

自旋轨道耦合 Su-Schrieffer-Heeger 模型的量子相变

孙文奇, 梁军军*

(山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006)

摘要: 本文研究了粒子间短程排斥相互作用和自旋轨道耦合效应对 SSH (Su-Schrieffer-Heeger) 模型量子相与相变的影响。利用密度矩阵重整化群方法 (Density-matrix Renormalization Group Method, DMRG) 分析了粒子数密度分布、密度结构因子、纠缠熵和纠缠谱等, 在弱相互作用区间, 不同自旋轨道耦合参数下存在数目不一样的非平庸拓扑边缘态, 而随着相互作用的增强, 系统手征对称自发破缺, 在自旋轨道耦合强度和相互作用的高值区域, 出现密度波相。最后确定了相边界进而得到相图。用密度结构因子刻画该模型的拓扑相变点时, 发现在小尺寸下, 密度结构因子峰值在相变点存在突变, 而当系统尺寸足够大时, 突变消失, 峰值呈现出奇异性。

关键词: 超冷费米气体; 自旋轨道耦合; 密度波相; 拓扑

中图分类号: O469 文献标志码: A 文章编号: 0253-2395(2024)03-0583-08

Quantum Phase Transition of Su-Schrieffer-Heeger Model with Spin-orbit Coupling

SUN Wenqi, LIANG Junjun*

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: In this paper, the effects of short-range repulsion interactions between particles and spin-orbit coupling (SOC) effects on quantum phase and phase transitions of SSH (Su-Schrieffer-Heeger) models are studied. We used the DMRG (density-matrix renormalization group method) to analyze the particle number density distribution, density structure factor, entanglement entropy and entanglement spectrum, etc., in the weak interaction interval, there are a different number of non-trivial topological edge states under different spin-orbit coupling parameters, and with the enhancement of the interaction, the system chiral symmetry spontaneously breaks, and the density wave phase appears in the high-value region of spin-orbit coupling strength and interaction. We finally determined the phase boundary and obtained the phase diagram. When the density structure factor is used to characterize the topological phase transition point of the model, it is found that the peak of the density structure factor has mutations at the phase transition point at the small size, and when the system size is large enough, the mutation disappears and the peak value shows singularity.

Key words: ultra-cold Fermi gas; spin-orbit coupling; density wave phase; topology

0 引言

拓扑绝缘体是近年来凝聚态物理中的一个研究热点问题。其体内的能带结构与绝缘体相

同, 而表面总是存在无能隙边缘态。其中 SSH (Su-Schrieffer-Heeger) 模型^[1]是拓扑绝缘体最基本的体系之一, 人们从理论角度对该模型做了各种扩展, 如考虑次近邻跃迁的 SSH 模

收稿日期: 2023-01-20; 接受日期: 2023-03-23

基金项目: 国家自然科学基金(2016012)

作者简介: 孙文奇(1998-), 女, 山东德州人, 硕士研究生, 研究方向为冷原子物理。E-mail: wqs7717@163.com

* 通信作者: 梁军军(LIANG Junjun), E-mail: liangjj@sxu.edu.cn

引文格式: 孙文奇, 梁军军. 自旋轨道耦合 Su-Schrieffer-Heeger 模型的量子相变[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(3): 583-590. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2023076

型^[2-3]、非厄米 SSH 模型^[4]及自旋轨道耦合 (Spin Orbit Coupling, SOC) SSH 模型^[5-10]等, 这些扩展模型表现出了比 SSH 模型更加丰富多样的拓扑性质。SSH 模型因为简单性使得其能够在各种实验系统中实现, 例如半导体量子点^[11]、光子晶体^[12]。随着超冷原子平台和 Feshbach 共振技术的发展, 人们可以利用光学晶格中的超冷原子来模拟物质拓扑态^[13-14], 它具有干净可控的优点, 为研究强关联的拓扑绝缘体^[2, 13]提供了一个理想的平台。

实验上人们已在一维 (1D) 二聚化光学超晶格的超冷原子中实现了 SSH 模型^[15-16], 这使得对 SSH 模型各种扩展的量子模拟成为可能。在费米子系统中, SOC 在许多拓扑非平庸相中起着重要的作用。人们利用一对可调谐拉曼激光在超冷费米子系统中实现了可调制 SOC, 它是 Rashba 和 Dresselhaus 自旋轨道耦合的等权叠加^[17-18]。这种人工调制 SOC 改变了单粒子色散关系, 进而深刻影响系统的物理性质。而当在 SSH 模型中引入该调制 SOC 时^[10], 通过不断增加 SOC 的强度和不对称性, 在自旋轨道耦合弱时, 系统具有两对零模, 自旋轨道耦合的增加可使系统相变为一个具有一对零模的新拓扑相^[10]。

相互作用使得系统变得复杂, 单粒子物理图像不再适用。例如在具有 SOC 的费米原子系统中考虑吸引相互作用时, 系统可以产生奇异的超流相, 其基本原理是 SOC、Zeeman 场和 s 波相互作用可以诱导三态 p 波对^[19-21]。一个很自然的问题是, 在调制 SOC 效应下, 排斥作用对 SSH 模型拓扑性质有什么影响, 可能呈现出什么新的物态? 接下来我们研究具有 SOC 的一维 SSH 模型的排斥费米气体。

本文主要研究密度结构因子在 SSH 模型相变点处的行为, 以及具有 SOC 的扩展 SSH 模型中粒子排斥作用 (Repulsion Particle Interactions, RPI) 对系统的影响。强关联体系中粒子关联起主导作用, 将利用矩阵乘积态 (Matrix Product State, MPS) 方法研究上述模型。矩阵乘积态方法适用于研究一维费米系统的基态性质。通过 MPS 我们可以得到在开放边界条件下半填充系统的基态能量、密度分布、纠缠谱^[22-23]和冯·

诺依曼熵^[24]。然后通过序参量、纠缠谱的简并性和边缘态的存在来判断系统是否拓扑。

1 理论模型及数值方法

对于双阱光学超晶格中双组分原子的超冷费米气体, 双阱可以被视为一个单元胞。通过沿 x 轴方向叠加波长为 λ_s 和 λ_l ($\lambda_l = 2\lambda_s$) 的两个驻波激光, 形成了每个单元胞具有两个晶格点的周期结构。晶格势的形式为 $V(x) = V_l \sin^2(k_l x + \phi/2) + V_s \sin^2(k_s x + \pi/2)$, $k_{s(l)} = 2\pi/\lambda_{s(l)}$ 为相应的波矢量, 晶格的二聚化强度可以通过相位因子 ϕ 来控制。将双阱势中的轨道能级作为赝自旋态, 左右阱之间的双光子拉曼跃迁诱导自旋-轨道耦合^[25]。两个驻波激光沿 z 方向线性偏振, 用于产生从基态到激发态的拉曼跃迁^[26], 该拉曼耦合引起的自旋翻转在实验条件下可以忽略不计^[27-28]。系统哈密顿量为:

$$\hat{H} = - \sum_{i,\sigma} [v \hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i,\sigma} + w \hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i-1,\sigma} + H.c.] + \lambda \sum_{i,\sigma} [\hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i,-\sigma} - \hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i-1,-\sigma} + H.c.] + U \sum_i [\hat{n}_{A,i,\uparrow} \hat{n}_{A,i,\downarrow} + \hat{n}_{B,i,\uparrow} \hat{n}_{B,i,\downarrow}], \quad (1)$$

其中, v 表示胞内跃迁参数, w 表示胞间跃迁参数, 一个原胞包含一对相邻格点, 分别记为 A, B ; 第二项是自旋轨道耦合引起的近邻跃迁, 跃迁会引起原子自旋改变, λ 是耦合强度; 第三项为 hubbard 型的相互作用, 可以通过 Feshbach 共振实现^[29], 本文只考虑排斥相互作用 ($U > 0$)。为了数值计算的方便, 我们引入参数 δ , 哈密顿量可以描述为:

$$\hat{H} = - \sum_{i,\sigma} [(t - \delta) \hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i,\sigma} + (t + \delta) \hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i-1,\sigma} + H.c.] + \lambda \sum_{i,\sigma} [\hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i,-\sigma} - \hat{c}_{A,i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{B,i-1,-\sigma} + H.c.] + U \sum_i [\hat{n}_{A,i,\uparrow} \hat{n}_{A,i,\downarrow} + \hat{n}_{B,i,\uparrow} \hat{n}_{B,i,\downarrow}], \quad (2)$$

其中 $t - \delta, t + \delta$ 分别表示第 i 个原胞胞内和相邻两个原胞之间的跃迁强度, 对应于 v 和 w 。

物质相变与哈密顿量的对称性密切相关, 该对称性在自由哈密顿量容易分析得到。自由哈密顿量变换到动量空间写为: $\hat{H} =$

$\sum_k \hat{\psi}_k^\dagger h(k) \hat{\psi}_k$, 其中 $\hat{\psi}_k = (\hat{c}_{A,k,\uparrow}, \hat{c}_{B,k,\uparrow}, \hat{c}_{A,k,\downarrow}, \hat{c}_{B,k,\downarrow})^T$ 称为南部旋量, $h(k) = -2[t(\cos ka)\sigma_x + (\delta \sin ka + \lambda \tau_x \sin ka)\sigma_y]$ 。泡利矩阵 σ_x, σ_y 是子晶格有效自旋表示, τ_x 是自旋泡利矩阵。 $h(k)$ 满足手征对称性: $-h(k) = I\sigma_z h(k)\sigma_z I$ (I 为 4×4 单位矩阵), 以及时间反演对称性和粒子-空穴对称性^[2]。但只有手征对称性在相互作用存在时得以保留。自由粒子情况下, 自旋轨道耦合解除了布洛赫能带的简并, 系统出现四条能带, 通过调整自旋轨道耦合的强度和不对称性, 只有被占据带的上带和未被占据带的下带之间的能隙可以闭合, 发生拓扑平庸相到非平庸相或非平庸相到平庸相的转变, 因此系统会出现两种相, 在参数 δ 大于零情况下分别是具有一对或两对零能态的拓扑非平庸相, 小于零时两个相则分别为拓扑非平庸相和平庸相^[2]。由此出发我们考虑在多体问题中引入排斥相互作用, 研究排斥作用增强破坏拓扑后系统可能的物态。

密度矩阵乘积态是量子多体物理学领域的概念, 本质上是一个变分 Ansatz 波函数, 相当于一维的张量网络态。因此 MPS 方法是一种变分方法, 是对量子态的描述, 通过奇异值分解将 N 阶张量分解成 N 个三阶张量, 每个纯态矢对应地变为一个 MPS, 也就是说任意量子态都可以精确转化成 MPS 的形式, 此为 MPS 最核心的内容。具有 N 个格点的一维链波函数可以用 MPS 方法描述为:

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} A_1^{\sigma} A_2^{\sigma} \cdots A_N^{\sigma} |\sigma\rangle. \quad (3)$$

这里引进了一个可以通过矩阵维度 M 控制的近似值, 全量子态参数的指数增长数被有效地截断为一个包含在 $M \times M$ 维矩阵 A_i^{σ} 中的多项式数 $\propto NM^2$ 。

MPS 方法的流程是根据哈密顿量对矩阵乘积态进行局部最优化变分, 从第一个张量开始, 将除了第一个张量之外的部分缩并求得最低本征态, 对每一个张量重复此过程直到其收敛, 进而找到(近似)基态。单格点的优化如下:

$$\frac{\partial}{\partial A_i} (\langle \psi | H | \psi \rangle - \lambda [\langle \psi | \psi \rangle - 1]). \quad (4)$$

接下来用 MPS 方法研究哈密顿量(2)所描述的系统, 分析其所有可能的相。考虑半填充情况, 选用开边界条件(OBC), 跳跃常数 t 作为能量单位, 二聚强度为 $\delta = \pm 0.5$, 保留 300 个截断状态和 30 次扫描, 从而最大截断误差低于 10^{-6} 。无特殊说明情况下, 系统尺寸均为 $L = 30$ (60 个格点)。我们主要计算了结构因子、密度分布等, 以此分析相变类型及特点。

2 结果与分析

2.1 密度结构因子

我们尝试用密度结构因子来表征相变。单粒子 SSH 模型的拓扑参数 $\delta < 0$, 系统处于拓扑平庸相; 参数 $\delta > 0$, 系统处于拓扑非平庸相; 参数 $\delta = 0$ 是相变点。我们研究半填充时多体 SSH 模型的密度结构因子在相变点的行为。密度结构因子定义为 $S_{\text{density}}(k) = \frac{1}{2L} \sum_{r,r'} e^{ik(r-r')} (\langle \hat{n}_r \hat{n}_{r'} \rangle - \langle \hat{n}_r \rangle \langle \hat{n}_{r'} \rangle)$, 参数 δ 为负时, 系统处于能带绝缘相, 密度结构因子峰值 $S_{\text{density}}(\pi)$ 汇聚到 1 附近; 参数 δ 为正时, 系统处于拓扑能带绝缘相, $S_{\text{density}}(\pi)$ 汇聚到 0.9667 附近, 如图 1(a); 在相变点峰值有一个突变点, 如图 1(b), 峰值随参数 δ 的变化行为对应着拓扑相变, 说明密度结构因子可以用来表征相变。继而我们考察峰值在相变点的行为与尺寸的关系, 随着尺寸增大, 在相变点突变消失, 取而代之的是奇异性, 说明尺寸的增大不影响密度结构因子峰值在相变点的反常变化, 仅改变了其表现形式, 如图 2。当系统只考虑自旋轨道耦合时, 随着 SOC 强度的变化, 相变点仍然是突变形式; 只考虑排斥粒子相互作用时, 相变点的突变特性变成奇异性; 同时考虑 SOC 和 RPI 时, 在强粒子排斥相互作用情况下, 随着 SOC 强度的变化, 相变点的突变消失, 峰值在整个参数区间连续变化, 因而无法判断相变点的位置, 此时只能通过纠缠熵纠缠谱的变化来判断相变。

2.2 局域密度分布及序参量

为了更准确更直观反映系统基态性质, 我们引入局域密度分布和密度波 (Density Waves, DW) 序参量。局域密度分布定义为第 i 个格点占据的平均粒子数: $n = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \langle \hat{n}_{i,\sigma} \rangle$,

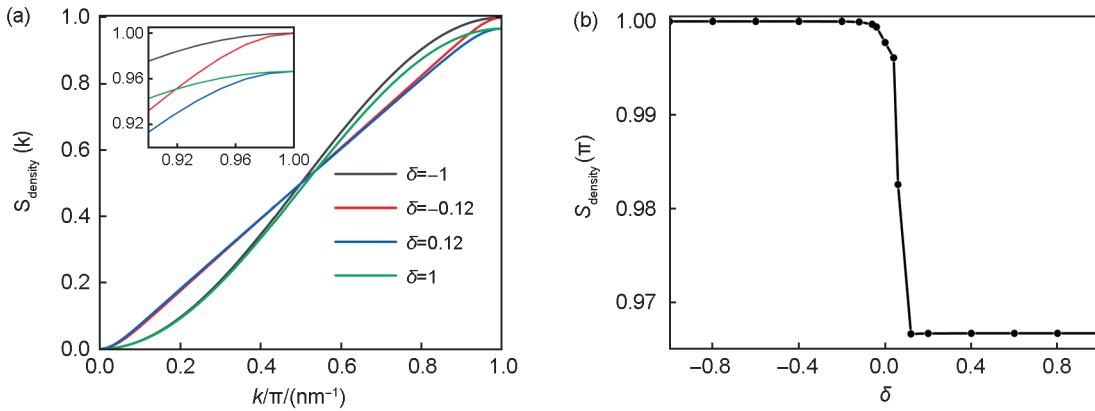


图1 密度结构因子及其峰值与参数 δ 的关系

(a) 当 $U=0$ 时, 密度结构因子在不同参数 δ 下随 k/π 的变化, 其峰值在参数 $\delta > 0$ 和 $\delta < 0$ 时分别汇聚到不同的点, 其他参数: $\lambda=0$; 插图 为密度结构因子在 k/π 接近于 1 时的局部放大图; (b) 峰值 $S_{\text{density}}(\pi)$ 随参数 δ 的变化

Fig. 1 The relationship between density structure factor and its peak value and the dimerization parameter δ

(a) When $U=0$, the density structure factor changes with k/π under different parameters δ , and its peak values converge to different points at parameters $\delta > 0$ and $\delta < 0$, respectively. Other parameters: $\lambda=0$; The inset is a local magnification of the density structure factor when k/π is close to 1; (b) The peak $S_{\text{density}}(\pi)$ varies with parameter δ

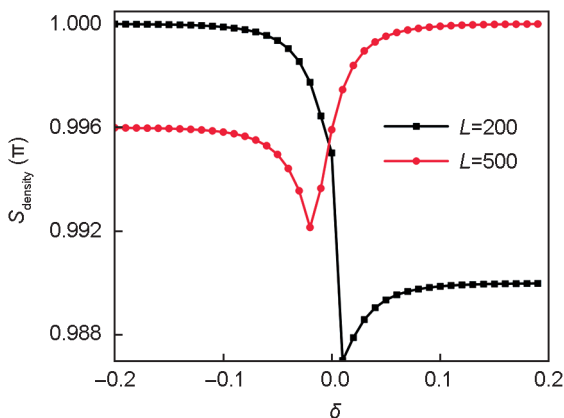


图2 当 $U=0$ 时, 不同尺寸下峰值 $S_{\text{density}}(\pi)$ 随 δ 的变化, 参数: $\lambda=0$

Fig. 2 When $U=0$, the change of peak $S_{\text{density}}(\pi)$ with δ at different sizes, parameter: $\lambda=0$

而密度波序参量定义为: $\Delta = \frac{1}{N} \sum_i (-1)^i n_i$, 它可以刻画相邻格点粒子数的分布变化。参数 δ 为负时, 在 SOC 较弱、排斥相互作用有限的条件下, 其局域密度分布呈均匀分布, 平均值为 1, 系统一直处于 BI-MI (Band-Mott Insulator, 能带-莫特绝缘) 相, 如图 3(a)。而在强 SOC 条件下, 局域密度分布在边界上出现明显的边界态特征, 在链内部均匀分布, 平均值为 1, 系统处于具有一对非零能边缘态的 TBI-TMI₁ (Topological Band-Mott Insulator 1, 拓扑能带-莫特绝缘 1) 相, 见图 3(b); 随着排斥相互作用的增

大, 局域密度分布呈现出均匀的振荡行为, 系统进入 DW 相, 如图 3(c) 所示。参数 δ 为正情况下系统的相与参数 δ 为负基本相同, 仅仅是平庸相 BI-MI 在参数 δ 为正时是具有两对零能边缘态的 TBI-TMI₂ (Topological Band-Mott Insulator 2, 拓扑能带-莫特绝缘 2) 相。局域密度清晰展现了拓扑非平庸相和平庸相的区别, 即边界有无边缘态存在, 进一步确定平庸相为 BI-MI 相和 DW 相。

密度波序参量 Δ 不为零表明系统处在 DW 相, 当从零突变到非零有限值时, 说明系统发生了相变。因此接下来我们研究排斥相互作用和自旋轨道耦合对该序参量的影响, 首先固定自旋轨道耦合强度 $\lambda = 1.2$, 参数 $\delta = 0.5$, 计算了序参量随排斥相互作用变化的情况, 如图 4(a), 随着排斥相互作用强度 U 的增大, 序参量由零突变到非零, 在 U 较大时才趋于消失; 而当我们固定 $U = 10$, $\delta = 0.5$, 改变自旋轨道耦合强度, 系统序参量随 λ 的增大也呈现出由零突变到非零的特性, 同样在其强度较大时序参量趋于消失, 如图 4(b) 所示。这进一步表明, DW 相在 $\lambda/t - U/t$ 平面较大的参数区间呈现稳定振荡。

上面我们讨论 DW 相是在有限尺寸下进行的, 那么在热力学极限下 DW 相是否还存在? 为了研究这个问题, 我们对多个尺寸下的序参

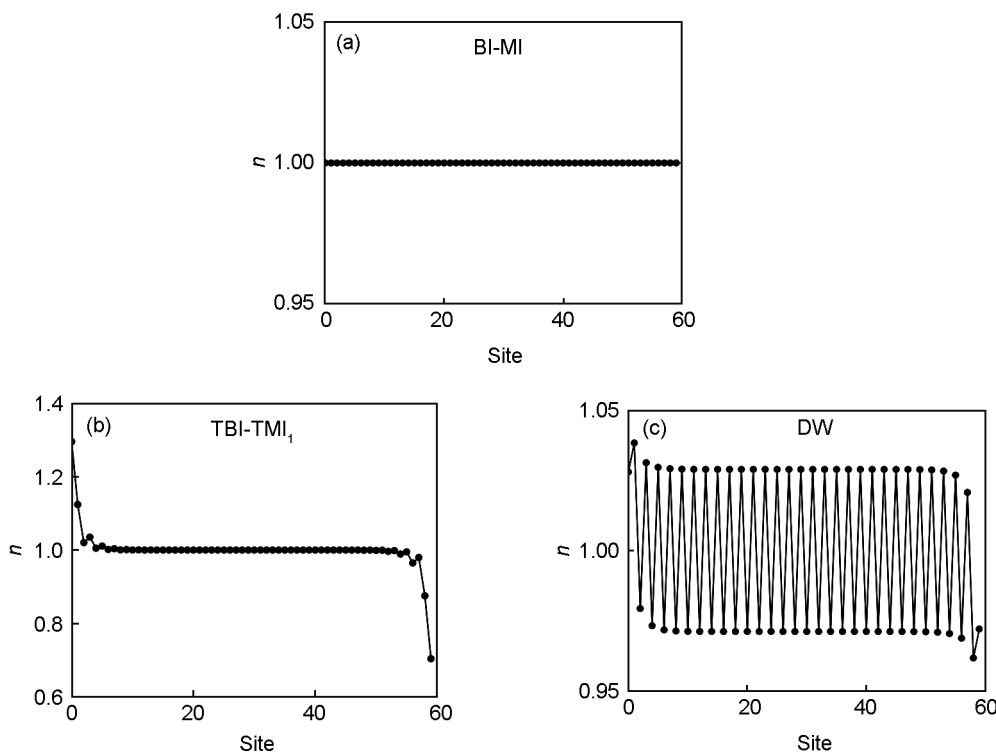


图3 不同相的局域密度分布

其他参数为:(a) $\lambda/t=0.3$ 、 $U/t=5$ 和 $\delta/t=-0.5$; (b) $\lambda/t=0.8$ 、 $U/t=2.0$ 和 $\delta/t=0.5$; (c) $\lambda/t=1.2$ 、 $U/t=10$ 和 $\delta/t=0.5$

Fig. 3 Local density distribution of different phases

other parameters: (a) $\lambda/t=0.3$, $U/t=5$, and $\delta/t=-0.5$; (b) $\lambda/t=0.8$, $U/t=2.0$ and $\delta/t=0.5$; (c) $\lambda/t=1.2$, $U/t=10$, and $\delta/t=0.5$

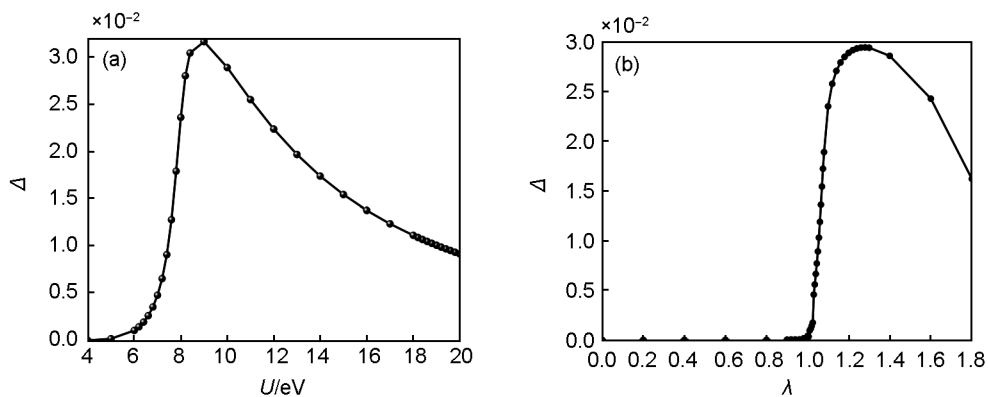


图4 密度波序参量随体系参数的变化

(a) 当 $\lambda=1.2$ 和 $\delta=0.5$ 时,密度波序参量随排斥相互作用强度的变化;(b) 当 $U=10$ 和 $\delta=0.5$ 时,密度波序参量随自旋轨道耦合强度 λ 的变化

Fig. 4 The change of density wave sequence parameters with system parameters

(a) When $\lambda=1.2$ and $\delta=0.5$, variation of density sequence parameters with repulsion interaction intensity; (b) When $U=10$ and $\delta=0.5$, the density sequence parameter changes with the spin-orbit coupling intensity λ

量做了拟合,同时也计算了小尺寸自旋向上向下的局域密度分布,如图5;通过多项式拟合,我们发现在大尺寸(热力学极限)下,序参量趋于有限值,这表明在热力学极限下,DW相仍然

存在稳定振荡,在实验上可观测。在小尺寸($L=60$)下,自旋向上向下局域密度分布高度重合,自旋轨道耦合的存在并未影响系统两组件的局域密度分布。

2.3 相图

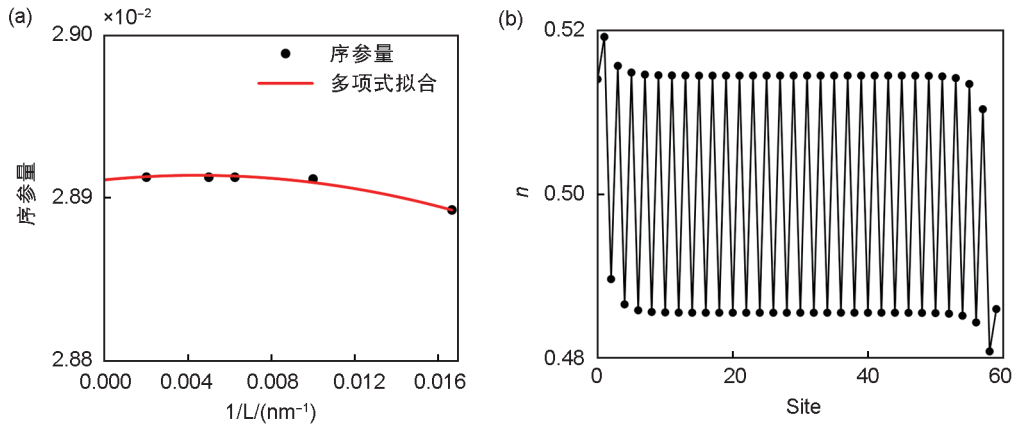


图5 序参量和密度分布

(a) 序参量随尺寸的变化,参数: $U=10$ 、 $\lambda=1.2$ 和 $\delta=0.5$; (b) 自旋向上/向下密度分布,参数同上

Fig. 5 Order parameter and density distribution

(a) The sequence parameter changes with size, parameter: $U=10$, $\lambda=1.2$, and $\delta=0.5$; (b) Spin up/down density distribution, same as above

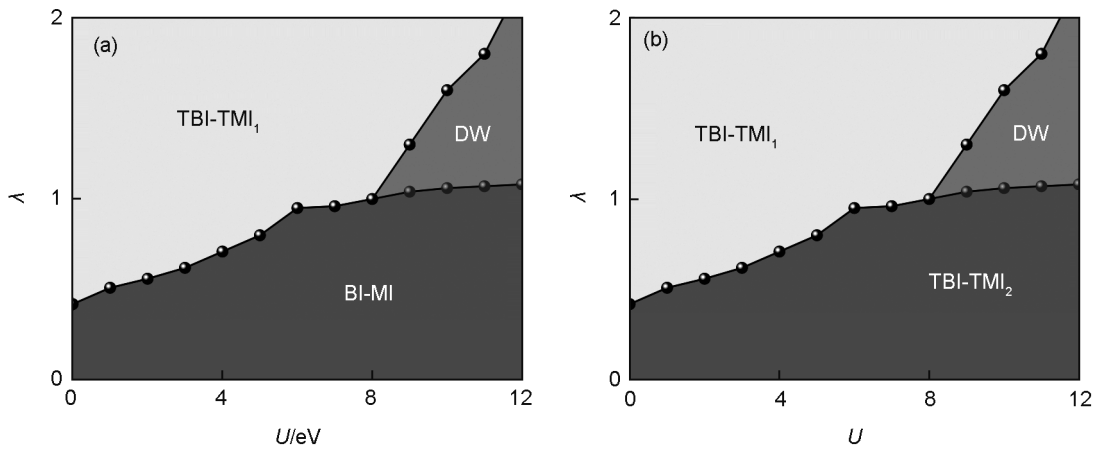


图6 不同参数相图

(a) 在 $\delta=-0.5$ 参数下,自旋轨道耦合和排斥作用竞争下的相图; (b) 在 $\delta=0.5$ 参数下,自旋轨道耦合和排斥作用竞争下的相图

Fig. 6 Phase diagram with different parameters

(a) Phase diagram under spin-orbit coupling and repulsion interactions competition with the parameter $\delta=-0.5$; (b) Phase diagram under spin-orbit coupling and repulsion interactions competition with the parameter $\delta=0.5$

系统同时存在排斥相互作用和自旋轨道耦合时,两者会有竞争作用。我们考察了不同参数 δ 下,同时改变自旋轨道耦合强度和粒子排斥相互作用强度时系统相的变化,并确定了相图,相边界由纠缠熵纠缠谱确定。无粒子排斥相互作用情况下,能带绝缘体的拓扑可以由拓扑不变量 $Z = \phi_{Zak}/\pi$ 来描述, ϕ_{Zak} 定义为占据的布洛赫态^[30]。 $Z=0,1$ 对应于开放边界条件下的一对和两对零能量边缘状态。在弱相互作用区域,系统仍然具有 $U(1)$ 对称性和手征对称

性,无隙边缘模仍然存在。而在自旋轨道耦合较大、相互作用足够强时,则手征对称性自发破缺,系统发生相变,出现密度波相。我们给出了在 $\lambda/t - U/t$ 平面参数 δ 分别为正和负的相图,如图6所示。对于参数 δ 为负的情况,强自旋轨道耦合诱导出一个具有一对非零边缘态 ($Z=1$) 的新的拓扑相,随着相互作用强度的增加,该相由拓扑能带绝缘相逐渐演化为拓扑莫特绝缘相。在弱自旋轨道耦合情况下,随着相互作用强度的增加,系统一直处于拓扑平庸绝缘相,而在强自旋轨道耦合和强排斥相互作用

用参数区间,我们发现了密度波相。当参数 δ 大于零时,相图与参数 δ 为负的情况基本相同,但是在弱自旋轨道耦合机制下,随着排斥相互作用的增强,系统处于具有两对非零能模 ($Z=2$) 的边缘态 TBI-TMI₂。

3 结论

本文通过数值计算方法,研究了 SSH 模型中密度结构因子峰值处的行为和扩展 SSH 模型中的量子相变,发现密度结构因子峰值在相变点会出现明显的突变或者奇异点行为。在具有 SOC 和 Hubbard 排斥作用的扩展 SSH 模型中,参数 δ 大于零时,我们发现在 SOC 强度较大的区间,强排斥作用使得系统基态手征对称性自发破缺,在两者竞争作用下,将会导致系统产生一个新的拓扑平庸相(DW 相)。此外,排斥作用和 SOC 过大都会抑制 DW 相趋于消失。参数 δ 小于零时,不同参数区间系统分别处于 BI-MI 和 TBI-TMI₁ 相,而在 SOC 和排斥作用都比较大的区域,同样出现 DW 相,相图结构与参数 δ 大于零时基本相同。DW 相的粒子数密度分布呈现均匀振荡,自旋向上向下的粒子数密度分布也分别呈现出均匀的振荡并且完全重合。

参考文献:

- [1] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Solitons in Polyacetylene[J]. *Phys Rev Lett*, 1979, **42**(25): 1698–1701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.42.1698.
- [2] LI L H, XU Z H, CHEN S. Topological Phases of Generalized Su-Schrieffer-Heeger Models[J]. *Phys Rev B*, 2014, **89**(8): 085111. DOI: 10.1103/PhysRevB.89.085111.
- [3] LI C F, LI X P, WANG L C. Topological Phases of Modulated Su-Schrieffer-Heeger Chains with Long-range Interactions[J]. *EPL Europhys Lett*, 2018, **124**(3): 37003. DOI: 10.1209/0295-5075/124/37003.
- [4] HAN Y Z, LIU J S, LIU C S. The Topological Counterparts of Non-Hermitian SSH Models[J]. *New J Phys*, 2021, **23**(12): 123029. DOI: 10.1088/1367-2630/ac3e9f.
- [5] MARQUES A M, DIAS R G. Multihole Edge States in Su-Schrieffer-Heeger Chains with Interactions[J]. *Phys Rev B*, 2017, **95**(11): 115443. DOI: 10.1103/PhysRevB.95.115443.
- [6] KUNO Y. Phase Structure of the Interacting Su-Schrieffer-Heeger Model and the Relationship with the Gross-Neveu Model on Lattice[J]. *Phys Rev B*, 2019, **99**(6): 064105. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.064105.
- [7] MARQUES A M, DIAS R G. Topological Bound States in Interacting Su-Schrieffer-Heeger Rings[J]. *J Phys Condens Matter*, 2018, **30**(30): 305601. DOI: 10.1088/1361-648X/aacd7c.
- [8] YAHYAVI M, SALEEM L, HETÉNYI B. Variational Study of the Interacting, Spinless Su-Schrieffer-Heeger Model[J]. *J Phys Condens Matter*, 2018, **30**(44): 445602. DOI: 10.1088/1361-648X/aae0a4.
- [9] ZHOU X F, PAN J S, JIA S T. Exploring Interacting Topological Insulator in the Extended Su-Schrieffer-Heeger Model[J]. *Phys Rev B*, 2023, **107**(5): 054105. DOI: 10.1103/PhysRevB.107.054105.
- [10] YAN Z B, WAN S L. Topological Phases, Topological Flat Bands, and Topological Excitations in a One-dimensional Dimerized Lattice with Spin-orbit Coupling [J]. *EPL Europhys Lett*, 2014, **107**(4): 47007. DOI: 10.1209/0295-5075/107/47007.
- [11] KICZYNSKI M, GORMAN S K, GENG H, *et al.* Engineering Topological States in Atom-based Semiconductor Quantum Dots[J]. *Nature*, 2022, **606**(7915): 694–699. DOI: 10.1038/s41586-022-04706-0.
- [12] WEIDEMANN S, KREMER M, HELBIG T, *et al.* Topological Funneling of Light[J]. *Science*, 2020, **368**(6488): 311–314. DOI: 10.1126/science.aaz8727.
- [13] ZHANG D W, ZHU Y Q, ZHAO Y X, *et al.* Topological Quantum Matter with Cold Atoms[J]. *Adv Phys*, 2018, **67**(4): 253–402. DOI: 10.1080/00018732.2019.1594094.
- [14] COOPER N R, DALIBARD J, SPIELMAN I B. Topological Bands for Ultracold Atoms[J]. *Rev Mod Phys*, 2019, **91**(1): 1015005. DOI: 10.1103/revmodphys.91.015005.
- [15] WANG L, TROYER M, DAI X. Topological Charge Pumping in a One-dimensional Optical Lattice[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **111**(2): 026802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.026802.
- [16] LOHSE M, SCHWEIZER C, ZILBERBERG O, *et al.* A Thouless Quantum Pump with Ultracold Bosonic Atoms in an Optical Superlattice[J]. *Nat Phys*, 2016, **12**(4): 350–354. DOI: 10.1038/nphys3584.
- [17] LIU X J, BORUNDA M F, LIU X, *et al.* Effect of Induced Spin-orbit Coupling for Atoms via Laser Fields [J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **102**(4): 046402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.046402.
- [18] LIN Y J, JIMÉNEZ-GARCÍA K, SPIELMAN I B. Spin-orbit-coupled Bose-Einstein Condensates[J]. *Nature*, 2011, **471**(7336): 83–86. DOI: 10.1038/nature09887.

- [19] GOR'KOV L P, RASHBA E I. Superconducting 2D System with Lifted Spin Degeneracy: Mixed Singlet-triplet State[J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **87**(3): 037004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.037004.
- [20] ZHANG C W, TEWARI S, LUTCHYN R M, *et al.* $P_x + ip_y$ Superfluid from S-wave Interactions of Fermionic Cold Atoms[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **101**(16): 160401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.160401.
- [21] SATO M, TAKAHASHI Y, FUJIMOTO S. Non-abelian Topological Order in S-wave Superfluids of Ultracold Fermionic Atoms[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **103**(2): 020401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.020401.
- [22] YE B T, MU L Z, FAN H. Entanglement Spectrum of Su-Schrieffer-Heeger-Hubbard Model[J]. *Phys Rev B*, 2016, **94**(16): 165167. DOI: 10.1103/PhysRevB.94.165167.
- [23] ZHAO J Z, HU S J, ZHANG P. Symmetry-protected Topological Phase in a One-dimensional Correlated Bosonic Model with a Synthetic Spin-orbit Coupling[J]. *Phys Rev Lett*, 2015, **115**(19): 195302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.195302.
- [24] ISLAM R, MA R C, PREISS P M, *et al.* Measuring Entanglement Entropy in a Quantum Many-body System [J]. *Nature*, 2015, **528**(7580): 77–83. DOI: 10.1038/nature15750.
- [25] LI J R, HUANG W J, SHTEYNAS B, *et al.* Spin-orbit Coupling and Spin Textures in Optical Superlattices[J]. *Phys Rev Lett*, 2016, **117**(18): 185301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.185301.
- [26] LIU X J, LAW K T, NG T K. Realization of 2D Spin-orbit Interaction and Exotic Topological Orders in Cold Atoms[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, **112**(8): 086401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.086401.
- [27] ALBIEZ M, GATI R, FÖLLING J, *et al.* Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-trapping in a Single Bosonic Josephson Junction[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **95**(1): 010402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.010402.
- [28] LEBLANC L J, BARDON A B, MCKEEVER J, *et al.* Dynamics of a Tunable Superfluid Junction[J]. *Phys Rev Lett*, 2011, **106**(2): 025302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.025302.
- [29] CHIN C, GRIMM R, JULIENNE P, *et al.* Feshbach Resonances in Ultracold Gases[J]. *Rev Mod Phys*, 2010, **82**(2): 1225–1286. DOI: 10.1103/revmodphys.82.1225.
- [30] XIAO D, CHANG M C, NIU Q. Berry Phase Effects on Electronic Properties[J]. *Rev Mod Phys*, 2010, **82**(3): 1959–2007. DOI: 10.1103/revmodphys.82.1959.