203/j.whugis20180058.
WU Y W, YANG B, XIAO S H, *et al.* Atomic Clock Models and Frequency Stability Analyses[J]. *Geomat Inf Sci Wuhan Univ*, 2019, **44**(8): 1226-1232. DOI: 10.13203/j.whugis20180058.
- [6] YIN M J, LU X T, LI T, *et al.* Floquet Engineering Hz-level Rabi Spectra in Shallow Optical Lattice Clock[J]. *Phys Rev Lett*, 2022, **128**(7): 073603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.073603.
- [7] VILLAS-BÔAS J M, ULLOA S E, GOVOROV A O. Decoherence of Rabi Oscillations in a Single Quantum Dot [J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **94**(5): 057404. DOI: 10.1103/physrevlett.94.057404.
- [8] WANG S, ZHU Z Y, ZHANG Y Z, *et al.* Rabi Oscillations and Coherence Dynamics in Terahertz Streaking-assisted Photoelectron Spectrum[J]. *Chin Phys Lett*, 2021, **38**(1): 013401. DOI: 10.1088/0256-307x/38/1/013401.
- [9] 祝兆文,郎荣玲.有色噪声下的MUSIC抗干扰算法[J].导航定位学报,2022,**10**(3): 45-52. DOI: 10.16547/j.cnki.10-1096.20220307.
ZHU Z W, LANG R L. MUSIC Anti-jamming Algorithm with Colored Noise[J]. *J Navig Position*, 2022, **10**(3): 45-52. DOI: 10.16547/j.cnki.10-1096.20220307.
- [10] 张波,张景肖.应用随机过程[M].北京:清华大学出版社,2004.
ZHANG B, ZHANG J X. Applied Stochastic Processes [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [11] FELLER W. An Introduction to Probability Theory and Its Application: Vol. 1[M].3rd Ed. John Wiley & Sons, 1968.
- [12] 高玉龙,陈艳平,何晨光.随机过程分析与处理[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.
GAO Y L, CHEN Y P, HE C G. Analysis and Processing for Stochastic Process[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2017.
- [13] 郭业才.随机过程与控制[M].北京:清华大学出版社,2017.
GUO Y C. Stochastic Processes and Control Theory [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2017.
- [14] RESHEF A, CASPARY TOROKER M. Method for Assessing Atomic Sources of Flicker Noise in Superconducting Qubits[J]. *Npj Comput Mater*, 2021, **7**: 165. DOI: 10.1038/s41524-021-00622-5.
- [15] KAZAKOV K A. $1/f$ Noise and Quantum Indeterminacy [J]. *Phys Lett A*, 2020, **384**(31): 126812. DOI: 10.1016/j.physleta.2020.126812.
- [16] DU M D, FANG M F, LIU X. Sudden Birth of Entanglement Between Two Atoms in a Double JC Model [J]. *Chin Opt Lett*, 2009, **7**(5): 443-445. DOI: 10.3788/COL20090705.0443.
- [17] SHEN L T, SHI Z C, YANG Z B. Coherent State Control to Recover Quantum Entanglement and Coherence[J]. *Entropy*, 2019, **21**(10): 917. DOI: 10.3390/e21100917.
- [18] KASDIN N J. Runge-kutta Algorithm for the Numerical Integration of Stochastic Differential Equations[J]. *J Guid Control Dyn*, 1995, **18**(1): 114-120. DOI: 10.2514/3.56665.
- [19] 徐亚军,王钰,宋贤龙.基于四阶龙格-库塔公式的火控系统瞄准角修正模型[J].火力与指挥控制,2020,**45**(5): 111-114. DOI: 10.3969/j.issn.1002-0640.2020.05.020.
XU Y J, WANG Y, SONG X L. The Aimed Angle Modified Model for Fire Control System Based on Fourth Order Runge-kutta Formula[J]. *Fire Control Command Control*, 2020, **45**(5): 111-114. DOI: 10.3969/j.issn.1002-0640.2020.05.020.