

随机无序对一维 Kitaev 模型拓扑和局域化特性的影响

刘晓阳^{1,2}, 武晔虹³, 陆展鹏^{1,2*}, 徐志浩^{1,2,4*}

- 山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006;
- 山西大学 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 山西 太原 030006;
- 山西医科大学 基础医学院, 山西 太原 030001;
- 山西大学 极端光学协同创新中心, 山西 太原 030006)

摘要: 本文研究了在位无序、跃迁无序、超导配对无序和这三种无序都有的完全无序对 Kitaev 模型拓扑特性、态密度(DOS)和局域化性质的影响。这种影响可能会诱发新的拓扑相,也可能使已有的拓扑特性消失。通过对比 DOS 和拓扑相图的结果,发现 DOS 中存在零模峰并不能作为探测拓扑相变的证据。最后以在位无序效应为例,分析了有限尺寸情况下的 Kitaev 模型的局域化性质。

关键词: Majorana 费米子; Z_2 拓扑不变量; Lyapunov 指数; 态密度

中图分类号: O469 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-2395(2024)04-0792-12

Effect of Random Disorder on the Topology and Localization Properties of the One-dimensional Kitaev Model

LIU Xiaoyang^{1,2}, WU Yehong³, LU Zhanpeng^{1,2*}, XU Zhihao^{1,2,4*}

- Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
- State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
- School of Basic Medical Sciences, Shanxi Medical University, Taiyuan 030001, China;
- Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: In this paper, we study the topological properties, the density of states (DOS), and the localization properties of the Kitaev mode with the on-site disorder, the hopping disorder, the superconducting pairing disorder, and the full disorder, which includes all the above three disorders. These disorder effects may induce topologically nontrivial phases or destroy topologically nontrivial properties. We also compare the DOS with the topological phase diagram, and find that the existence of the zero-energy peak cannot be used as a proof in the experimental detection. Finally, we study the localization properties of the Kitaev mode with the on-site disorder effect as an example in finite-size cases.

Key words: Majorana fermions; Z_2 topological invariant; Lyapunov exponent; density of states

收稿日期:2023-02-02;接受日期:2023-04-06

基金项目:国家自然科学基金(11604188;12147215;11905118);山西省基础研究计划(20210302123442);北京凝聚态物理国家研究中心开放课题;山西省“1331工程”重点学科建设计划资助的课题

作者简介:刘晓阳(1995-),男,山西朔州人,硕士研究生,主要研究方向为冷原子物理。E-mail:xlxmtjy@163.com

* 通信作者:陆展鹏(LU Zhanpeng),E-mail:772869573@qq.com;徐志浩(XU Zhihao),E-mail:xuzhihao@sxu.edu.cn

引文格式:刘晓阳,武晔虹,陆展鹏,等.随机无序对一维 Kitaev 模型拓扑和局域化特性的影响[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):792-803. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023078

0 引言

Majorana 费米子是意大利物理学家 Majorana Ettore^[1]于 1937 年通过改写 Dirac 方程提出的一种奇特粒子。它与 Dirac 费米子的性质有所不同,它的反粒子是其本身且呈电中性。作为非阿贝尔任意子^[2]的一种, Majorana 费米子在受到环境干扰时能够保持鲁棒性且能够免疫退相干的影响,利用这种特性有望实现容错型拓扑量子计算^[3-4]。由于拓扑量子计算的巨大应用前景,科学家们不遗余力地在各种模型中寻找这种费米子,已经成为一个重要的研究方向。

在最初的实验上,人们通过对超导体纳米线的研究认为,量子化的零偏压电导峰是 Majorana 费米子出现的标志^[5-9]。通过提高样品的品质,实验测得费米面处于零能附近的电导率已经接近于 $2e^2/h$ ^[10]。然而,随着研究的深入,人们在无 Majorana 费米子的系统中同样也发现了零偏压的电导峰^[11-15],因此用零偏压电导峰来验证 Majorana 费米子存在的方法受到了质疑。最近的实验^[11, 16-21]表明,无序效应是干扰实验探测 Majorana 费米子的重要原因。可见考虑无序效应在拓扑超导系统中的影响具有重要的意义,这为探寻 Majorana 费米子提供了新的思路。

鉴于 Kitaev 模型中极有可能存在 Majorana 费米子这一奇特粒子,所以该模型被视为寻找 Majorana 费米子的一个范式模型,凝聚态物理学家们从未停止研究该模型的相关物理性质。最近,人们讨论了 Kitaev 模型^[22]在(准)周期调制下的拓扑量子相变行为^[23-26],而 Das Sarma 等则将 Kitaev 模型的理论结果与实验模型联系起来,通过对比 Kitaev 模型以及实验上与之相对应的纳米线指出,不同强度的在位随机无序调制会对二者产生相似但不尽相同的影响^[27-34]。这些研究表明无序效应将极大地影响超导系统中的拓扑性质,从而造成实验观测量如态密度(density of states, 简记为 DOS)^[15, 35-36]的不准确。DOS 作为实验可测的物理量,是检测实验上拓扑态存在的重要手段^[37-38],但在实际的实验中,由于各种实验参数的不确定因素,例如温度、外加磁场和材料本身存在的杂质、缺陷等,将不可避免地引入无序效应,造成 DOS 的测量存在一定的误差^[27, 34],这种无序效应可能

体现在理论计算模型的对角和非对角项上。本文将讨论不同位置的无序效应在 Kitaev 模型中对 DOS 和拓扑相图的影响,全面地分析在不同参数下, DOS 作为一种实验检测拓扑态的常用手段^[37-38],所产生的效果差异,及具有随机无序的一维 Kitaev 模型的局域化性质。

1 理论模型

本文考虑具有随机无序的一维 Kitaev 模型,其哈密顿量可以写为:

$$\hat{H} = \sum_i \left[(-t_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \Delta_i \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} + H.c.) + \mu_i \hat{n}_i \right], \quad (1)$$

其中 \hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_i) 是费米子的产生(湮灭)算符, $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$ 是粒子数算符。这里的无序效应分别为跃迁无序、超导配对无序、在位无序,其相应的参数为: $t_i = t_0 + t_1 \omega_i$, $\Delta_i = \Delta_0 + \Delta_1 \omega'_i$ 以及 $\mu_i = \mu_0 + \mu_1 \omega''_i$, 其中 ω , ω' 和 ω'' 是从 $(-1, 1)$ 中生成的随机数, t_0 , Δ_0 和 μ_0 分别对应于纯净系统中的跃迁强度,超导配对强度和在位势强度,而 t_1 , Δ_1 和 μ_1 分别控制跃迁项,超导配对项和在位势能项中的无序强度。通过 Bogoliubov-de Gennes (简记为 BdG) 变换^[39],系统的哈密顿量可写为:

$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{C}^\dagger \hat{\mathcal{H}}_{\text{BdG}} \hat{C}$, 其中, $\hat{C} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_L, \hat{c}_1^\dagger, \dots, \hat{c}_L^\dagger)^\top$, 变换后的 BdG 哈密顿量写成矩阵的形式为:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} \hat{h}_{ij} & \hat{\Delta}_{ij} \\ -\hat{\Delta}_{ij} & -\hat{h}_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中

$$\hat{h}_{ij} = -t_i (\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) + \mu_i \delta_{ji},$$

$$\hat{\Delta}_{ij} = -\Delta_i (\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i-1}).$$

通过对角化 BdG 形式的哈密顿量可以得到准粒子的本征能量及其相应的本征态。此 BdG 方程满足粒子-空穴对称性,系统的能谱关于零点分为上下两个对称的部分。定义所有负的准粒子能态被填满的情况为系统的基态。本文固定 $t_0 = 1$, $\Delta_0 = 0.5$ 以及格点数 $L = 200$, 在研究系统拓扑相变部分采用开边界条件,而在研究系统局域化行为部分为了消除边界效应对局域化特性的影响采用周期边界条件进行讨论。

当 $t_1 = \Delta_1 = \mu_1 = 0$ 时,模型(1)可以退回到 Kitaev 于 2003 年提出的原始 Kitaev 模型^[22],它被认为是寻找 Majorana 费米子的一个范式模

型。图 1(a)展示了开边界条件下系统在纯净模式下的能谱随在位势能 μ_0 的变化情况。当在位势能处于 $|\mu_0| < 2$ 时,系统中存在非平庸的零模, Majorana 边界态对应于处于能隙中的零能解。而实验上可以通过测量 DOS 中的零能峰值来检测拓扑零模的存在与否^[5, 40-43]。DOS 可以由谱定理给出: $\rho(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \text{Tr} \left[\hat{\mathcal{G}}^+(E + i0^+) \right] \right\}$, 这里 $\hat{\mathcal{G}}^+(E) = (E - \hat{H})^{-1}$ 。本文在开边界条件下对 DOS 的具体计算过程可参见附录 A。图 1(b)展示了纯净情况下系统的全能谱 DOS。可以看出, 当在位势 $\mu_0 = 0$ 时, 零能处 ($E_n = 0$) DOS 为一个有限值, 表明此时零能态的存在, 而在 $\mu_0 = 3$ 时, DOS 零能峰消失。这一结论与图 1(a) 能谱图中所反映的零模情况相符。值得注意的是, 图中那些较大的 DOS 峰值说明此处的准粒子简并度大, 系统的对称性好, 这也正好反映了系统的有序特性^[44]。然而, 对于无序体系而言, 全能谱 DOS 存在非零值的零能峰并不一定意味着存在具有非平庸拓扑性质的 Majorana 零模, 这将在后文的数值结果中体现出来。

为了进一步表征拓扑超导系统的拓扑性质, 可以利用散射矩阵的方法来计算 Z_2 拓扑不变量^[35, 45-47], 此方法同样适用于存在无序调制时系统缺乏平移对称性的情况。此时系统的散射矩阵 S 与在费米能级 $E_F = 0$ 处的入射和反射波的振幅相关, 它由两个反射矩阵 R 和 R' 以及两个透射矩阵 T 和 T' 构成, 其形式如下:

$$S = \begin{pmatrix} R & T' \\ T & R' \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 R 和 T 表示从左端入射所得到的反射和透射矩阵, 而 R' 和 T' 表示从右端入射的反射和透射矩阵, R, T, R' 和 T' 矩阵的维度为 2×2 的, 即散射矩阵为 4×4 的。系统的 Z_2 拓扑不变量定义为 $Q = \text{sgn}[\text{Det}(R)]$ 。当 $Q = +1$ 时, 系统处于拓扑平庸相, 当 $Q = -1$ 时, 系统处于拓扑非平庸相, 对应于开边界条件下的 Kitaev 链两端存在非平庸的 Majorana 零模。散射矩阵 (3) 式可以通过该系统的零能传输矩阵 \tilde{M}_i 给出, 它被定义为:

$$\begin{pmatrix} \hat{t}_i \Phi_i \\ \Phi_{i+1} \end{pmatrix} = \tilde{M}_i \begin{pmatrix} \hat{t}_{i-1}^\dagger \Phi_{i-1} \\ \Phi_i \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$\tilde{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{t}_i^\dagger \\ -\hat{t}_i^{-1} & -\hat{t}_i^{-1} \hat{\lambda}_i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$\hat{t}_i = -t_i \hat{\sigma}_z + i\Delta_i \hat{\sigma}_y$, $\hat{\lambda}_i = \mu_i \hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_y$ 和 $\hat{\sigma}_z$ 是泡利矩阵。由于超导系统具有粒子-空穴对称性, 每个格点位置波函数 Φ_i 需要由粒子和空穴部分做线性组合得到, 其线性组合系数分别为 u_i 和 v_i , 因此设 $\Phi_i = (u_i, v_i)^\top$ 表示第 i 个格点上的二分量子波函数, 这时传输矩阵为 4×4 的矩阵, 总的传输矩阵为 $\tilde{M} = \tilde{M}_L \tilde{M}_{L-1} \cdots \tilde{M}_2 \tilde{M}_1$ 。利用幺正变换, 把总的传输矩阵写到新的基矢下:

$$M = U^\dagger \tilde{M} U, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中 I 为 2×2 的单位矩阵。在新的基矢下, 可以容易地得到透射、反射矩阵与总转移矩阵的关系为:

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} I \\ R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R' \\ I \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ T' \end{pmatrix}, \quad (7)$$

由总转移矩阵 M , 得到反射矩阵 R , 从而计算出拓扑不变量 Q (见附录 B)。图 1(c) 展示了纯净 Kitaev 模型的 Z_2 拓扑不变量随 μ_0 的变化。可以看出在 $|\mu_0| < 2$ 的区域中, 系统的拓扑数 $Q = -1$, 对应于能谱图 1(a) 中存在非平庸零模的区域。

零能态的李雅普诺夫指数 (Lyapunov exponent, 简记为 LE)^[27, 48-52] 作为一个重要的物理量也能够定义系统的拓扑性质, 它被定义为 $\gamma = \lim_{L \rightarrow \infty} \ln(\|\mathcal{M}\|)$ 。其中, $\|\mathcal{M}\|$ 表示对矩阵 \mathcal{M} 取范数, 零能态时的总转移矩阵 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L \mathcal{M}_{L-1} \cdots \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1$, 其中 (见附录 C)

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} \frac{\mu_i}{t_i + \Delta_i} & \Delta_{i-1} - t_{i-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

当 $\gamma > 0$ 时, 系统处于拓扑平庸相, $\gamma < 0$ 时系统处于拓扑非平庸相, $\gamma = 0$ 时, 即为拓扑相变点^[27, 49]。图 1(d) 展示了零能态的 LE γ 随在位化学势 μ_0 变化的情况。可以看到在 $|\mu_0| < 2$ 的区域内, 零能态的 LE γ 为负值时, 表明此时系统处于拓扑非平庸相。零能态的 LE γ 为正值

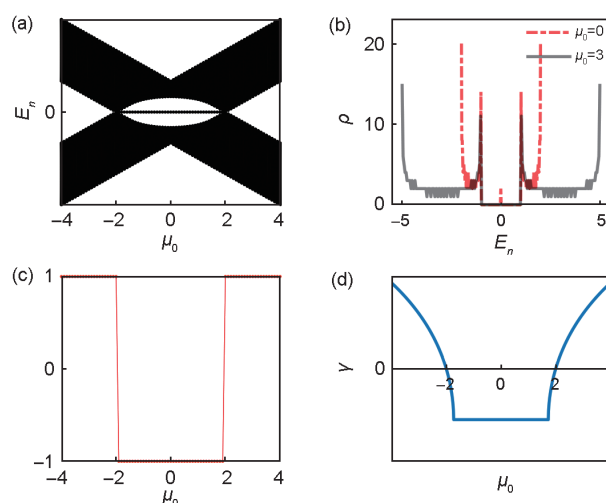


图1 开边界条件下的纯净系统的情况

(a) 随在位势 μ_0 变化的能谱; (b) $\mu_0=0$ 和 3 时系统全能谱的 DOS; (c) 随在位势 μ_0 变化的 Z_2 拓扑不变量 Q 和 (d) 的 LE γ , 这里, $t_1=\Delta_1=\mu_1=0$, $t_0=1$, $\Delta_0=0.5$ 及 $L=200$

Fig. 1 The cases of the clean system under open boundary conditions

(a) Energy spectrum as the function of μ_0 ; (b) DOS for the system with $\mu_0=0$ and 3; (c) Z_2 topological invariant Q and (d) the LE γ with the variation of the on-site potential μ_0 , respectively. Here, $t_1=\Delta_1=\mu_1=0$, $t_0=1$, $\Delta_0=0.5$ and $L=200$

时,系统处于拓扑平庸相。零能态的 LE γ 值为零时,对应于系统的拓扑相变点。

接下来,本文将分别讨论在位无序、跃迁无序、超导配对无序以及完全无序对零能态以及拓扑相图的影响,并且讨论无序效应对系统局域化性质的改变。不失一般性,文中绘制的拓扑相图均进行了 100 次无序平均,而全能谱 DOS 以及 2.5 节中反映系统局域化性质的所有数值结果则是在 5 000 次无序平均下得到的。

2 结果分析与讨论

2.1 在位无序效应对拓扑相变的影响

本节将讨论在位无序效应(即 $\mu_1 \neq 0$, $t_1 = \Delta_1 = 0$)对 Kitaev 模型拓扑性质的影响。图 2 (a)展示了固定 $\mu_0 = 0$ 时,对应于不同 μ_1 ,系统全能谱 DOS 的变化情况。与图 1(b)中纯净情况下的 DOS 曲线相比,引入无序效应的 DOS 曲线最大值都明显降低但能量的分布范围(能带)有所加宽,意味着态的总数目不变,系统有序变无序。而对于弱无序($\mu_1 = 1, 2$),体系准粒子态的能量本征值不再像纯净模型那样集中在四个主要的峰值上,而是原来在零能两侧没有峰值的地方出现了 DOS 值较大的“平台”,这说明准粒子结构发生了变化,由原来的扩展态

变成局域态。也就是说,准粒子态简并减小且在整个能区展宽,能带结构逐渐消失。随着无序强度 μ_1 的增大,能量分布范围持续加宽, DOS “平台”高度逐渐降低,而较强无序调制下($\mu_1 = 3, 4$)的最大峰值数均减小至一个且位于能区中间,即准粒子逐渐局域到零能量附近,这是因为结构的稳定取向总是使能量最小,这可以获得系统的最小能量,趋向结构稳定^[53-54]。不难发现,图中不同无序强度下的 DOS 都具有零能峰,而此时系统是否都处于拓扑非平庸相,存在非平庸的 Majorana 零模?

在开边界条件下,随着无序的增强,系统的拓扑相图可以由 Z_2 拓扑不变量和零能态的 LE 得出。如图 2(b)的蓝色区域展示的是系统的拓扑非平庸相区,与之对应的黄色区域则是拓扑平庸相区,而中间的渐变色,是数值计算 Z_2 时做了 100 次无序平均所导致的。正如上节所述,另一个定义拓扑的重要物理量为零能态的 LE,当 γ 发生符号转变时,对应于系统经历一个拓扑相变,此时即可确定拓扑相边界,图 2 (c)正是由 γ 在零值附近随 μ_0 和 μ_1 变化的情况,其对应于拓扑相边界,显然该边界与图 2 (b)中所算得的相边界吻合。从图 2(b)和 2 (c)中可以发现,在拓扑非平庸区($|\mu_0| < 2$),系

统的拓扑非平庸性质对在位势上的弱无序调制具有一定的鲁棒性,而随着无序的增强,系统会发生拓扑相变,原来的拓扑非平庸特性逐渐消失,并且在原先纯净系统的相变点附近的拓扑平庸区,无序效应将会诱导出新的拓扑非平庸相^[28-29, 32-33]。数值结果表明,在强无序情况下,系统已完全处于拓扑平庸相,因此图 2(a)中的零能峰不再能准确反映系统存在非平庸零模的情况,更多反映出的是系统准粒子趋于零能附近的一种分布。

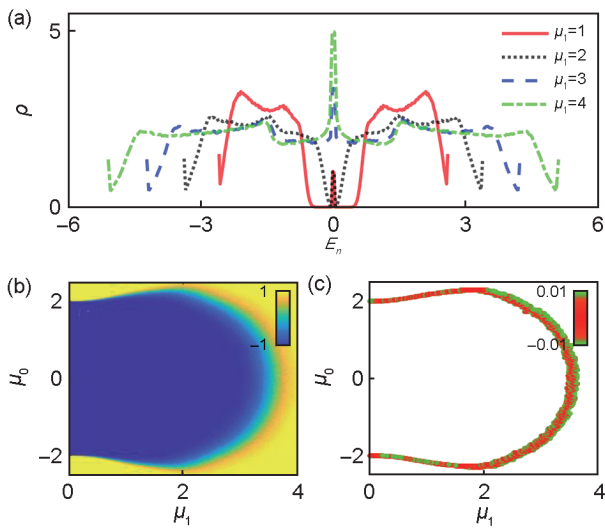


图2 开边界条件下具有在位无序效应的情况

(a) $\mu_0 = 0$ 时,全能谱DOS随不同无序强度 μ_1 的变化;(b) Z_2 拓扑不变量 Q 随着无序强度 μ_1 和在位势 μ_0 的变化,图中颜色代表 Q 的大小;(c) 趋于零的LE γ 随着无序强度 μ_1 和在位势 μ_0 的变化,图中颜色代表 γ 的大小。这里, $\mu_1 \neq 0$, $t_1 = \Delta_1 = 0$, $t_0 = 1$, $\Delta_0 = 0.5$ 及 $L = 200$

Fig. 2 The cases of the system with on-site disorder potentials under open boundary conditions

(a) DOS with $\mu_0 = 0$ for different μ_1 ; (b) Z_2 topological invariant Q as a function of disorder strength μ_1 and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of Q ; (c) the values of the LE of approaching zero as a function of disorder strength μ_1 and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of γ . Here, $\mu_1 \neq 0$, $t_1 = \Delta_1 = 0$, $t_0 = 1$, $\Delta_0 = 0.5$ and $L = 200$

2.2 跃迁无序效应对拓扑相变的影响

本节将讨论跃迁无序效应(即 $t_1 \neq 0$, $\mu_1 = \Delta_1 = 0$)对Kitaev模型拓扑性质的影响。跃迁无序效应情况下的全能谱DOS(图3(a))与2.1节所讨论的情况类似,固定 $\mu_0 = 0$,取 $t_1 = 1, 2, 3, 4$ 。与在位无序效应情况下的全能谱

DOS不同的是,跃迁无序效应的引入使得准粒子DOS能区更宽,而在较强无序时($t_1 = 2, 3, 4$),准粒子更加趋向于集中在零能量附近,峰值更大,说明跃迁无序效应对准粒子能态密度分布的影响比在位无序的情况更大。这是因为在位无序与成分无序相对应,而跃迁无序与格点位置有着密切的关系,当体系周期性结构或周期性势场发生破缺,哈密顿量的跃迁项无序变化,即跃迁无序实际上对应着拓扑无序或者说结构无序^[55-56],其对DOS的影响往往比仅存在在位无序效应时更大^[53-55]。

图3(b)和图3(c)展示了Kitaev模型随着在位化学势 μ_0 和跃迁无序强度 t_1 变化的拓扑相图,其中图3(b)对应于 Z_2 拓扑不变量的情况,而图3(c)为 $\gamma \rightarrow 0$ 的分布情况,它对应于拓扑相边界。可以看出,在 $|\mu_0| < 2$ 且 $\mu_0 \neq 0$ 的拓扑非平庸区,系统的拓扑性质对弱无序具有一定的鲁棒性,但随着无序的增强,系统会发生拓扑相变,即原来的非平庸拓扑特性会随着无序的增强而消失,与在位无序效应情况相比消失速度明显加快,这表明跃迁无序效应对系统拓扑特性的影响要比在位无序效应的影响大,同时跃迁无序效应在拓扑平庸区($|\mu_0| > 2$)也会诱发出新的拓扑非平庸相。

值得注意的是,在 $\mu_0 = 0$ 时,强跃迁无序并不会破坏系统的非平庸拓扑性质。由参考文献[45, 47-48]及附录C易知, $t_1 \neq 0$, $\mu_1 = \Delta_1 = 0$ 时,系统零能处第 i 格点波函数 Ψ_i 的差分方程为:

$$(\Delta_0 + t_i)\Psi_{i+1} + \mu_0\Psi_i - (\Delta_0 - t_{i-1})\Psi_{i-1} = 0, \quad (9)$$

当 $\mu_0 = 0$ 时,上式可写为: $(\Delta_0 + t_i)\Psi_{i+1} - (\Delta_0 - t_{i-1})\Psi_{i-1} = 0$,整理后可解得奇格点的波函数:

$$\Psi_{2i+1} = \prod_{j=1}^i \frac{\Delta_0 - t_{j-1}}{\Delta_0 + t_j} \Psi_1, \quad (10)$$

则在热力学极限下($L \rightarrow \infty$),零能态的LE可由下式给出^[57]:

$$\gamma = \max \left[\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln |\Psi_{2i+1}| \right] = \quad (11)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\ln |\Delta_0 - t_{i-1}| - \ln |\Delta_0 + t_i|),$$

伯克霍夫遍历定理中指出可利用系综平均值的方法将上式化为积分形式:

$$\gamma = \int_{-1}^1 d\omega (\ln|\Delta_0 - t_0 - t_1\omega_{i-1}| - \ln|\Delta_0 + t_0 + t_1\omega_i|), \quad (12)$$

利用积分公式

$$\int x^m \ln(a+bx) dx = \frac{1}{m+1} \left[x^{m+1} - \frac{(-a)^{m+1}}{b^{m+1}} \right] \ln(a+bx) + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k x^{m-k+2} a^{k-1}}{(m-k+2)b^{k-1}},$$

(12)式可被精确求得:

$$\gamma = \ln \frac{|\Delta_0 - t_0 - t_1|^{1+\frac{t_0-\Delta_0}{t_1}} |\Delta_0 - t_0 + t_1|^{1-\frac{t_0-\Delta_0}{t_1}}}{|\Delta_0 + t_0 + t_1|^{1+\frac{t_0+\Delta_0}{t_1}} |\Delta_0 + t_0 - t_1|^{1-\frac{t_0+\Delta_0}{t_1}}}, \quad (13)$$

其中当 $t_0=1, \Delta_0=0.5$ 时, γ 与 t_1 之间的关系曲线如图 3(d), 可见随着跃迁无序的增强, 零能态的 LE 曲线逐渐趋向于零轴 $\gamma=0$ 但却未越过, 因而可以判定 $\mu_0=0$ 时, 跃迁无序效应无法破坏系统的拓扑非平庸性质, 这与数值结果相对应。

通过对比图 3(a) 的 DOS 结果与图 3(b) 的拓扑相图, 发现在弱无序 ($t_1=1$) 情况下, DOS

的零能峰值较小, 与拓扑相图对应。随着无序强度的增强, DOS 零能峰始终存在, 似乎与化学势 $\mu_0=0$ 处拓扑零模对跃迁无序具有强鲁棒性相吻合。然而在强无序情况下零能峰值稳定在一个较大的值, 这可能是由跃迁无序造成的。对比于在位无序, 跃迁无序使得零能附近出现更多的简并态, 从而使得 DOS 出现更大的零能峰值。此时可以看出除了 $\mu_0=0$ 时, 绝大多数情况 DOS 已经不能准确反映体系一定存在拓扑零模。

2.3 超导配对无序效应对拓扑相变的影响

本节讨论超导配对无序效应 (即 $\Delta_1 \neq 0, \mu_1 = t_1 = 0$) 对 Kitaev 模型拓扑性质的影响。取 $\mu_0=0, \Delta_1=1, 2, 3, 4$ 时, 超导配对无序效应情况下的全能谱 DOS, 如图 4(a) 所示, 它展示了与跃迁无序效应相类似的行为, 特别是, 对应于不同的 Δ_1 , 零能附近均出现了非零值的态密度。

与跃迁无序效应类似但不尽相同, 在超导配对无序效应情况下, 从 Z_2 不变量 (图 4(b)) 和零能态的 LE 在零值附近的分布 (图 4(c)) 随

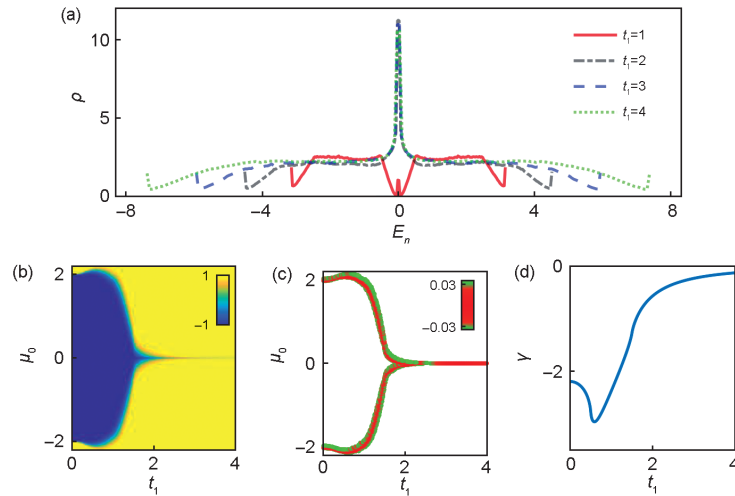


图3 开边界条件下具有跃迁无序效应的情况

(a) $\mu_0=0$ 时, 全能谱 DOS 随不同无序强度 t_1 的变化; (b) Z_2 拓扑不变量 Q 随着无序强度 t_1 和在位势 μ_0 的变化, 图中颜色代表 Q 的大小; (c) 趋于零的 LE γ 随着无序强度 t_1 和在位势 μ_0 的变化, 图中颜色代表 γ 的大小; (d) $\mu_0=0$ 时, γ 与 t_1 之间的关系曲线。这里, $t_1 \neq 0, \mu_1 = \Delta_1 = 0, t_0 = 1, \Delta_0 = 0.5$ 及 $L = 200$

Fig. 3 The cases of the system with disordered hopping terms under open boundary conditions

(a) DOS with $\mu_0=0$ for different t_1 ; (b) Z_2 topological invariant as a function of disorder strength t_1 and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of Q ; (c) the values of the LE γ of approaching zero as a function of disorder strength t_1 and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of γ ; (d) γ as a function of t_1 for $\mu_0=0$. Here, $t_1 \neq 0, \mu_1 = \Delta_1 = 0, t_0 = 1, \Delta_0 = 0.5$ and $L = 200$

着 μ_0 和超导配对无序强度 Δ_1 变化的情况中容易看出, 在 $|\mu_0| < 2$ 且 $\mu_0 \neq 0$ 的拓扑非平庸区, 系统对弱无序具有一定的鲁棒性, 但随着无序的增强, 系统会发生拓扑相变, 即原来的拓扑特性逐渐消失。然而在拓扑平庸区 (即 $|\mu_0| > 2$), 超导配对无序效应并不会诱导出非平庸的拓扑。通过研究发现超导配对无序与跃迁无序在 $\mu_0 = 0$ 时对拓扑性质也具有类似的行为, 利用 2.2 节中相同的解析方法可以得到零能态的 LE 解为

$$\gamma = \ln \frac{|\Delta_0 - t_0 + \Delta_1|^{1 + \frac{\Delta_0 - t_0}{\Delta_1}} |\Delta_0 - t_0 - \Delta_1|^{1 - \frac{\Delta_0 - t_0}{\Delta_1}}}{|\Delta_0 + t_0 + \Delta_1|^{1 + \frac{\Delta_0 + t_0}{\Delta_1}} |\Delta_0 + t_0 - \Delta_1|^{1 - \frac{\Delta_0 + t_0}{\Delta_1}}} \quad (14)$$

图 4(d) 展示了在 $t_0 = 1, \Delta_0 = 0.5$ 时, γ 随超导配对强度 Δ_1 的关系曲线, 可以看出在 $\mu_0 = 0$ 时, 无论超导配对无序多强, 系统始终处于拓扑非平庸相。

通过对比图 4(a) 的 DOS 结果与图 4(b) 的拓扑相图, 发现具有超导配对无序情况下的 DOS 结果与跃迁无序情况相类似, 除了 $\mu_0 = 0$

等特殊情况, 大多数 DOS 零能峰值不能够准确反映体系的拓扑性质, 单以 DOS 的结果不能作为拓扑零模存在的证据。

2.4 完全无序效应对拓扑相变的影响

这一小节讨论系统的在位项、跃迁项、超导配对项以一定比例加入无序调制的完全无序效应 (即 $\mu_1 = 2t_1 = 2\Delta_1 = V$) 对系统拓扑性质的影响。图 5(a) 展示了 $\mu_0 = 0, V$ 取不同值时, 完全无序效应情况下的全能谱 DOS。与前面几节的讨论类似, 在无序的影响下, 准粒子逐渐局域到零能附近, 体系结构趋向稳定。而完全无序情况下和仅考虑跃迁 (或超导配对) 无序情况下的准粒子 DOS 分布相似, 主要体现跃迁 (或超导配对) 无序的特征, 例如在图 5 中, 能区宽度和 $V = 2$ 时零能峰的走势与图 3 (或图 4) 类似, 只是最大零能峰值与图 2 相近才体现了在位无序的特征。这表明在完全无序情况下, 跃迁 (或超导配对) 无序较在位无序对系统准粒子 DOS 的影响更大。

在完全无序效应的影响下, 体系的 Z_2 拓扑不变量和零能态的 LE 在零值附近分布随在位势能 μ_0 和无序强度 V 的变化情况由图 5(b) 和图 5(c)

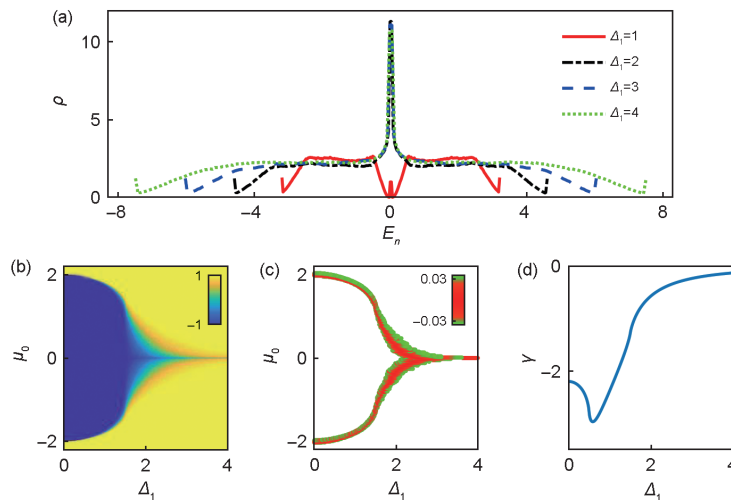


图 4 开边界条件下具有超导配对无序效应的情况

(a) $\mu_0 = 0$ 时, 全能谱 DOS 随不同无序强度 Δ_1 的变化; (b) Z_2 拓扑不变量 Q 随着无序强度 Δ_1 和在位势 μ_0 的变化, 图中颜色代表 Q 的大小; (c) 趋于零的 LE γ 随着无序强度 Δ_1 和在位势 μ_0 的变化, 图中颜色代表 γ 的大小; (d) $\mu_0 = 0$ 时, γ 与 Δ_1 之间的关系曲线。这里, $\Delta_1 \neq 0, \mu_1 = t_1 = 0, t_0 = 1, \Delta_0 = 0.5$ 及 $L = 200$

Fig. 4 The cases of the system with disordered p-wave pairing terms under open boundary conditions (a) DOS with $\mu_0 = 0$ for different Δ_1 ; (b) Z_2 topological invariant as a function of disorder strength Δ_1 and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of Q ; (c) the values of the LE γ of approaching zero as a function of disorder strength Δ_1 and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of γ ; (d) γ as a function of Δ_1 for $\mu_0 = 0$. Here, $\Delta_1 \neq 0, \mu_1 = t_1 = 0, t_0 = 1, \Delta_0 = 0.5$ and $L = 200$

分别给出。由图可知,拓扑平庸区($|\mu_0| < 2$)对弱无序的调制具有一定的鲁棒性,随着无序的增强,系统会发生拓扑相变。当无序足够强时,原来的拓扑特性消失。在拓扑平庸区($|\mu_0| > 2$)同样可以诱导出新的拓扑平庸相。

通过对比图 5(a)与图 5(b),可以发现在弱无序时 DOS 零能峰与拓扑相图相吻合,但是随着无序的增强,DOS 零能峰仍然存在,但此时系统却处于拓扑平庸相,与拓扑相图不再吻合。由此可见,在完全无序情况下,DOS 零能峰并不能作为检测拓扑态的证据。

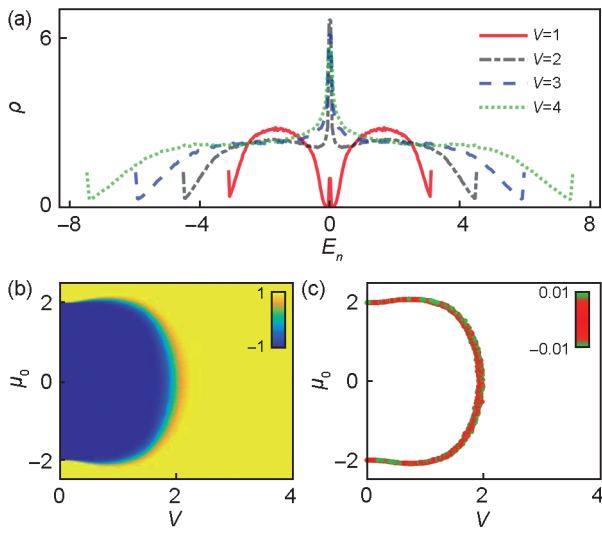


图 5 开边界条件下具有完全无序效应的情况

(a) $\mu_0=0$ 时,全能谱 DOS 随不同无序强度 V 的变化;(b) Z_2 拓扑不变量 Q 随着无序强度 V 和在位势 μ_0 的变化,图中颜色代表 Q 的大小;(c) 趋于零的 LE γ 随着无序强度 V 和在位势 μ_0 的变化,图中颜色代表 γ 的大小。这里, $\mu_1=2t_1=2\Delta_1=V$, $t_0=1$, $\Delta_0=0.5$ 及 $L=200$

Fig. 5 The cases of the system with on-site disorder potentials, disordered hopping terms, and disordered p-wave pairing terms under open boundary conditions

(a) DOS with $\mu_0=0$ for different V ; (b) Z_2 topological invariant Q as a function of disorder strength V and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of Q ; (c) the values of the LE γ of approaching zero as a function of disorder strength V and on-site potential μ_0 . The color code represents the values of γ . Here, $\mu_1=2t_1=2\Delta_1=V$, $t_0=1$, $\Delta_0=0.5$ and $L=200$

2.5 局域化转变

单参数标度理论指出一维情况下任意小的无序强度将导致系统的局域化,然而对称性会

极大地改变系统的局域化性质,如时间反演对称性的破缺等。在超导系统中引入无序效应,由于存在粒子-空穴配对,体系具有粒子-空穴对称性,系统的局域化也会发生相应的改变。在有限尺寸的条件下,可以利用分形维度^[58-59]和本征态坐标标准差^[60-61]来表征系统的局域化特性,并且利用分形维度进行标度分析则可讨论尺寸效应对体系局域化性质的影响。分形维度定义为: $\Gamma_n = -\lim_{L \rightarrow \infty} [\ln I_{PR}^{(n)} / \ln L]$, 其中 $I_{PR}^{(n)}$ 为第 n 个归一化本征态 Φ_n 的逆参与率 (inverse participation ratio, 简记为 IPR), $I_{PR}^{(n)} = \sum_{i=1}^L |\Phi_{n,i}|^4$ 。当

Φ_n 为扩展态, IPR 近似为 L^{-1} , L 很大时,它趋近于 0。当 Φ_n 为局域态,热力学极限下 IPR 是 $O(1)$ 量级的有限值。进一步,定义平均分形维度 $\langle \Gamma \rangle = 1/L \sum_{n=1}^L \Gamma_n$, 它可表征体系所有本征态的局域化的完全信息。如果系统处于完全的扩展相区,则 $\langle \Gamma \rangle \rightarrow 1$, 如果系统处于完全的局域相区,则 $\langle \Gamma \rangle \rightarrow 0$, 而如果系统处于扩展与局域态并存的临界相区, $\langle \Gamma \rangle$ 将是一个处于 $(0, 1)$ 间的有限值。作为一个具体的例子,讨论 $\mu_0 = t_1 = \Delta_1 = 0$, $\mu_1 \neq 0$ 的情况,选取周期性边界条件以减小边界效应所带来的影响。图 6(a) 展示了不同能量 ($E_n \geq 0$) 本征态的分形维度随着无序强度 μ_1 的变化情况。可以看到对于弱无序,能谱呈现出中间扩展两边局域的特征,随着无序的增强,低能级缓慢趋向局域态,高能级则较快趋向局域态。为了更加清楚地表征某一能级的局域化特性,图 6(b) 展示了不同能级的 IPR 随无序强度的变化情况。其中红色实线是最低激发态能级 ($n=201$) 的 IPR, 随无序的增强,最低激发态的 IPR 展现了非单调增加的情形,在中等无序时存在先降低再增加的过程。图 6(b) 中黑色虚线和绿色点线则是中间 ($n=301$) 和最高激发态能级 ($n=400$) 的 IPR, 可以看到随着无序强度的增加,中间激发态相较于最高激发态向局域态转变的速率明显要慢。作为表征局域化特性的重要物理量之一的本征态坐标标准

差,被定义为 $\sigma_n = \sqrt{\sum_{i=1}^L (i - \bar{i})^2 |\Phi_{n,i}|^2}$, 其中 $\bar{i} = \sum_{i=1}^L i |\Phi_{n,i}|^2$, 它描述了格点表象下波函数在空间上

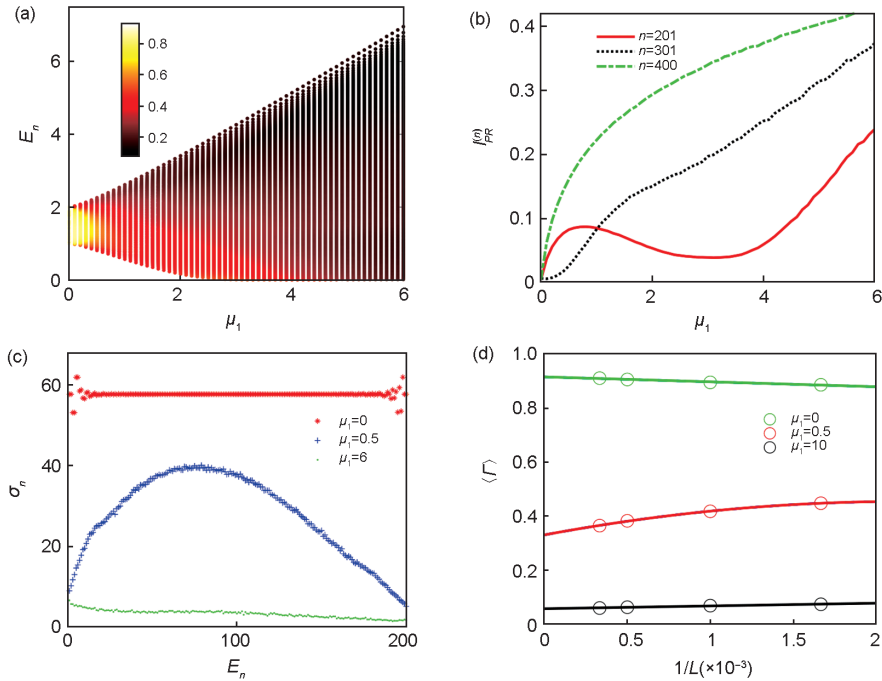


图6 周期性边界条件下具有在位无序效应系统的局域化性质

(a) 分形维度 Γ 随着能量本征值 E_n 和无序强度 μ_1 的变化, 图中颜色代表 Γ 的大小; (b) 不同能级的 IPR 随 μ_1 变化的曲线; (c) 不同无序强度的本征态坐标标准差随 E_n 变化的曲线; (d) 平均分形维度 $\langle \Gamma \rangle$ 的标度分析。这里, $\mu_1 \neq 0, \mu_0 = t_1 = \Delta_1 = 0, t_0 = 1, \Delta_0 = 0.5$ 及 (a) (b) (c) $L = 200$, 选取周期边界条件

Fig. 6 The localization properties of the system with on-site disorder potentials under periodic boundary conditions (a) Fractal dimension Γ of all the eigenstates as a function of energies and μ_1 . The color code represents the values of Γ ; (b) IPR with different energy levels as the function of μ_1 ; (c) The standard deviations of coordinates of eigenstates with different disorder strengths μ_1 as the function of E_n ; (d) The scaling of the averaged fractal dimensions $\langle \Gamma \rangle$ for different V . Here, $\mu_1 \neq 0, \mu_0 = t_1 = \Delta_1 = 0, t_0 = 1, \Delta_0 = 0.5$ and (a) (b) (c) $L = 200$

的扩展, 它和 IPR、分形维度可一并用于区分系统的局域、扩展和临界相。对于扩展态 σ_n 是一个远离 0 的较大值, 对于局域态 σ_n 趋近于零, 而对于临界态 σ_n 则介于二者之间。计算涨落可以更直观地区分三者:

$$g \equiv \sqrt{\sum_n (\sigma_n - \bar{\sigma})^2 / N}, \bar{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_n \sigma_n, \quad (15)$$

其中 N 是本征态的总数。具体所算得的值在下表 1 中给出。可以发现, 对于纯净系统 ($\mu_1 = 0$) 而言, $\bar{\sigma} = 57.71, g$ 的值较小, 这说明 σ_n 一直稳定在 57.71 左右, 这与图 6(c) 中 $\mu_1 = 0$ 的红色星线相符, 此时系统处于扩展区。在强无序 ($\mu_1 = 6$) 情况下, 其 $\bar{\sigma}$ 和 g 的值都较小, 表明 $\bar{\sigma}$ 会一直稳定在一个更接近 0 的有限值 ($\bar{\sigma} = 3.28$), 对应于图 6(c) 中 $\mu_1 = 6$ 的绿色虚线, 此时系统处于局域区。然而当无序强度较弱 ($\mu_1 = 0.5$) 时, $\bar{\sigma}$ 的大小介于以上两种情况之

间, 且 g 的值最大, 即 σ_n 的值处于 27.76 附近并有较大涨落, 与图 6(c) 中 $\mu_1 = 0.5$ 的蓝色十字线一致, 此时系统处于临界区。图 6(d) 利用平均分形维度对具有不同无序强度调制的系统进行了标度分析, 蓝色直线、红色曲线和黑色直线分别为无序强度 $V = 0, 0.5$ 和 10 时, $\langle \Gamma \rangle$ 随尺寸的变化, 可见, 在 $V = 0$ 的纯净情况下, 体系处于 $\langle \Gamma \rangle$ 趋近于 1 的扩展区, 在 $V = 0.5$ 的弱无序情况下, $\langle \Gamma \rangle$ 最终趋近于一个 (0, 1) 的有限值, 此时系统处于临界区, 而在强无序 ($V = 10$) 时, 体系最终将进入 $\langle \Gamma \rangle$ 趋近于零的局域相, 这和有限尺寸下关于体系局域化性质的结论相符。数值结果表明, 由于 Kitaev 模型中存在粒子-空穴对称性导致一维随机无序系统中的局域化性质发生了改变, 在能带中处于不同区域的本征态随着无序强度的增强趋近于局域化态的行为也不尽相同。

表 1 扩展、局域和临界区的本征态坐标标准差的平均值 $\bar{\sigma}$ 和涨落 g

Table 1 The average values $\bar{\sigma}$ and their fluctuations g for extended, localized, and critical regimes

$\mu_0 = t_1 = \Delta_1 = 0$	扩展区	临界区	局域区
	$\mu_1 = 0$	$\mu_1 = 0.5$	$\mu_1 = 6$
$\bar{\sigma}$	57.71	27.76	3.28
g	0.85	10.19	0.96

3 结论

本文通过研究无序效应(包括在位无序效应、跃迁无序效应、超导配对无序效应和这三种无序效应都有的完全无序效应)对 Kitaev 模型的拓扑特性、DOS 和局域化性质的影响,发现这种影响可能会诱发新的拓扑相,也可能使已有的拓扑特性消失。同时通过讨论 DOS 的零能峰与拓扑相图的对应关系,发现单以 DOS 的结果作为拓扑零模存在的证据不具有普适性。这为实验探寻 Majorana 费米子提供了理论依据。最后讨论了具有一维随机在位无序的 Kitaev 模型中由于粒子-空穴对称性的存在所导致的局域化性质的改变。

参考文献:

- [1] MAJORANA E. Teoria Simmetrica Dell'elettrone E Del Positrone[J]. *Nuovo Cim*, 1937, **14**(4): 171-184. DOI: 10.1007/BF02961314.
- [2] SAU J D, TEWARI S, LUTCHYN R, *et al.* Non-abelian Quantum Order in Spin-orbit-coupled Semiconductors: Search for Topological Majorana Particles in Solid-State Systems[J]. *Phys Rev B*, 2010, **82**: 214509. DOI:10.1103/PhysRevB.82.214509.
- [3] MOCHON C. Anyons from Nonsolvable Finite Groups are Sufficient for Universal Quantum Computation[J]. *Phys Rev A*, 2003, **67**(2): 022315. DOI: 10.1103/physreva.67.022315.
- [4] MOCHON C. Anyon Computers with Smaller Groups[J]. *Phys Rev A*, 2004, **69**(3): 032306. DOI: 10.1103/PhysRevA.69.032306.
- [5] MOURIK V, ZUO K, FROLOV S M, *et al.* Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-semiconductor Nanowire Devices[J]. *Science*, 2012, **336**(6084): 1003-1007. DOI: 10.1126/science.1222360.
- [6] SENGUPTA K, ŽUTIĆ I, KWON H J, *et al.* Midgap Edge States and Pairing Symmetry of Quasi-one-dimensional Organic Superconductors[J]. *Phys Rev B*, 2001, **63**(14):

144531. DOI: 10.1103/physrevb.63.144531.
- [7] LAW K T, LEE P A, NG T K. Majorana Fermion Induced Resonant Andreev Reflection[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **103**(23): 237001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.237001.
- [8] LIN C H, SAU J D, DAS SARMA S. Zero-bias Conductance Peak in Majorana Wires Made of Semiconductor/Superconductor Hybrid Structures[J]. *Phys Rev B*, 2012, **86**(22): 224511. DOI: 10.1103/PhysRevB.86.224511.
- [9] PRADA E, SAN-JOSE P, AGUADO R. Transport Spectroscopy of NS Nanowire Junctions with Majorana Fermions[J]. *Phys Rev B*, 2012, **86**(18): 180503. DOI: 10.1103/physrevb.86.180503.
- [10] NICHELE F, DRACHMANN A C C, WHITICAR A M, *et al.* Scaling of Majorana Zero-bias Conductance Peaks [J]. *Phys Rev Lett*, 2017, **119**(13): 136803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.136803.
- [11] LIU J, POTTER A C, LAW K T, *et al.* Zero-bias Peaks in the Tunneling Conductance of Spin-orbit-coupled Superconducting Wires with and without Majorana End-states[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, **109**(26): 267002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.267002.
- [12] KELLS G, MEIDAN D, BROUWER P W. Low-energy Subgap States in Multichannel P-wave Superconducting Wires[J]. *Phys Rev B*, 2012, **85**(6): 060507. DOI: 10.1103/physrevb.85.060507.
- [13] TEWARI S, STANESCU T D, SAU J D, *et al.* Topological Minigap in Quasi-one-dimensional Spin-orbit-coupled Semiconductor Majorana Wires[J]. *Phys Rev B*, 2012, **86**(2): 024504. DOI: 10.1103/physrevb.86.024504.
- [14] KITAEV A. Unpaired Majorana Fermions in Quantum Wires[J]. *Phys Usp*, 2001, **44**: 131. DOI: 10.1070/10637869/44/10S/S29.
- [15] QIN W, ZHANG Z Y. Persistent Ferromagnetism and Topological Phase Transition at the Interface of a Superconductor and a Topological Insulator[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, **113**(26): 266806. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.266806.
- [16] CHEN J, WOODS B D, YU P, *et al.* Ubiquitous Non-Majorana Zero-bias Conductance Peaks in Nanowire Devices[J]. *Phys Rev Lett*, 2019, **123**(10): 107703. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.107703.
- [17] YU P, CHEN J, GOMANKO M, *et al.* Non-Majorana States Yield nearly Quantized Conductance in Proximitized Nanowires[J]. *Nat Phys*, 2021, **17**(4): 482-488. DOI: 10.1038/s41567-020-01107-w.
- [18] PUGLIA D, MARTINEZ E A, MÉNARD G C, *et al.* Closing of the Induced Gap in a Hybrid Superconductor-semiconductor Nanowire[J]. *Phys Rev B*, 2021, **103**(23): 235201. DOI: 10.1103/physrevb.103.235201.
- [19] BAGRETS D, ALTLAND A. Class D Spectral Peak in

- Majorana Quantum Wires[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, **109**(22): 227005. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.227005.
- [20] PIKULIN D I, DAHLHAUS J P, WIMMER M, *et al.* A Zero-voltage Conductance Peak from Weak Antilocalization in a Majorana Nanowire[J]. *New J Phys*, 2012, **14**(12): 125011. DOI: 10.1088/1367-2630/14/12/125011.
- [21] HUANG Y Y, SAU J D, STANESCU T D, *et al.* Quasiparticle Gaps in Multiprobe Majorana Nanowires[J]. *Phys Rev B*, 2021, **98**(22): 224512. DOI: 10.1103/physrevb.98.224512.
- [22] KITAEV A Y. Fault-tolerant Quantum Computation by Anyons[J]. *Ann Phys*, 2003, **303**(1): 2–30. DOI: 10.1016/S0003-4916(02)00018-0.
- [23] 武璟楠, 徐志浩, 陆展鹏, 等. 一维化学势调制的p波超导体中的拓扑量子相变[J]. *物理学报*, 2020, **69**(7): 070302. DOI: 10.7498/aps.69.20191868.
WU J N, XU Z H, LU Z P, *et al.* Topological Quantum Phase Transitions in One-dimensional P-wave Superconductors with Modulated Chemical Potentials[J]. *Acta Phys Sin*, 2020, **69**(7): 070302. DOI: 10.7498/aps.69.20191868.
- [24] CAI X M. Phase Diagram of the Incommensurate Off-diagonal Aubry-André Model with P-wave Pairing[J]. *J Phys Condens Matter*, 2018, **30**(34): 345601. DOI: 10.1088/1361-648X/aad3ef.
- [25] YAHYAVI M, HETÉNYI B, TANATAR B. Generalized Aubry-André-harper Model with Modulated Hopping and P-wave Pairing[J]. *Phys Rev B*, 2019, **100**(6): 064202. DOI: 10.1103/physrevb.100.064202.
- [26] CAI X M, LANG L J, CHEN S, *et al.* Topological Superconductor to Anderson Localization Transition in One-dimensional Incommensurate Lattices[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **110**(17): 176403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.176403.
- [27] PAN H N, DAS SARMA S. Disorder Effects on Majorana Zero Modes: Kitaev Chain Versus Semiconductor Nanowire[J]. *Phys Rev B*, 2021, **103**(22): 224505. DOI: 10.1103/physrevb.103.224505.
- [28] LEVY L, GOLDSTEIN M. Entanglement and Disordered-enhanced Topological Phase in the Kitaev Chain[J]. *Universe*, 2019, **5**(1): 33. DOI: 10.3390/universe5010033.
- [29] GERGS N M, FRITZ L, SCHURICHT D. Topological Order in the Kitaev/Majorana Chain in the Presence of Disorder and Interactions[J]. *Phys Rev B*, 2016, **93**(7): 075129. DOI: 10.1103/physrevb.93.075129.
- [30] MISHRA U, JAFARI R, AKBARI A. Disordered Kitaev Chain with Long-range Pairing: Loschmidt Echo Revivals and Dynamical Phase Transitions[J]. *J Phys A*, 2020, **53**(37): 375301. DOI: 10.1088/1751-8121/ab97de.
- [31] ZHANG C H, SHENG L, XING D Y. Non-hermitian Disorder-driven Topological Transition in a Dimerized Kitaev Superconductor Chain[J]. *Phys Rev B*, 2021, **103**(22): 224207. DOI: 10.1103/physrevb.103.224207.
- [32] MCGINLEY M, KNOLLE J, NUNNENKAMP A. Robustness of Majorana Edge Modes and Topological Order: Exact Results for the Symmetric Interacting Kitaev Chain with Disorder[J]. *Phys Rev B*, 2017, **96**(24): 241113. DOI: 10.1103/physrevb.96.241113.
- [33] HUA C B, CHEN R, XU D H, *et al.* Disorder-induced Majorana Zero Modes in a Dimerized Kitaev Superconductor Chain[J]. *Phys Rev B*, 2019, **100**(20): 205302. DOI: 10.1103/physrevb.100.205302.
- [34] PAN H N, DAS SARMA S. On-demand Large Conductance in Trivial Zero-bias Tunneling Peaks in Majorana Nanowires[J]. *Phys Rev B*, 2022, **105**(11): 115432. DOI: 10.1103/physrevb.105.115432.
- [35] LIU T, YAN H Y, GUO H. Fate of Topological States and Mobility Edges in One-dimensional Slowly Varying Incommensurate Potentials[J]. *Phys Rev B*, 2017, **96**(17): 174207. DOI: 10.1103/physrevb.96.174207.
- [36] DAS SARMA S, HE S, XIE X C. Localization, Mobility Edges, and Metal-insulator Transition in a Class of One-dimensional Slowly Varying Deterministic Potentials[J]. *Phys Rev B*, 1990, **41**(9): 5544–5565. DOI: 10.1103/physrevb.41.5544.
- [37] PENG L, YUAN Y, LI G, *et al.* Observation of Topological States Residing at Step Edges of WTe₂[J]. *Nat Commun*, 2017, **8**(1): 659. DOI: 10.1038/s41467-017-00745-8.
- [38] LANG L J, CHEN S. Majorana Fermions in Density-modulated P-wave Superconducting Wires[J]. *Phys Rev B*, 2012, **86**(20): 205135. DOI: 10.1103/physrevb.86.205135.
- [39] LIEB E, SCHULTZ T, MATTIS D. Two Soluble Models of an Antiferromagnetic Chain[J]. *Ann Phys*, 1961, **16**(3): 407–466. DOI: 10.1016/0003-4916(61)90115-4.
- [40] DAS A, RONEN Y, MOST Y, *et al.* Zero-bias Peaks and Splitting in an Al-InAs Nanowire Topological Superconductor as a Signature of Majorana fermions[J]. *Nat Phys*, 2012, **8**(12): 887–895. DOI: 10.1038/nphys2479.
- [41] DENG M T, YU C L, HUANG G Y, *et al.* Anomalous Zero-bias Conductance Peak in a Nb-InSb Nanowire-Nb Hybrid Device[J]. *Nano Lett*, 2012, **12**(12): 6414–6419. DOI: 10.1021/nl303758w.
- [42] CHURCHILL H O H, FATEMI V, GROVE-RASMUSSEN K, *et al.* Superconductor-nanowire Devices from Tunneling to the Multichannel Regime: Zero-bias Oscillations and Magnetoconductance Cross-over[J]. *Phys Rev B*, 2013, **87**(24): 241401. DOI:

- 10.1103/physrevb.87.241401.
- [43] FINCK A K, VAN HARLINGEN D J, MOHSENI P K, *et al.* Anomalous Modulation of a Zero-bias Peak in a Hybrid Nanowire-superconductor Device[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **110**(12): 126406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.126406.
- [44] 徐慧. 准一维无序系统的电子结构[J]. 计算物理, 1997, **14**(4): 574-576. DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.1997.z1.069.
- XU H. The Electronic Structure of Quasi one Dimensional Disorderd System[J]. *Chin J Comput Phys*, 1997, **14**(4): 574-576. DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.1997.z1.069.
- [45] AKHMEROV A R, DAHLHAUS J P, HASSLER F, *et al.* Quantized Conductance at the Majorana Phase Transition in a Disordered Superconducting Wire[J]. *Phys Rev Lett*, 2011, **106**(5): 057001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.057001.
- [46] FULGA I C, HASSLER F, AKHMEROV A R, *et al.* Scattering Formula for the Topological Quantum Number of a Disordered Multimode Wire[J]. *Phys Rev B*, 2011, **83**(15): 155429. DOI: 10.1103/physrevb.83.155429.
- [47] ZHANG P, NORI F. Majorana Bound States in a Disordered Quantum Dot Chain[J]. *New J Phys*, 2016, **18**(4): 043033. DOI: 10.1088/1367-2630/18/4/043033.
- [48] MOTRUNICH O, DAMLE K, HUSE D A. Griffiths Effects and Quantum Critical Points in Dirty Superconductors without Spin-rotation Invariance: One-dimensional Examples[J]. *Phys Rev B*, 2001, **63**(22): 224204. DOI: 10.1103/physrevb.63.224204.
- [49] DEGOTTARDI W, THAKURATHI M, VISHVESHWARA S, *et al.* Majorana Fermions in Superconducting Wires: Effects of Long-range Hopping, Broken Time-reversal Symmetry, and Potential Landscapes[J]. *Phys Rev B*, 2013, **88**(16): 165111. DOI: 10.1103/physrevb.88.165111.
- [50] DEGOTTARDI W, SEN D, VISHVESHWARA S. Majorana Fermions in Superconducting 1D Systems Having Periodic, Quasiperiodic, and Disordered Potentials [J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **110**(14): 146404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.146404.
- [51] HEGDE S S, VISHVESHWARA S. Majorana Wavefunction Oscillations, Fermion Parity Switches, and Disorder in Kitaev Chains[J]. *Phys Rev B*, 2016, **94**(11): 115166. DOI: 10.1103/physrevb.94.115166.
- [52] DEGOTTARDI W, SEN D, VISHVESHWARA S. Topological Phases, Majorana Modes and Quench Dynamics in a Spin Ladder System[J]. *New J Phys*, 2011, **13**(6): 065028. DOI: 10.1088/1367-2630/13/6/065028.
- [53] 宋招权, 徐慧, 李燕峰, 等. 非对角无序和维数效应对低维无序系统电子结构的影响[J]. 物理学报, 2005, **54**(5): 2198-2201. DOI: 10.7498/aps.54.2198.
- SONG Z Q, XU H, LI Y F, *et al.* The Effects of Non-diagonal Disorder and Dimensions in Low-dimensional Disordered Electronic System[J]. *Acta Phys Sin*, 2005, **54**(5): 2198-2201. DOI: 10.7498/aps.54.2198.
- [54] 宋招权, 徐慧, 刘小良, 等. 准一维三平行链无序系统电子结构[J]. 计算物理, 2005, **22**(1): 51-55. DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.2005.01.008.
- SONG Z Q, XU H, LIU X L, *et al.* The Electronic Structure of Quasi-one-dimensional Disordered Systems with Three Parallel Chains[J]. *Chin J Comput Phys*, 2005, **22**(1): 51-55. DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.2005.01.008.
- [55] 马松山. 无序体系电子输运中无序作用机理研究[D]. 长沙: 中南大学, 2004: 10-17.
- MA S S. Study on the Mechanism of Disorder in Electron Transport in Disordered System[D]. Changsha: Central South University, 2004: 10-17.
- [56] 冯立峰. 无序系统 Anderson 模型的蒙特卡罗模拟研究[D]. 长春: 东北师范大学, 2007: 4-5.
- FENG L F. Monte Carlo simulation of Anderson model of disordered system[D]. Changchun: Northeast Normal University, 2007: 4-5.
- [57] MONDRAGON-SHEM I, HUGHES T L, SONG J T, *et al.* Topological Criticality in the Chiral-symmetric AIII Class at Strong Disorder[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, **113**(4): 046802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.046802.
- [58] WANG Y C, XIA X, ZHANG L, *et al.* One-dimensional Quasiperiodic Mosaic Lattice with Exact Mobility Edges[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(19): 196604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.196604.
- [59] ROY N, SHARMA A. Fraction of Delocalized Eigenstates in the Long-range Aubry-andré-harper Model[J]. *Phys Rev B*, 2021, **103**(7): 075124. DOI: 10.1103/physrevb.103.075124.
- [60] ZHANG Y C, ZHANG Y Y. Lyapunov Exponent, Mobility Edges, and Critical Region in the Generalized Aubry-André Model with an Unbounded Quasiperiodic Potential[J]. *Phys Rev B*, 2022, **105**(17): 174206. DOI: 10.1103/physrevb.105.174206.
- [61] BOERS D J, GOEDEKE B, HINRICHS D, *et al.* Mobility Edges in Bichromatic Optical Lattices[J]. *Phys Rev A*, 2007, **75**(6): 063404. DOI: 10.1103/physreva.75.063404.