

Bell态的局域复制

黄晓君,李艳娜*

(山西大学 理论物理研究所,山西 太原 030006)

摘要: Bell态是量子信息的关键要素,其量子复制与许多重要的信息处理任务密切相关。本文提出一种简单的利用局域操作、经典通讯并引入辅助纠缠实现Bell态复制的方案,我们仅使用了受控非门(CONT)、分束器(BS)、偏振分束器(PBS)和粒子探测器。首先对未知Bell态和辅助Bell态同时进行CONT操作,接着对CONT门某一输出口粒子进行PBS操作并用粒子探测器测量PBS一输出口粒子的数目,同时对CONT门另一输出口进行第二次CONT门操作,如果探测器测量结果为偶数,未知Bell态直接实现了局域复制;若探测器结果为奇数,需要进行第三次CONT门操作来完成态的局域复制。整个方案最多经过三次CONT门操作,就可以完成任意Bell态的复制。本文的方案对Bell态的测量和分析有一定的帮助。

关键词: 纠缠; Bell态; 量子复制; 受控非门

中图分类号: O469

文献标志码: A

文章编号: 0253-2395(2024)04-0804-05

Local Cloning of Bell States

HUANG Xiaojun, LI Yanna*

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: The Bell state is the key element of quantum information, and its quantum cloning is very closely connected with many important information processing tasks. In this paper, we present a simple scheme for Bell state cloning by using local operation, classical communication and assisted entanglement, by which we only use Controlled-NOT gate (CONT), beam splitters (BS), polarized beam splitters (PBS) and particle detectors. Firstly, we perform a CONT operation on both the unknown Bell state and the auxiliary Bell state simultaneously, then perform a PBS operation on the particles at one output port of the CONT gate and use a particle detector to measure the number of particles at one output port of the PBS. At the same time, we also perform a second CONT gate operation on the another output port of the CONT gate. If the detector measurement result is even, the unknown Bell state realizes local cloning directly; If the detector result is odd, a third CONT operation is required to complete the local cloning. The entire scheme can clone any Bell state after three CONT gate operations at most. The scheme of this paper is helpful for the measurement and analysis of Bell state.

Key words: entanglement; Bell state; quantum cloning; CNOT gate

0 引言

量子纠缠作为非常宝贵的量子资源,在量子克隆^[1]、量子密钥分发^[2-4]、纠缠变换^[5]等量子

通信过程中起着不可或缺的作用。量子复制(克隆)是对输入态进行一定的操作,获得多份与输入态相同的输出态,这在量子信息中有重要的应用^[1,6]。与经典态总是可以被完美复制

收稿日期:2023-02-20;接受日期:2023-04-13

基金项目:国家自然科学基金(11904216)

作者简介:黄晓君(1998-),女,广东江门人,硕士研究生,研究方向为理论物理。E-mail:1024935168@qq.com

* 通信作者:李艳娜(LI Yanna),E-mail:yannali18@sxu.edu.cn

引文格式:黄晓君,李艳娜.Bell态的局域复制[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):804-808. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023081

相比,量子态不能随意复制,量子不可克隆定理指出:非正交态最多只能概率性克隆^[7],而正交状态可以完全克隆。自量子克隆机^[8]和概率量子克隆机^[9]的概念被提出后,量子克隆的研究吸引了广大物理学家的关注,成为量子信息领域的重要研究课题。2004年,Ghosh团队首次提出了局域复制的概念,即利用局域操作和经典通信(Local Operation and Classical Communication, LOCC)对纠缠进行复制,并提出局域复制的充要条件是辅助纠缠^[10]。2007年,Choudhary团队对局域操作下正交量子态复制的辅助纠缠量做了进一步研究,研究指出对于特定的两量子比特为非最大纠缠的局域复制所需的辅助纠缠数量大于1^[11]。同年,该团队又研究了三量子比特正交纠缠的局域复制,发现GHZ态可以被局域复制,W态则不可以^[12]。2008年,Guo团队提出一种利用线性光学和零差检测实现具有一致相位的相干态的局部复制方案^[13]。2011年,Rahaman研究了三比特CAT态的局域复制,指出只有特殊的CAT态能被局域复制^[14]。

除了局域复制,量子复制在远程复制等方面,尤其实验上也取得了很好的成果。2011年,Du团队在核磁共振计算机平台上首次完成了概率性量子克隆的实验^[15]。2017年,Bouchard团队利用对称性方法实现了高维光子态的最佳克隆,并证明了单光子轨道角动量态的高维最优量子克隆的可行性^[16]。2020年,Peng小组首次在多光子线性光学平台实现了双光子纠缠态的量子复制^[17]。Zhan团队在一个光子伪西二量子位系统中通过实验证明了确定性的伪么正两量子位复制^[18]。2021年,Wang团队实验实现了相干态的无条件1→3量子远程复制^[19]。Yang团队在超导电路中实现了普适量子复制机^[20]。2022年,Zhu等提出了一种基于非绝热几何量子计算的在里德伯原子系统中实现量子克隆的理论方案。通过对相关参数的调整,该方案可以实现对称(不对称)通用克隆、最优对称(不对称)相位协变量子克隆和最优对称(不对称)实态量子克隆^[21]。2023年,Stanev团队数值模拟量子光学神经网络,实现了近确定性的最优量子克隆^[22]。

Bell态是量子网络的一个重要资源,它不

仅可以直接实现多个多方量子信息处理任务,如量子密钥分发、量子隐形传态,同时几个Bell态通过一些局域或非局域操作可以转化成多粒子量子纠缠态,如用非局域操作可以实现从两个Bell纠缠到四量子位纠缠态的最优状态转换^[23]。很多量子信息任务中,需要进行Bell测量,有时甚至需要完全确定地区分开两种Bell态。但目前使用线性元件实现Bell态分析的成功率都不是很高。2021年,文献[6]中提出一种可以实现完全Bell态测量的方案,但前提是Bell态复制可以实现。量子力学中,测量意味着态的破坏,若想不破坏Bell态同时对Bell态进行识别,那么对Bell态进行复制是一个很好的方法。目前关于Bell态复制的研究,不仅方案比较复杂而且研究成果也比较少。因此Bell态的复制仍是一个很重要也很具挑战性的研究课题。

在本文中,我们使用受控非门(CNOT)、分束器(BS)、偏振分束器(PBS)和粒子探测器对粒子进行局域操作,提出了一种简单利用局域操作实现的Bell态复制的方案。我们发现如果粒子探测器测量的粒子数是偶数,两次CNOT门操作可以实现Bell态的复制;如果探测器结果为奇数,那么Bell态的局域复制需要进行三次CNOT门操作。这个方案可以解决测量对态影响的问题。

1 Bell态的复制

考虑两粒子纠缠态,四个Bell态分别为:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}, \\ |\Phi^-\rangle &= (|00\rangle - |11\rangle) / \sqrt{2}, \\ |\Psi^+\rangle &= (|01\rangle + |10\rangle) / \sqrt{2}, \\ |\Psi^-\rangle &= (|01\rangle - |10\rangle) / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

利用一对纠缠的辅助粒子对和CNOT门,我们可以直接完成四个Bell态中两个的复制^[10]。但对于四个Bell态中任意态复制,情况会比较复杂些,下面我们仍以光子为例,描述Bell态复制方案。 $|0\rangle$ 表示光子处于水平偏振, $|1\rangle$ 表示光子处于垂直偏振。

图1为待测Bell态进行复制方案图,其中BS为普通分束器,只改变粒子动量,不对偏振

纠缠光子对, 和控制位输出光子对再进行一次 CONT 门操作, 记作 CONT2, 则可完成未知 Bell 态的复制。辅助光子对状态为 $|\Phi^+\rangle$, 记作 A_3, B_3 。CONT1 门的控制位输出光子进入 CONT2 门的目标位, A_3, B_3 辅助光子对进入控制位, 则可完成 Bell 态 $|\Phi^+\rangle$ 和 $|\Phi^-\rangle$ 的复制。CONT2 门的操作结果为:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle_c \otimes |\Phi^+\rangle_T &\xrightarrow{\text{CNOT}} |\Phi^+\rangle_c \otimes |\Phi^+\rangle_T, \\ |\Phi^+\rangle_c \otimes |\Phi^-\rangle_T &\xrightarrow{\text{CNOT}} |\Phi^-\rangle_c \otimes |\Phi^-\rangle_T. \end{aligned} \quad (6)$$

当 $p_1 = 1$, CONT1 门控制位输出光子对处于 $|\Psi^+\rangle$ 状态, 通过 (3) 式可知未知 Bell 态为 $|\Psi^+\rangle$ 或 $|\Psi^-\rangle$, 此时通过 CONT2 不能进行态的复制。因为

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle_c \otimes |\Psi^+\rangle_T &\xrightarrow{\text{CNOT}} |\Phi^+\rangle_c \otimes |\Psi^+\rangle_T, \\ |\Phi^+\rangle_c \otimes |\Psi^-\rangle_T &\xrightarrow{\text{CNOT}} |\Phi^-\rangle_c \otimes |\Psi^-\rangle_T. \end{aligned} \quad (7)$$

因此需要增加一些操作, 此时 p_1 的奇偶性触发量子开关, 进行第三步过程。

第三步, 实现处于 $|\Psi^+\rangle$ 或 $|\Psi^-\rangle$ 的未知 Bell 态的复制。对 CNOT2 门目标位输出的光子对用分束器 BS 进行操作, BS 的一个输出端口有一光子探测器 p_2 。根据 p_2 的取值可以分辨出未知 Bell 态的具体状态。要达到复制的目的, 则需要进行第三次 CONT 门, 并再借助一对 Bell 态为 $|\Psi^+\rangle$ 的辅助纠缠光子对。

对 CNOT2 目标位输出的光子对用普通分束器 (BS) 进行测量。普通分束器只对动量进行操作, 对偏振没有任何影响。普通分束器的矩阵形式如下:

$$\begin{pmatrix} |j_i\rangle \\ |j_k\rangle \end{pmatrix}_{\text{out}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |j_i\rangle \\ |j_k\rangle \end{pmatrix}_{\text{in}}, j=0, 1 \quad (8)$$

j 表示偏振, i, k 表示动量。普通分束器可以分辨 $|\Psi^+\rangle$ 和 $|\Psi^-\rangle$ ^[24]。根据普通分束器的测量结果, 进而我们可以分辨出未知态的具体状态。 $p_2 = 0$, 未知态为 $|\Psi^+\rangle$, $p_2 = 1$, 未知态为 $|\Psi^-\rangle$ 。

引入处于 $|\Psi^+\rangle$ 的辅助纠缠光子对, 记为 A_4, B_4 , 将辅助纠缠光子对和 CONT2 的目标控制位输出的光子对进行 CONT 门作用, 记作 CONT3。其中辅助粒子对进入 CONT3 的控制位, 而 CONT2 的目标控制位输出的粒子进入 CONT3 的目标位, 通过 CONT3 作用后, 可以实

现未知 Bell 态的复制。

$$\begin{aligned} |\Psi^+\rangle_c \otimes |\Phi^+\rangle_T &\xrightarrow{\text{CNOT}} |\Psi^+\rangle_c \otimes |\Psi^+\rangle_T, \\ |\Psi^+\rangle_c \otimes |\Phi^-\rangle_T &\xrightarrow{\text{CNOT}} |\Psi^-\rangle_c \otimes |\Psi^-\rangle_T. \end{aligned} \quad (9)$$

由上述过程可知, 我们利用 CONT 门和辅助纠缠可以实现任意 Bell 态的复制, 但是不同的 Bell 态需要不同的辅助纠缠光子对。通过 p_1 的奇偶性, 我们可以初步分辨出未知 Bell 态处于 $|\Phi^\pm\rangle$ 或 $|\Psi^\pm\rangle$, 对应的 $|\Phi^\pm\rangle$ 复制可以借助纠缠态为 $|\Phi^+\rangle$ 的辅助光子对实现; 对于 $|\Psi^\pm\rangle$ 的复制可以借助纠缠态为 $|\Psi^+\rangle$ 的辅助光子对实现。

2 结论

我们利用 CNOT 门、分束器等元件, 构造了一种简单地实现 Bell 态局域复制的方案。通过此方案我们不仅可以实现 Bell 态的复制, 还可以初步判断出未知 Bell 态是哪一种类型: 如果粒子探测器粒子数测量是偶数, 那么未知 Bell 态应为 $|\Phi^\pm\rangle$, 两次 CONT 门操作可以实现 Bell 态的复制; 如果探测器结果为奇数, 未知 Bell 态应是 $|\Psi^\pm\rangle$, 此时 Bell 态局域复制的实现需要进行三次 CNOT 门操作。结合文献[6], 发现我们的方案对实现完全 Bell 态测量有一定帮助。本文的方案还可以推广到多粒子纠缠中, 我们接下来的工作将围绕多粒子的局域复制和高效率的 Bell 态分析进行。

参考文献:

- [1] FAN H, WANG Y N, JING L, *et al.* Quantum Cloning Machines and the Applications[J]. *Phys Rep*, 2014, **544** (3): 241-322. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.06.004.
- [2] BOUWMEESTER D, PAN J W, MATTLE K, *et al.* Experimental Quantum Teleportation[J]. *Nature*, 1997, **390** (6660): 575-579. DOI: 10.1038/37539.
- [3] BOSCHI D, BRANCA S, DE MARTINI F, *et al.* Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **80**(6): 1121-1125. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.1121.
- [4] PAN J W, BOUWMEESTER D, WEINFURTER H, *et al.* Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons that Never Interacted[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **80** (18): 3891. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.3891.
- [5] GHEORGHIU V, GRIFFITHS R B. Entanglement Transformations Using Separable Operations[J]. *Phys Rev A*,

- 2007, **76**(3): 032310. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.032310.
- [6] 宁雪,李卫东,李艳娜. 利用线性元件实现完全Bell态测量[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2021,**44**(1):68-72. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2020015.
NING X, LI W D, LI Y N. Complete Bell State Measurement with Linear Elements[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2021,**44**(1):68-72. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2020015.
- [7] WOOTTERS W K, ZUREK W H. A Single Quantum Cannot be Cloned[J]. *Nature*, 1982, **299**: 802-803. DOI: 10.1038/299802a0.
- [8] BUŽEK V, HILLERY M. Quantum Copying: Beyond the No-cloning Theorem[J]. *Phys Rev A*, 1996, **54**(3): 1844. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.1844.
- [9] DUAN L M, Guo G C. A Probabilistic Cloning Machine for Replicating Two Non-orthogonal States[J]. *Phys Lett A*, 1998, **243**(5-6): 261-264. DOI: 10.1016/S0375-9601(98)00287-4.
- [10] GHOSH S, KAR G, ROY A. Local Cloning of Bell States and Distillable Entanglement[J]. *Phys Rev A*, 2004, **69**(5): 052312. DOI: 10.1103/PhysRevA.69.052312.
- [11] CHOUDHARY S K, KUNKRI S, RAHAMAN R, *et al.* Local Cloning of Entangled Qubits[J]. *Phys Rev A*, 2007, **76**(5): 052305. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.052305.
- [12] CHOUDHARY S K, KAR G, KUNKRI S, *et al.* Local Cloning of Genuinely Entangled States of Three Qubits [J]. *Phys Rev A*, 2007, **76**(6): 062312. DOI: 10.1103/PhysRevA.76.062312.
- [13] DONG Y L, ZOU X B, GUO G C. Local and Nonlocal Cloning of Coherent States with Known Phases Using Linear Optics[J]. *Phys Rev A*, 2008, **77**(3): 034304. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.034304.
- [14] RAHAMAN R. Local Cloning of CAT States[J]. *Phys Rev A*, 2011, **375**(24): 2291-2295. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.04.050.
- [15] CHEN H, KONG X, CHONG B, *et al.* Experimental Demonstration of a Quantum Annealing Algorithm for the Traveling Salesman Problem in a Nuclear-magnetic-resonance Quantum Simulator[J]. *Phys Rev A*, 2011, **83**(3): 032314. DOI: 10.1103/PhysRevA.83.032314.
- [16] BOUCHARD F, FICKLER R, BOYD R W, *et al.* High-dimensional Quantum Cloning and Applications to Quantum Hacking[J]. *Sci Adv*, 2017, **3**(2): e1601915. DOI: 10.1126/sciadv.1601915.
- [17] PENG L C, WU D, ZHONG H S, *et al.* Cloning of Quantum Entanglement[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(21): 210502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.210502.
- [18] ZHAN X, WANG K, XIAO L, *et al.* Experimental Quantum Cloning in a Pseudo-unitary System[J]. *Phys Rev A*, 2020, **101**(1): 010302. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.010302.
- [19] WANG Q, LI W, WU Y, *et al.* Demonstration of $1 \rightarrow 3$ Continuous-variable Quantum Telecloning[J]. *Phys Rev A*, 2021, **104**(3): 032419. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.032419.
- [20] YANG Z B, HAN P R, HUANG X J, *et al.* Experimental Demonstration of Entanglement-enabled Universal Quantum Cloning in a Circuit[J]. *NPJ Quantum Inf*, 2021, **7**(1): 44. DOI: 10.1038/s41534-021-00375-5.
- [21] ZHU X Y, FANG B L, LI Y H, *et al.* Simple Construction of Rydberg Quantum Cloning Machines *via* Nonadiabatic Geometric Quantum Operations[J]. *Phys Rev A*, 2022, **106**(5): 052419. DOI: 10.1103/PhysRevA.106.052419.
- [22] STANEV D, SPAGNOLO N, SCIARRINO F. Deterministic Optimal Quantum Cloning *via* a Quantum-optical Neural Network[J]. *Phys Rev Res*, 2023, **5**(1): 013139. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.5.013139.
- [23] TAKEUCHI Y, IMOTO N, TASHIMA T. Optimal Nonlocal Conversion of Photonic Four-partite Entanglement from Two Bell Pairs in Quantum Networks[J]. *Phys Rev A*, 2018, **97**(4): 042341. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.042341.
- [24] BRAUNSTEIN S L, MANN A. Measurement of the Bell Operator and Quantum Teleportation[J]. *Phys Rev A*, 1995, **51**(3): R1727. DOI: 10.1103/PhysRevA.51.R1727.