

三周期量子行走的布洛赫振荡及拓扑特性

李小萍*,李志坚

(山西大学 理论物理研究所,山西 太原 030006)

摘要:本文推广一维无限长格点线上三周期量子行走模型,引入两个非对称相位累积算符,计算系统的能带结构和表征系统拓扑特性的绕数,用量子行走过程中累积的相位表示出绕数。进一步引入含时相位,研究三周期量子行走的动力学,发现其概率分布表现出类似一维晶格中电子在电场作用下的布洛赫振荡行为。特别地,三周期量子行走的拓扑绕数与布洛赫振荡一个周期内的转折点数相等,从系统动力学演化的角度表征了系统的拓扑特性。

关键词:量子行走;布洛赫振荡;拓扑特性

中图分类号:O436

文献标志码:A

文章编号:0253-2395(2024)04-0786-06

The Bloch Oscillation and Topological Properties of Three-period Quantum Walk

LI Xiaoping*, LI Zhijian

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: In this work, the three-period quantum walk model on one-dimensional infinite lattice line is extended to include two asymmetric phase-accumulating operators. The energy band structure and the winding number, which characters the topological properties of the system, are calculated. The winding number is represented by the phase accumulation in the process of quantum walk. Furthermore, we introduce the time-dependent phase and investigate the dynamics of three-period quantum walk. It is found that the probability distribution behaves Bloch oscillation as that an electron subjected to a constant electric field in a one-dimensional lattice. In particular, the topological winding number of three-period quantum walk is equal to the number of turning points over a period of Bloch oscillation. As a conclusion, the topological properties of the system can be viewed from the point of system dynamical evolution.

Key words: quantum walk; Bloch oscillation; topological properties

0 引言

经典随机行走是对在空间区域中无规则运动的一种描述,如布朗运动等,其意义远不仅仅在于对物理系统行为的描述,在信息、生物等其他领域也有着非常重要的应用。量子行走是经典随机行走的量子力学推广^[1-3],其概念一被提出,其物理行为和相关应用就受到人们的持续关注和广泛研究。量子态的叠加和干涉效应使得量子行走表现出与经典随机行走不同的动力学行为,特别是在位置空间中具有更快的传播速度,从经典的扩散行为变为了量子的弹道传输行为。量子行走分为连续时间量子行走^[1]和离散时间量子行走^[2]两种不同的形式,本文的研究对象的是离散时间

收稿日期:2023-03-01;接受日期:2023-04-04

基金项目:国家自然科学基金(12147215)

* 通信作者:李小萍(1996-),女,山西太原人,硕士研究生,研究方向为量子行走。E-mail:2778593064@qq.com

引文格式:李小萍,李志坚.三周期量子行走的布洛赫振荡及拓扑特性[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):786-791. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023079

量子行走。

基于量子行走比经典随机行走表现出的一些优越特性,其不仅作为有效载体与平台实现量子算法,用于量子信息和量子计算领域,而且被用来模拟多体物理体系的量子行为。近年来,利用量子行走模拟物理系统的拓扑性质受到人们的广泛研究^[4-5],构造人造系统模拟复杂的真实物理系统的拓扑特性成为热点课题,例如通过调制一维或二维离散时间量子行走中硬币算符的参数来实现拓扑相的分类。与传统相变不同,拓扑相变通过拓扑绕数来表征^[6-9],一般情况下,上下两条能带闭合处会对应拓扑相变的临界点。在周期量子行走中^[10-13],系统的两条能带在结构上相互交替。在变化参数的一个周期内,能带的交替次数也可以表征能带的拓扑特性^[14-15]。可以想象,能带的交替会影响系统的动力学行为,从动力学的角度去寻找刻画系统拓扑特性的指标成为一个非常有趣的课题。此外,一维格点系统中的量子行走也被应用在重力精密测量中,利用多粒子在重力作用下的量子关联现象实现多粒子的共同量子行走,在重力作用下量子行走同样会表现出布洛赫振荡行为,以此提高重力测量的精度^[16]。本文以一维无限长格点线上的三周期量子行走模型为例,通过计算系统的拓扑绕数,给出系统动力学演化过程中的概率分布,获得了周期量子行走的拓扑性质和行走过程的动力学演化行为之间的关系。

1 模型

离散时间的量子行走一般选择定义在位置和硬币双重希尔伯特直积空间 $\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c$ 上,其中位置希尔伯特空间 \mathcal{H}_p 由基矢 $\{|l\rangle, l \in \mathbb{Z}\}$ 张开,硬币希尔伯特空间 \mathcal{H}_c 由粒子的内禀态也就是硬币态 $\{|\sigma\rangle, \sigma = \uparrow, \downarrow\}$ 张开, $|\uparrow\rangle = (1, 0)^T$ 和 $|\downarrow\rangle = (0, 1)^T$ 分别表示量子硬币的正面态和反面态。离散时间量子行走由幺正算符 U 描述,通常意义下单步演化算符 U 由硬币算符 C 和条件平移算符 S 相继作用构成,即 $U = SC(\theta)$ 。硬币算符的表示形式是 $C(\theta) = I_l \otimes R(\theta)$,其中 I_l 是位置空间 $\{|l\rangle\}$ 的单位算符, $R(\theta)$ 是硬币空间 $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ 中的旋转算符^[17-18],一般情况下单参量形式的旋转算符形式为

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

根据粒子的内部状态,在上述物理条件下,粒子具有的一维无限长格点线上位置空间中移动的条件平移算符为

$$S = \sum_l |l+1\rangle \langle l| \otimes |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + \sum_l |l-1\rangle \langle l| \otimes |\downarrow\rangle \langle \downarrow|. \quad (2)$$

在此基础上本文引入了相位算符,定义粒子(波包)在位置空间移动的过程中量子相位的累积,其相位算符的具体定义为当粒子向左移动一步时积累相位 ϕ ($\phi \in \mathbb{R}$),而向右移动时不积累相位,相位算符 P 的形式表示如下

$$P(\phi) = I_l \otimes (|\uparrow\rangle \langle \uparrow| + e^{i\phi} |\downarrow\rangle \langle \downarrow|), \quad (3)$$

相当于单步演化算符 U 的形式就变为 $U = P(\phi)SC(\theta)$ 。与单步演化量子行走不同,本文的周期量子行走是指行走者在每个时间步中移动两次或两次以上,可以通过多次硬币旋转、条件平移和相位累积来定义。本文引入两个不同的硬币算符 $C(\theta_1)$ 和 $C(\theta_2)$ 与两个不同的相位算符 $P(\phi_1)$ 和 $P(\phi_2)$ 来描述周期量子行走。一般地, n 周期量子行走的一步演化算符表示为

$$U_n = (P(\phi_2)SC(\theta_2))^{n-1} P(\phi_1)SC(\theta_1), \quad (4)$$

若相位算符或硬币算符中的参数 ϕ 或 θ 与时间无关,则行走 t 步后粒子的波函数为

$$\psi(t) = U_n^t \psi(0), \quad (5)$$

若参数与时间有关,则为

$$\psi(t) = U_n(t)U_n(t-1)\cdots U_n(2)U_n(1)\psi(0). \quad (6)$$

2 三周期量子行走的拓扑特性

为了研究三周期量子行走的拓扑特性,探讨其与行走过程中累积相位之间的关系,首先需要计算系统的能带结构,然后给出能带拓扑不变量。令相位的表达式为 $\phi_1 = m_1\phi, \phi_2 = m_2\phi$,且要求 $m_1, m_2 \in \mathbb{Q}$,考虑到量子行走无限长一维格点线上的演化算符 U_3 在位置空间中具有平移不变性,对其进行傅里叶变换, $U_3 = \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \langle k| \otimes U_3(k, \phi)$,得到动量空间的演化算符 $U_3(k, \phi)$,该算符依赖于动量 k 和相位 ϕ ,表达式为

$$U_3(k, \phi) = P(\phi_2)SC(\theta_2)P(\phi_2)SC(\theta_2)P(\phi_1)SC(\theta_1), \quad (7)$$

相应的特征值 $\lambda = e^{i\epsilon_{\pm}}$, ϵ_{\pm} 为

$$\begin{aligned} \epsilon_{\pm} = \pm \arccos \{ & \cos [3k - (\phi_2 + \frac{\phi_1}{2})] \cos^2 \theta_2 \cos \theta_1 - \cos(k - \frac{\phi_1}{2}) \sin^2 \theta_2 \cos \theta_1 - \\ & \cos [k - (\phi_2 - \frac{\phi_1}{2})] \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 - \cos(k - \frac{\phi_1}{2}) \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 \} + \phi_2 + \frac{\phi_1}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

当相位 ϕ_1 和 ϕ_2 满足关系 $\phi_2 + \frac{\phi_1}{2} = 0$ 时,我们注意到 $U_3(k, \phi)$ 具有了广义反转对称性^[19],即 $U_3(k, \phi)$ 满足等式 $U_3(k, \phi) = \sigma_x U_3(-k, -\phi) \sigma_x$ (这里的 σ_x 就是泡利矩阵)。此时,准能带 ϵ_{\pm} 为上下两支,给出了当 $k=0$,准能带随相位 ϕ 的变化,如图1(a)所示。而当相位 ϕ_1 和 ϕ_2 不满足关系 $\phi_2 + \frac{\phi_1}{2} = 0$ 时, $U_3(k, \phi)$ 的广义反转对称性破缺使能带 ϵ_{\pm} 呈现出相互缠绕特性,如图1(b)所示。能带的缠绕特性表明本文研究的系统中周期演化算符的能带具有拓扑性质,计算准能带沿 ϕ 的绕数表达式为

$$\omega(\phi) \equiv \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Phi} d\phi \frac{\partial \epsilon_n(k, \phi)}{\partial \phi}, \quad (9)$$

其中, 2π 是准能量的周期, Φ 是相位 ϕ 的周期,即 $\epsilon(k, \phi + \Phi) = \epsilon(k, \phi)$, N 为能带数,对于我们研究

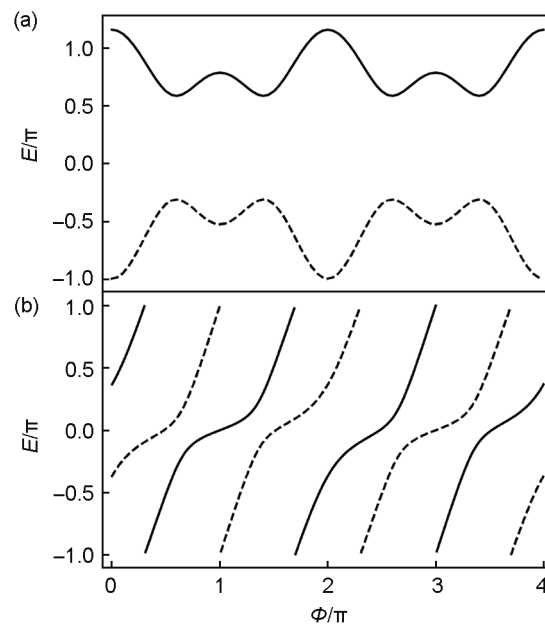


图1 三周期量子行走的能谱图

选取硬币参数 $\theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4 - 0.6$,两个相位的关系为(a) $\phi_1 = -2\phi$ 和 $\phi_2 = \phi$, (b) $\phi_1 = \phi_2 = \phi$

Fig. 1 The energy spectrum of a three-period quantum walk

The coin parameters are $\theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4 - 0.6$, the two phases are $\phi_1 = -2\phi$ and $\phi_2 = \phi$ for subgraph (a), and $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ for subgraph (b)

的三周期量子行走,能带数 $N=2$ 。考虑到 $\phi_1 = m_1\phi$ 和 $\phi_2 = m_2\phi$,由方程(8)可以看出 ϵ_{\pm} 是 ϕ 的周期函数,周期为 $\Phi = 4\pi LCM[m_1^{-1}, (2m_2 - m_1)^{-1}, (2m_2 + m_1)^{-1}]$ 。因此,(9)式可简化为

$$\omega(\phi) = \frac{\Phi}{2\pi} (m_1 + 2m_2). \tag{10}$$

上式表明,在相位周期 Φ 确定的情况下,绕数 $\omega(\phi)$ 与 m_1 和 m_2 的取值有关。例如,在图 1(b)中我们取 $m_1 = 1, m_2 = 1$,得到相位周期 $\Phi = 4\pi$,绕数 $\omega(\phi) = 6$,从图中可以看出两条能带 ϵ_+ 和 ϵ_- 在一个周期内各自折返了 3 次。

3 三周期量子行走的动力学

现在,我们考虑相位随时间变化的情况,探讨演化算符依赖于演化步数的含时三周期量子行走的动力学演化行为。当累积相位随时间在一个周期内缓慢变化时,可以等效为给一个物理系统施加了一个恒定电场,在这个电场的作用下,波包在晶格上扩散的动力学演化将表现出布洛赫振荡行为。在我们的量子行走模型中,准能带的缠绕就会缓慢地增加相位 ϕ ,位置空间中的波包演化是否也类似地产生布洛赫振荡行为是我们接下来要探讨的问题。我们将相位随时间变化形式表示为

$$\phi(t) = \rho_0 t, \tag{11}$$

这里, ρ_0 是一个常系数,我们取 $\rho_0 = \pi/300$ 。与时间或演化步骤相关的三周期量子行走演化算符为

$$U_3(t) = P_2(t)SC(\theta_2)P_2(t)SC(\theta_2)P_1(t)SC(\theta_1), \tag{12}$$

仍然令相位算符为 $\phi_1(t) = m_1\phi(t)$ 和 $\phi_2(t) = m_2\phi(t)$,由方程(6)可计算得到波包在一维格点上的分布概率为

$$p(l, t) = \sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} |\langle l, \sigma | \psi(t) \rangle|^2. \tag{13}$$

为了更好地理解含时相位算符对量子行走动力学演化的影响和更加直观地体现该过程中布洛赫振荡的拓扑特性,我们仍选取 $k=0$,且量子行走的初始状态为中心位置处于 n_0 处的高斯波包,即

$$\psi(l, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(l-n_0)^2}{(2\sigma_0)^2}}, \tag{14}$$

选取高斯态的标准差 σ_0 的值为 5,固定硬币参数 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{4} - 0.6$,图 2(a-c)分别给出当(a) $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi(t)$ 、(b) $\phi_1(t) = 2\phi(t), \phi_2(t) = \phi(t)$ 和 (c) $\phi_1(t) = \phi(t), \phi_2(t) = 2\phi(t)$ 时一个周期 $T = \frac{\Phi}{\rho_0}$ 内的演化概率分布。图 2(a)中 ϕ_1 和 ϕ_2 之间的关系和图 1(b)能带图中二者的关系一样,能带的绕数为 6,从图 2(a)中可以看到一个周期内演化过程中概率分布图的转折点数目也是 6。图 2(b)和(c)中一个周期内演化的转折点个数分别为 8 和 10,把相应的 ϕ_1 和 ϕ_2 之间的关系代入方程(10)得到的绕数值也分别为 8 和 10。该结果表明,绕数值和概率分布随时间演化过程中一个周期内的转折点个数是一致的。时间相关的相位变化导致了三周期量子行走概率分布的布洛赫振荡,振荡转折点的出现是由于在相位 ϕ 随时间的缓慢增加过程中,描述量子行走量子态波包的群速度方向会发生改变。从方程(8)可以得到,固定 k 值,当相位 ϕ 随时间缓慢增加时,波包会在位置空间扩散。其扩散的群速度为

$$v_k = \frac{\partial \epsilon(k, \phi)}{\partial k} = -\frac{\cos \theta_1 (\sin \theta_2^2 \sin A - 3\cos \theta_2^2 \sin B) + \sin \theta_1 \sin 2\theta_2 \cos C \sin D}{\sqrt{1 - (\cos \theta_1 (\sin \theta_2^2 \cos A - \cos \theta_2^2 \cos B) + \sin \theta_1 \sin 2\theta_2 \cos C \cos D)^2}},$$

上式中 $A = k - \frac{m_1}{2}\phi, B = 3k - (\frac{m_1}{2} + m_2)\phi, C = (\frac{m_1 - m_2}{2})\phi, D = k - \frac{m_2}{2}\phi$ 。相应的波包质心运

动轨迹为

$$S(t, k) = \rho_0 \int_0^t d\tau \mathcal{D}_k(\phi(t), k), \quad (15)$$

质心运动轨迹的形状和波包的概率分布曲线走向基本一致,表明波包概率分布图中的转折点的数目与质心运动轨迹的转折点数目等同。波包质心运动轨迹的转折点处正是群速度消失的位置,因此可以通过求解方程 $\frac{dS}{dt} = 0$ 时获得相位 ϕ 的解的个数来得到转折点的数量。选取 $k = 0$,把方程(8)和

(15)代入方程 $\frac{dS}{dt} = 0$,化简得 $\sin[\frac{m_1}{2}\phi] + \sin[(-\frac{m_1}{2} + m_2)\phi] + \sin[(\frac{m_1}{2} + m_2)\phi] = 0$,该式相当于

$$\frac{m_1}{2}\phi = j\pi, \left(m_2 - \frac{m_1}{2}\right)\phi = j\pi, j \in Z, \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)\phi = j\pi, \quad (16)$$

那么相位 ϕ 满足它们的共同解为最小公倍数 $\phi = 2j\pi \text{LCM}[m_1^{-1}, (2m_2 - m_1)^{-1}, (2m_2 + m_1)^{-1}]$,即 $\phi = 2j\pi(2m_2 + m_1)^{-1}$,再结合方程(10)可得如下关系式

$$\phi = j \frac{\Phi}{\omega(\phi)}. \quad (17)$$

因此,当相位 ϕ 在一个周期 Φ 内随时间增加时, j 的取值个数就是 $\omega(\phi)$,也是满足方程(16)的解的个数或转折点个数为 $\omega(\phi)$ 。

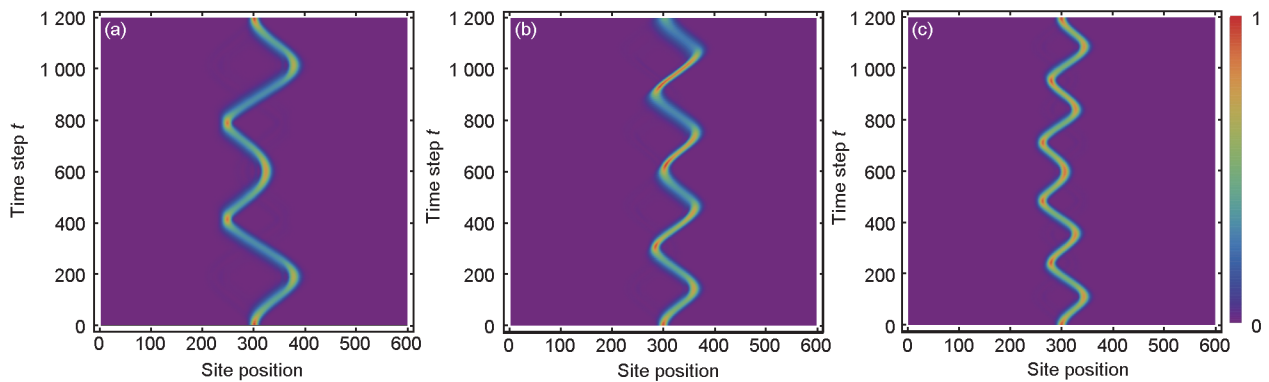


图2 三周期量子行走概率分布随演化步数的变化图,其中选取 $\theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4 - 0.6$ 和 $\phi = \pi/300$

(a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi$; (b) $\phi_1 = 2\phi, \phi_2 = \phi$; (c) $\phi_1 = \phi, \phi_2 = 2\phi$

Fig. 2 The dynamical variation of the probability distribution for the three-period quantum walk. The parameters are selected as

$\theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4 - 0.6$ and $\phi = \pi/300$

(a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi$; (b) $\phi_1 = 2\phi, \phi_2 = \phi$; (c) $\phi_1 = \phi, \phi_2 = 2\phi$

一般地,布洛赫振荡现象是指电子在一维晶格中运动时受到均匀电场的影响,电子波函数在位置空间表现出的随时间振荡的现象。本文研究三周期量子行走在一维格点线上的动力学行为,施加了相位算符作用,累积相位 ϕ 与演化时间步长有关,累积相位 ϕ 相当于是等效磁矢势, $\rho_0 = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$ 则相当于等效电场。我们看到周期量子行走表现出类似的布洛赫振荡行为,振荡的转折点数目可以作为拓扑不变量描述周期量子行走的拓扑特性。

4 结论

本文建立了一维无限长格点线上的三周期量子行走模型,计算出系统的能带结构和拓扑不变量,获得了表征三周期量子行走拓扑特性的绕数与行走过程中累积相位之间的关系。然后引入含时相位,研究了依赖于演化步数的含时三周期量子行走的动力学演化行为,含时相位相当于电磁

场中的磁矢势,类似于—维晶格中的电子在电场中的运动,量子行走在位置空间中的概率分布表现出布洛赫振荡行为,发现三周期量子行走的拓扑绕数与一个周期内布洛赫振荡的转折点数相等,从系统动力学演化的角度表征了系统的拓扑特性。本文研究了一维格点线上三周期量子行走拓扑数和概率分布转折点数目之间的关系,我们可预言一般多周期量子行走模型也可能具有类似的结果,在之后的工作中将做进一步的讨论。

参考文献:

- [1] AHARONOV Y, DAVIDOVICH L, ZAGURY N. Quantum Random Walks[J]. *Phys Rev A*, 1993, **48**(2): 1687–1690. DOI: 10.1103/physreva.48.1687.
- [2] FARHI E, GUTMANN S. Quantum Computation and Decision Trees[J]. *Phys Rev A*, 1998, **58**(2): 915–928. DOI: 10.1103/physreva.58.915.
- [3] VENEGAS-ANDRACA S E. Quantum Walks: A Comprehensive Review[J]. *Quantum Inf Process*, 2012, **11**(5): 1015–1106. DOI: 10.1007/s11128-012-0432-5.
- [4] FIDKOWSKI L, KITAEV A. Topological Phases of Fermions in one Dimension[J]. *Phys Rev B*, 2011, **83**(7): 075103. DOI: 10.1103/physrevb.83.075103
- [5] QI X L, ZHANG S C. Topological Insulators and Superconductors[J]. *Rev Mod Phys*, 2011, **83**(4): 1057–1110. DOI: 10.1103/revmodphys.83.1057.
- [6] ADIYATULLIN A F, UPRETI L K, LECHEVALIER C, *et al.* Topological Properties of Floquet Winding Bands in a Photonic Lattice[J]. *Phys Rev Lett*, 2023, **130**(5): 056901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.130.056901.
- [7] LI H S, WAN S L. Dynamic Skin Effects in Non-hermitian Systems[J]. *Phys Rev B*, 2022, **106**(24): L241112. DOI: 10.1103/physrevb.106.l241112.
- [8] ZHANG J, ZHANG Z Q, CHENG S G, *et al.* Topological Anderson Insulator *via* Disorder-recovered Average Symmetry[J]. *Phys Rev B*, 2022, **106**(19): 195304. DOI: 10.1103/physrevb.106.195304.
- [9] GAO H, XUE H R, GU Z M, *et al.* Anomalous Floquet Non-hermitian Skin Effect in a Ring Resonator Lattice [J]. *Phys Rev B*, 2022, **106**(13): 134112. DOI: 10.1103/physrevb.106.134112.
- [10] LEI F C, YE Z C, TWAYANA K, *et al.* Hyperparametric Oscillation *via* Bound States in the Continuum[J]. *Phys Rev Lett*, 2023, **130**(9): 093801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.130.093801.
- [11] ZHANG H X, CHEN T, LI L H, *et al.* Electrical Circuit Realization of Topological Switching for the Non-hermitian Skin Effect[J]. *Phys Rev B*, 2023, **107**(8): 085426. DOI: 10.1103/physrevb.107.085426.
- [12] PETIZIOL F, ECKARDT A. Cavity-based Reservoir Engineering for Floquet-engineered Superconducting Circuits[J]. *Phys Rev Lett*, 2022, **129**(23): 233601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.233601.
- [13] SUN Y N, LV J P. Quantum Extraordinary-log Universality of Boundary Critical Behavior[J]. *Phys Rev B*, 2022, **106**(22): 224502. DOI: 10.1103/physrevb.106.224502.
- [14] BANERJEE A, LESSER O, RAHMAN M A, *et al.* Local and Nonlocal Transport Spectroscopy in Planar Josephson Junctions[J]. *Phys Rev Lett*, 2023, **130**(9): 096202. DOI: 10.1103/physrevlett.130.096202.
- [15] SUI X L, WANG J F, CHEN C, *et al.* Hole Doping Dependent Electronic Instability and Electron-phonon Coupling in Infinite-layer Nickelates[J]. *Phys Rev B*, 2023, **107**(7): 075159. DOI: 10.1103/physrevb.107.075159.
- [16] CAI X M, YANG H T, SHI H L, *et al.* Multiparticle Quantum Walks and Fisher Information in One-dimensional Lattices[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **127**(10): 100406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.100406.
- [17] JIA Y L, LI Z J. High Winding Number of Topological Phase in Non-unitary Periodic Quantum Walk[J]. *Chin Phys B*, 2021, **30**(10): 100301. DOI: 10.1088/1674-1056/abf554.
- [18] 李洁, 李志坚. 一维非幺正分离时间量子行走的拓扑特性的检测[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2019, **42**(3): 562–567. DOI: 10.13451/j.cnki.shanxi.univ(nat. sci.).2019.01.11.007.
- LI J, LI Z J. Detection of the Topological Properties of One-Dimensional Non-Unitary Discrete-time Quantum Walks [J]. *J Shanxi Univ (nat. sci.)*, 2019, **42**(3): 562–567. DOI: 10.13451/j.cnki.shanxi.univ(nat. sci.).2019.01.11.007.
- [19] UPRETI L K, EVAÏN C, RANDOUX S, *et al.* Topological Swing of Bloch Oscillations in Quantum Walks[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(18): 186804. DOI: 10.1103/physrevlett.125.186804.