山西大学学报(自然科学版)47(4):677-690,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023093

单调区域上非线性退化抛物方程的长时间性态

李心*,褚锦芳
(燕山大学 理学院,河北 秦皇岛 066004)

摘 要:单调区域上的非线性退化抛物方程固有的非自治性和退化性使得对该方程的研究具有本质性的困难。本文研究了该方程满足能量等式变分解的适定性以及拉回吸引子的存在性。首先,利用惩罚法得到该方程的扰动方程满足能量等式变分解的适定性。其次,针对扰动方程,利用正则性方法得到该方程极限解的存在性,进而得到原方程满足能量等式变分解的适定性。最后,根据变分解的适定性构造非自治动力系统的双参数半群,结合一致能量耗散估计和收缩函数法证明了该半群存在渐近紧的拉回吸收集,从而建立了此类系统的拉回吸引子。

关键词:退化抛物方程;单调区域;惩罚法;适定性;拉回吸引子

中图分类号:O175.2 **文献标志码**:A **文章编号**:0253-2395(2024)04-0677-14

Long Time Behavior of Nonlinear Degenerate Parabolic Equations in Monotone Domains

LI Xin*, CHU Jinfang
(*School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004*, China*)

Abstract: The nonlinear degenerate parabolic equation in monotone domain has essential difficulties because of its inherent non-autonomy and degeneracy. This paper mainly studied the well-posedness of the variational solution of satisfying the energy equality and the existence of the pull-back attractor. First, the penalty method was used to obtain the well-posedness of variational solution of the perturbation equation which satisfies the energy equality. Second, for the perturbed equation, the existence of the limit solution of the equation was attained by the regularity method, further gained the well-posedness of the variational solution of original equation which satisfies the energy equality. Final, based on the well-posedness of variational solutions, we constructed a two-parameter semigroup of non-autonomous dynamical system, and the existence of asymptotically compact pullback absorbing sets for such system was proved by combining the uniform energy dissipation estimates and the contraction function method, thus, the pull-back attractor of this kind of system was established from the preceding analysis.

Key words: degenerate parabolic equation; monotone domains; penalty method; well-posedness; pull-back attractor

0 引言

随着社会的不断进步和发展,定义在单调区域上的偏微分方程大量出现在物理、经济、医学、生物数学、工程控制等领域。因实际问题的需要,长期以来,众多数学家致力于研究单调区域上的线性和非线性偏微分方程,其中大部分涉及问题的描述和解的适定性等[1-3]。

收稿日期:2023-03-07;**接受日期**:2023-05-06

基金项目:国家自然科学基金(11801493);河北省自然科学基金(A2022203004);河北省教育厅高等学校科技计划青年基金项目(QN2020203)

* **通信作者**:李心(1987-),男,河北秦皇岛人,博士,副教授,研究方向为非线性分析与无穷维动力系统。E-mail:li_xin@ysu.edu.cn

引文格式:李心,褚锦芳.单调区域上非线性退化抛物方程的长时间性态[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):677-690. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023093

众所周知,自治的非线性偏微分方程解的适定性等已被广泛研究[4]。而对于非自治的偏微分方程这一类变区域问题[5-6],由于方程作用区域的变化导致了方程的相空间也发生变化,因此,尽管方程可能不显含时间,但方程在本质上是非自治的。这无疑使得该类问题的研究变得更加困难,特别是在函数空间的选取与解的定义、性质的证明等方面。Bernardi 等[7]通过假设作用区域截面关于时间的单调性条件,研究了非柱形区域中的线性薛定谔型偏微分方程的 Cauchy-Dirichlet 问题,得到了 Hilbert 空间中的一类抽象薛定谔型微分方程解的存在性和唯一性结果;周峰[8]结合了已有的惩罚函数以及 CGL 方程的特点,给出了一种新的惩罚函数,并利用此函数证明了 CGL 方程变分解的适定性,进而获得了拉回吸引子的存在性。Kloeden 等[9]通过引入惩罚项将非柱形区域延拓到柱形区域上,证明了非柱形区域中的热方程满足能量等式变分解的适定性,从而进一步得到了由这类解生成的非自治动力系统的拉回吸引子的存在性。此外,文献[10]中,作者考虑了非柱形区域中的非线性抛物型变分不等式,利用 Rothe 法构造了一个近似解,证明了结果的存在性和唯一性。

针对退化抛物方程,数学家们对其解的适定性和吸引子的存在性做了广泛的研究[11-12]。Li 等[13]在允许非负扩散系数消失的意义下,考虑了一类退化抛物方程在有界域中的长时间行为。李心[14]通过建立新的框架和先验估计证明了有界域上非自治退化抛物方程的解在高阶可积空间的拉回吸引性。苏彩月等[15]考虑了一类变指标四阶退化抛物方程问题,通过构造逼近解,结合能量估计获得一致性估计,进而得到存在性结果。并在存在性基础上,利用熵泛函方法给出了解的长时间行为。然而对于单调区域上的非线性退化抛物方程,该区域上非自治的固有性以及方程的退化性使得这类方程的研究变得更加困难。本文克服了该方程所特有的退化性以及单调区域上非自治的固有性所带来的困难,利用惩罚法等方法讨论了单调区域上的非线性退化抛物方程变分解的适定性问题,并得到该系统拉回吸引子的存在性。

1 预备知识

设 $\{\Omega_t: t\in R\}$ 是 R^N 的一簇非空有界子集,且满足单调性条件

$$s<t\Rightarrow\Omega_s\subset\Omega_t\,。\tag{1}$$

对于任意的 $T>\tau$,记:

$$Q_\tau:=\bigcup_{t\in(\tau,+\infty)}\Omega_t\times\{t\},\qquad \Sigma_\tau:=\bigcup_{t\in(\tau,+\infty)}\partial\Omega_t\times\{t\},$$
$$Q_{\tau,T}:=\bigcup_{t\in(\tau,T)}\Omega_t\times\{t\},\qquad \Sigma_{\tau,T}:=\bigcup_{t\in(\tau,T)}\partial\Omega_t\times\{t\}。$$

其中 $\tau\in R$, $Q_{\tau,T}$ 是 R^{N+1} 的子集。

考虑如下形式的单调区域上带有齐次 Dirichlet 边界条件的非线性退化抛物方程的初值问题:

$$\begin{cases}u_t-\mathrm{div}(\sigma(x)\nabla u)+f(u)=g(x,t), & (x,t)\in Q_\tau,\\ u=0, & (x,t)\in\Sigma_\tau,\\ u(\tau,x)=u_\tau(x), & x\in\Omega_\tau。\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\tau\in R$, $u_\tau:\Omega_\tau\to R$, 耗散系数 $\sigma(x)$,外力项 g 以及非线性项 f 满足如下条件:

(C_1) $\sigma(x)$ 是一个非负可测函数使得 $\sigma\in L^1_{loc}(\Omega_T)$,并满足对某些 $\alpha\in(0,2)$ 以及对任意 $z\in\bar{\Omega}_T$ 都有 $\liminf\limits_{x\to z}|x-z|^{-\alpha}\sigma(x)>0$ 成立;

(C_2) 外力项 $g\in L^2_{loc}\big(R;\ L^2(\Omega_T)\big)$ 且 $g: Q_\tau\to R$ 满足 $\int_{-\infty}^{t}e^{\lambda s}\|g(s)\|^2_{L^2(\Omega_T)}ds<+\infty$,这里 $\lambda>0$ 为带有齐次 Dirichlet 边界条件区域 Ω_T 上算子 $-\mathrm{div}\big(\sigma(x)\nabla\cdot\big)$ 的第一特征值;

(C_3) 非线性项 $f\in C^1(R)$,且对任意 $s\in R$,有

$$C_1|s|^p-C_0\leqslant f(s)s\leqslant C_2|s|^p+C_0,\ p\geqslant2,\tag{3}$$

$$f'(s) \geqslant -l, \tag{4}$$

这里 $C_i(i=0,1,2,)$,l 都为正常数。此外,存在非负常数 $\tilde{C}_i(i=0,1,2)$ 使得对任意的 $s \in R$,有

$$\tilde{C}_1 |s|^p - \tilde{C}_0 \leqslant F(s) \leqslant \tilde{C}_2 |s|^p + \tilde{C}_0 \left(p \geqslant 2, F(s) := \int_0^s f(r)\mathrm{d}r \right)。 \tag{5}$$

为了方便起见,记 $H_r := L^2(\Omega_r)$,$V_r := H_0^{1,\sigma}(\Omega_r)$,其中 $r \in R$,$(\cdot,\cdot)_r$ 和 $|\cdot|_r$ 分别表示 H_r 中的内积和范数,$((\cdot))_r$ 和 $\|\cdot\|_r$ 分别表示 V_r 中的内积和范数。对任意的 $s<t$,采用函数延拓的思想将 V_s 视为 V_t 的一簇闭子空间,由(1)可知对任意的 $T>\tau$,$\{V_t: t\in[\tau,T]\}$ 为 V_T 的一簇闭子空间,即 $s<t \Rightarrow V_s \subset V_t$。

对任意 $T>\tau$,考虑如下逼近方程:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) + f(u) = g(x,t), & (x,t)\in Q_{\tau,T}, \\ u=0, & (x,t)\in \Sigma_{\tau,T}, \\ u(\tau,x) = u_\tau(x), & x\in\Omega_\tau。 \end{cases} \tag{6}$$

记

$$\Phi_{\tau,T} := \left\{ \varphi \in L^2(\tau,T;\ V_T) \cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right): \varphi' \in L^2(\tau,T;\ H_T),\ \varphi(\tau)=\varphi(T)=0,\ \varphi(t)\in V_t \quad a.e.\, t\in(\tau,T) \right\},$$

其中 $u_\tau \in L^2(\Omega_\tau)$,$g \in L^2(Q_{\tau,T})$,$\tilde{Q}_{\tau,T} := \Omega_t \times (\tau,T)$。

定义 1 称函数 u 为方程(6)的变分解,若满足

(1)$u \in L^2(\tau,T,V_t) \cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$;

(2)对任意 $\varphi \in \Phi_{\tau,T}$,

$$-\int_\tau^T \left(u(t),\varphi'(t)\right)_T \mathrm{d}t + \left(\left(u(t),\varphi(t)\right)\right)_{V_t} + \int_\tau^T \left(f\left(u(t)\right),\varphi(t)\right)_T \mathrm{d}t = \int_\tau^T \left(g(t),\varphi(t)\right)_T \mathrm{d}t;$$

(3)$u(t)\in V_t \quad a.e.\, t\in(\tau,T)$;

(4)$\lim\limits_{t\to\tau} \dfrac{1}{t-\tau}\int_\tau^t |u(r)-u_\tau|_T^2 \mathrm{d}r = 0$。

引理 1 若 u 是公式(6)的变分解,则对于 $|u|_T^2$ 任意的 Lebesgue 点 $t\left(t\in(\tau,T)\right)$ 有

$$\left|u(t)\right|_T^2 + 2\int_\tau^t \|u(r)\|_{V_T}^2 \mathrm{d}r + 2\int_\tau^t \left(f\left(u(r)\right),u(r)\right)_T \mathrm{d}r =$$

$$|u_\tau|_T^2 + 2\int_\tau^t \left(g(r),u(r)\right)_T \mathrm{d}r + \lim_{h\to 0} h^{-1}\int_\tau^{t-h} \left|u(r+h)-u(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r。$$

我们主要对公式(6)中满足如下能量等式的变分解 u 进行研究

$$\left|u(t)\right|_T^2 + 2\int_\tau^t \|u(r)\|_{V_T}^2 \mathrm{d}r + 2\int_\tau^t \left(f\left(u(r)\right),u(r)\right)_T \mathrm{d}r = |u_\tau|_T^2 + 2\int_\tau^t \left(g(r),u(r)\right)_T \mathrm{d}r \quad a.e.\, t\in(\tau,T)。 \tag{7}$$

在这种情况下,通常会认为 $t\in(\tau,T)$ 时 u 满足能量等式。同样地,若对任意 $T>\tau$,将方程(2)的变分解 u 限制在 $\tilde{Q}_{\tau,T}$ 上时仍满足能量等式,则 u 在 $t\in(\tau,+\infty)$ 上也满足能量等式(7)。显然,若 u 是方程(6)满足能量等式的变分解,则 $u\in L^\infty(\tau,T;\ H_T)$。

对任意函数 $u\in L^2(\tau,T;\ H_T)$,$t\in(\tau,T)$ 定义 $\zeta_{u,T}(t) := \limsup\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\int_\tau^{t-h} \left|u(r+h)-u(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r$。

$\zeta_{u,T}(t)$ 是一个单调不减函数,则由引理1可知,方程(6)的变分解 u 在 $t\in(\tau,T)$ 上满足能量等式(7)当且仅当对任意 $t\in(\tau,T)$ 有 $\zeta_{u,T}(t)=0$。

2 扰动方程变分解的适定性

为了研究方程的退化情况,通常会用非退化问题逼近退化问题。本小节针对单调区域上非线

性退化抛物方程的扰动方程(8),利用惩罚法证明其满足能量等式变分解的存在性和唯一性。

$$\begin{cases} u_\varepsilon' - \operatorname{div}(\sigma_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) + f(u_\varepsilon) = g(x,t), & (x,t)\in Q_\tau, \\ u_\varepsilon = 0, & (x,t)\in\Sigma_\tau, \\ u_\varepsilon(\tau,x) = u_\tau(x), & x\in\Omega_\tau, \end{cases} \tag{8}$$

其中$\sigma_\varepsilon(x)=\sigma(x)+\varepsilon$。

2.1　惩罚法

首先,固定$T>\tau$,对任意$t\in[\tau,T]$,用$V_t{}^\perp := \left\{u\in V_T:\left((u,v)\right)_T=0,\forall v\in V_t\right\}$表示$V_t$的正交子空间。此外,将$V_t$到$V_t{}^\perp$的正交投影算子记作$M(t)\in\vartheta(V_T)$,则有$u\in V_T, M(t)u\in V_t{}^\perp, u-M(t)u\in V_t$。然后,对任意$t>T$定义$M(t)=M(T)$,并且$M(T)$是$\vartheta(V_T)$的零点。现在将用更规则的算子来近似$M(t)$。考虑$V_T$上的对称双线性形式$m(t;\cdot,\cdot)$且

$$m(t;\ u,v) := \left(\left(M(t)u,v\right)\right)_T, \forall u,v\in V_T, \forall t\geqslant\tau。$$

映射$t\in[\tau,+\infty)\mapsto m(t;\ u,v)\in R$是可测的。此外,$\left|m(t;\ u,v)\right|\leqslant\|u\|_T\|v\|_T, \forall u,v\in V_T$。对任意整数$k\geqslant 1$记$m_k(t;\ u,v) := k\int_0^{\frac{1}{k}} m(t+r;\ u,v)\mathrm{d}r, \forall u,v\in V_T, \forall t\geqslant\tau$。并将与$M(t)\in\vartheta(V_T)$相关的算子定义为$\left(\left(M_k(t)u,v\right)\right)_T := m_k(t;\ u,v), \forall u,v\in V_T, \forall t\geqslant\tau$。

引理2[9]　对任意的整数$1\leqslant h\leqslant k, t\geqslant\tau$和$u,v\in V_T$有

$$m_k(t;\ u,v)=m_k(t;\ v,u);\ 0\leqslant m_h(t;\ u,u)\leqslant m_k(t;\ u,u)\leqslant m(t;\ u,u)=\|M(t)u\|_T^2\leqslant\|u\|_T^2;$$

$$m_k'(t;\ u,u) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_k(t;\ u,u) = k\left(m\left(t+\frac{1}{k};\ u,u\right)-m(t;\ u,u)\right)\leqslant 0;\ \left(\left(M_k(t)u,z\right)\right)_T=0, \forall z\in V_t。$$

此外,$\{u_k\}\subset L^2(\tau,T;\ V_T)$且$\{u_k\}$在$L^2(\tau,T;\ V_T)$中弱收敛于$u$,则

$$\liminf_{k\to+\infty}\int_\tau^T m_k\left(t;\ u_k(t),u_k(t)\right)\mathrm{d}t\geqslant\int_\tau^T m\left(t;\ u(t),u(t)\right)\mathrm{d}t。$$

假设$R: V\to V_T{}^*$为Riesz同构,并将其定义为$\langle Ru,v\rangle_T := \left((u,v)\right)_T, \forall u,v\in V_T$。则对任意整数$k\geqslant 1$和任意$t\in[\tau,T]$有:$A_{\varepsilon_k}^\sigma(t) := -\operatorname{div}\left(\sigma_\varepsilon(x)\nabla\right)+kRM_k(t)$。显然,$A_{\varepsilon_k}^\sigma(t)\in\vartheta\left(V_T,V_T{}^*\right)$是一簇对称线性算子,其使得映射$t\in[\tau,T]\mapsto A_{\varepsilon_k}^\sigma(t)\in\vartheta\left(V_T,V_T{}^*\right)$是可测且有界的。此外,还满足

$$\left\langle A_{\varepsilon_k}^\sigma(t)u,u\right\rangle_T\geqslant\|u\|_{V_T}^2+\varepsilon\|u\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2, \forall u\in V_T, \forall t\in[\tau,T]。\tag{9}$$

令$u_\tau\in H_T$,则有

$$\left(u_{\varepsilon_k}(t),u\right)_T+\int_\tau^t\left\langle A_{\varepsilon_k}^\sigma(r)u_k(r),u\right\rangle_T\mathrm{d}r+\int_\tau^t\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right),u\right)_T\mathrm{d}r=(u_\tau,u)_T+\int_\tau^t\left(g(r),u\right)_T\mathrm{d}r。\tag{10}$$

定理1　假设公式(1),公式(3)和公式(4)仍成立,则对任意$k\geqslant 1, f\in L^2(\tau,T;\ H_T), u_\tau\in H_T$,方程(10)存在唯一的解$u_{\varepsilon_k}\in L^2(\tau,T;\ V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$且$u_{\varepsilon_k}\in C\left([\tau,T];\ H_T\right)$。另外,如果$u_\tau\in V_T\cap L^p(\Omega_T)$,则$u_{\varepsilon_k}$也满足

$$u_{\varepsilon_k}\in L^\infty(\tau,T;\ V_T)\cap L^\infty\left(\tau,T;\ L^p(\Omega_T)\right), u_{\varepsilon_k}'\in L^2(\tau,T;\ H_T),$$

和

$$\int_\tau^T\left|u_{\varepsilon_k}'(t)\right|_T^2\mathrm{d}t+\|u_{\varepsilon_k}\|_{V_T}^2+\varepsilon\|u_{\varepsilon_k}\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2+k\int_\tau^T\left(\left(M_k(t)u_{\varepsilon_k}(t),u_{\varepsilon_k}(t)\right)\right)_T\mathrm{d}t+2\tilde{C}_1\|u_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(\tau,T;\ L^p(\Omega_T))}^p\leqslant$$

$$(3+T-\tau)\left[\|u_\tau\|_{V_T}^2+\varepsilon\|u_\tau\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2+k\left(\left(M_k(\tau)u_\tau,u_\tau\right)\right)_T+2\tilde{C}_2\|u_\tau\|_{L^p(\Omega_T)}^p+4\tilde{C}_0|\Omega_T|+\int_\tau^T\left|g(r)\right|_T^2\mathrm{d}r\right],$$

其中$\tilde{C}_0$和$\tilde{C}_2$由公式(5)给出。

证明 由所涉及算子的单调性可知方程(10)存在唯一的解 $u_{\varepsilon_k}\in L^2(\tau,T;\ V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$ 且 $u_{\varepsilon_k}\in C\left([\tau,T];\ H_T\right)$。对任意整数 $n\geqslant 1$ 考虑近似值 $u_{\varepsilon_{k_n}}(t)=\sum_{i=1}^{n}\zeta_{k_n,i}(t)e_i$,其中 $\{e_i\}$ 为 H_T 的 Hilber 标准正交基,则有

$$\begin{aligned}&\left(u_{\varepsilon_{k_n}}(t),e_i\right)_T+\int_\tau^t\left\langle A_{\varepsilon_k}^\sigma(r)u_{\varepsilon_{k_n}}(r),e_i\right\rangle_T\mathrm{d}r+\int_\tau^t\left(f\left(u_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right),e_i\right)_T\mathrm{d}r=\\&\left(u_{\tau_n},e_i\right)_T+\int_\tau^t\left(g(r),e_i\right)_T\mathrm{d}r,\ t\in[\tau,T],1\leqslant i\leqslant n\text{。}\end{aligned}\tag{11}$$

此外,由公式(7)可得解 $u_{\varepsilon_{k_n}}$ 满足如下的能量等式

$$\begin{aligned}&\left|u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\right|_T^2+2\int_\tau^t\left\langle A_{\varepsilon_k}^\sigma(r)u_{\varepsilon_{k_n}}(r),u_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right\rangle_T\mathrm{d}r+2\int_\tau^t\left(f\left(u_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right),u_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right)_T\mathrm{d}r=\\&\left|u_{\tau_n}\right|_T^2+2\int_\tau^t\left(g(r),u_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right)_T\mathrm{d}r\qquad a.e.\,t\in(\tau,T)\text{。}\end{aligned}$$

根据公式(3)和公式(9)有

$$\begin{aligned}&\left|u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\right|_T^2+2\int_\tau^t\left(\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2\right)\mathrm{d}r+2C_1\int_\tau^t\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p\mathrm{d}r\leqslant\\&\left|u_{\tau_n}\right|_T^2+\int_\tau^t\left|g(r)\right|_T^2\mathrm{d}r+\int_\tau^t\left|u_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right|_T^2\mathrm{d}r+2C_0(t-\tau)|\Omega_T|\text{。}\end{aligned}\tag{12}$$

由公式(12)和 Gronwall 不等式得出 $\left\{u_{\varepsilon_{k_n}}\right\}$ 在 $L^2(\tau,T;\ V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$ 和 $L^\infty(\tau,T;\ H_T)$ 中是有界的。则 $\left\{u_{\varepsilon_{k_n}}\right\}$ 在 $L^2(\tau,T;\ V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$ 中弱收敛于 u_{ε_k} 且在 $L^\infty(\tau,T;\ H_T)$ 中弱*收敛于 u_{ε_k},且 u_{ε_k} 为方程(10)的解。假设 $u_\tau\in V_T\cap L^p(\Omega_T)$,式(11)关于 t 求导,有

$$\left(u_{\varepsilon_{k_n}}'(t),e_i\right)_T+\left\langle A_k^\sigma(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),e_i\right\rangle_T+\left(f\left(u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\right),e_i\right)_T=\left(g(t),e_i\right)_T,t\in[\tau,T],$$

将上式乘以 $\zeta_{k_n,i}'(t)$,并 $i=1$ 到 n 求和,化简得

$$\begin{aligned}&\left|u_{\varepsilon_{k_n}}'(t)\right|_T^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2\right)+2k\Big(\big(M_k(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}'(t)\big)\Big)_T+\\&2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_T}F\left(u_{\varepsilon_{k_n}}(x,t)\right)\mathrm{d}x\leqslant\left|g(t)\right|_T^2\qquad a.e.\,t\in(\tau,T)\text{。}\end{aligned}\tag{13}$$

接下来,处理公式(13)中的第三项得到

$$\Big(\big(M_k(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}'(t)\big)\Big)_T=k\int_t^{t+\frac{1}{k}}\Big(\big(M(r)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}'(t)\big)\Big)\mathrm{d}r,\tag{14}$$

和

$$\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big(M_k(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\big)\Big)_T\leqslant 2\int_t^{t+\frac{1}{k}}\Big(\big(M(r)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}'(t)\big)\Big)_T\mathrm{d}r\text{。}\tag{15}$$

因此,根据公式(14)和公式(15)有

$$\Big(\big(M(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}'(t)\big)\Big)_T\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big(M(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\big)\Big)_T,$$

故将上式代入公式(13)可得

$$\begin{aligned}&\left|u_{\varepsilon_{k_n}}'(t)\right|_T^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2\right)+k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big(M(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t),u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\big)\Big)_T+\\&2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_T}F\left(u_{\varepsilon_{k_n}}(x,t)\right)\mathrm{d}x\leqslant\left|g(t)\right|_T^2\text{。}\end{aligned}\tag{16}$$

由公式(5)可得

$$-2\tilde{C}_0|\Omega_T|+2\tilde{C}_1\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p\leqslant 2\int_{\Omega_T}F\left(u_{\varepsilon_{k_n}}(x,t)\right)\mathrm{d}x\leqslant 2\tilde{C}_0|\Omega_T|+2\tilde{C}_2\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p\text{。}\tag{17}$$

将公式(16)在 (τ,T) 上关于 t 积分并将公式(17)代入可得

$$\int_\tau^t \left|u'_{\varepsilon_{k_n}}(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r + \left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{V_T}^2 + \varepsilon\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2 + k\Big(\big(M_k(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t), u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\big)\Big)_T + 2\tilde{C}_1\left\|u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p \leqslant$$
$$\left\|u_{\tau_n}\right\|_{V_T}^2 + \varepsilon\left\|u_{\tau_n}\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2 + k\Big(\big(M_k(\tau)u_{\tau_n}, u_{\tau_n}\big)\Big)_T + 4\tilde{C}_0|\Omega_T| + 2\tilde{C}_2\left\|u_{\tau_n}\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p + \int_\tau^t \left|g(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r。 \tag{18}$$

因此,u_{ε_k}满足

$$u_{\varepsilon_k} \in L^\infty(\tau, T; V_T) \cap L^\infty(\tau, T; L^p(\Omega_T)), u'_{\varepsilon_k} \in L^2(\tau, T; H_T)。$$

此外,通过u_{ε_k}的唯一性可知,序列$u_{\varepsilon_{k_n}}$在$L^\infty(\tau, T; V_T) \cap L^\infty\big(\tau, T; L^p(\Omega_T)\big)$中弱$*$收敛于$u_{\varepsilon_k}$,$u'_{\varepsilon_{k_n}}$在$L^2(\tau, T; H_T)$中弱收敛于$u'_{\varepsilon_k}$,$n \to +\infty$。根据公式(18)有

$$\int_\tau^t \left|u'_{\varepsilon_k}(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r + \left\|u_{\varepsilon_k}\right\|_{V_T}^2 + \varepsilon\left\|u_{\varepsilon_k}\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2 + 2\tilde{C}_1\left\|u_{\varepsilon_k}(t)\right\|_{L^\infty(\tau, T; L^p(\Omega_T))}^p \leqslant$$
$$3\left\|u_\tau\right\|_{V_T}^2 + 3\varepsilon\left\|u_\tau\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2 + 3k\Big(\big(M_k(\tau)u_\tau, u_\tau\big)\Big)_T + 12\tilde{C}_0|\Omega_T| + 6\tilde{C}_2\left\|u_\tau\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p + 3\int_\tau^T \left|g(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r。$$

另一部分在(τ, T)上关于t积分可得

$$k\int_\tau^T \Big(\big(M_k(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t), u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\big)\Big)_T \mathrm{d}t \leqslant (T-\tau)\Big[\left\|u_{\tau_n}\right\|_{V_T}^2 + \varepsilon\left\|u_{\tau_n}\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2 +$$
$$k\Big(\big(M_k(\tau)u_{\tau_m}, u_{\tau_m}\big)\Big)_T + 2\tilde{C}_2\left\|u_{\tau_m}\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p + 4\tilde{C}_0|\Omega_T| + \int_\tau^t \left|g(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r。 \tag{19}$$

因此,根据引理2和公式(19)有

$$k\int_\tau^T \Big(\big(M_{\varepsilon_k}(t)u_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)\big)\Big)_T \mathrm{d}t \leqslant k\liminf_{k\to\infty}\int_\tau^T \Big(\big(M_k(t)u_{\varepsilon_{k_n}}(t), u_{\varepsilon_{k_n}}(t)\big)\Big)_T \mathrm{d}t \leqslant$$
$$(T-\tau)\Big[\left\|u_\tau\right\|_{V_T}^2 + \varepsilon\left\|u_\tau\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2 + k\Big(\big(M_k(\tau)u_\tau, u_\tau\big)\Big)_T + 2\tilde{C}_2\left\|u_\tau\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p + 4\tilde{C}_0|\Omega_T| + \int_\tau^t \left|g(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r\Big]。$$

2.2 满足能量等式的变分解

本小节的主要目的是证明方程(8)满足能量等式变分解的存在性。

定理2 假设公式(1),公式(3)和公式(4)都成立,则对任意$g \in L^2(\tau, T; H_T)$和$u_\tau \in H_\tau$,方程(8)存在唯一的满足能量等式(7)的变分解u_ε。此外,$u_\varepsilon \in C\big([\tau, T]; H_T\big)$。若$u_\tau \in V_\tau \cap L^p(\Omega_\tau)$,则$u$满足

$$u_\varepsilon \in L^\infty(\tau, T; V_T) \cap L^\infty\big(\tau, T; L^p(\Omega_T)\big), \qquad u_\varepsilon{}' \in L^2(\tau, T; H_T)。$$

证明 首先,考虑$u_\tau \in V_\tau \cap L^p(\Omega_\tau)$,则由引理2有$\Big(\big(M_k(\tau)u_\tau, u_\tau\big)\Big)_T = 0, \forall k \geqslant 1$。根据定理1的估计可知方程(10)的解$u_\varepsilon$存在子序列。为了方便起见,仍用$\{u_{\varepsilon_k}\}$表示。则$u_{\varepsilon_k}$在$L^\infty(\tau, T; V_T) \cap L^\infty\big(\tau, T; L^p(\Omega_t)\big)$中弱$*$收敛于$u_\varepsilon$,$u'_{\varepsilon_k}$在$L^2(\tau, T; H_T)$中弱收敛于$u'_\varepsilon$。因此,$u_\varepsilon \in C\big([\tau, T]; H_T\big)$。$u_{\varepsilon_k}$在$L^2(\tau, T; V_T)$中弱收敛于$u_\varepsilon$,则由引理2和定理1可得

$$\int_\tau^T \left\|M(t)u_\varepsilon(t)\right\|_T^2 \mathrm{d}t \leqslant \liminf_{k\to+\infty}\Big(\big(M_k(t)u_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)\big)\Big)_T \mathrm{d}t \leqslant \liminf_{k\to+\infty}\frac{C}{k} = 0,$$

其中$C = (3 + T - \tau)\Big[\left\|u_\tau\right\|_{V_T}^2 + \varepsilon\left\|u_\tau\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2 + 2\tilde{C}_2\left\|u_\tau\right\|_{L^p(\Omega_T)}^p + 4\tilde{C}_0|\Omega_T| + \int_\tau^T \left|g(r)\right|_T^2 \mathrm{d}r\Big]$。由此得出$M(t)u_\varepsilon(t) = 0, t \in (\tau, T)$。即$u_\varepsilon(t) \in V_T$。另一方面,由定理1的估计和等式

$$u_{\varepsilon_k}(t) - u_{\varepsilon_k}(s) = \int_s^t u'_{\varepsilon_k}(r)\mathrm{d}r, \forall s, t \in [\tau, T], \forall k \geqslant 1。$$

有

$$\left|u_{\varepsilon_k}(t) - u_{\varepsilon_k}(s)\right|_T \leqslant C^{\frac{1}{2}}|t-s|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall s, t \in [\tau, T], \forall k \geqslant 1。 \tag{20}$$

则由定理1的估计可知,对任意$t \in [\tau, T]$和$k \geqslant 1$有$\left\|u_{\varepsilon_k}(t)\right\|_T^2 \leqslant C$。又因为空间$V_t$紧嵌入$H_T$,因

此，集合$\left\{u_\varepsilon\in V_t:\|u_\varepsilon(t)\|_T^2\leqslant C\right\}$在$H_T$中是紧的。由公式(20)和Ascoli-Arzela定理可知存在子序列(这里仍用u_k表示)使得

$$u_{\varepsilon_k}\to u_\varepsilon,\ k\to+\infty,\ u_\varepsilon\in C\left([\tau,T];H_T\right)。\tag{21}$$

因此，u_{ε_k}在$L^2(\tau,T;H_T)$中收敛于u_ε。再提取一个序列$u_{\varepsilon_k}(x,t)\to u_\varepsilon(x,t)$，$u_\varepsilon(x,t)\in\tilde{Q}_{\tau,T}$，则

$$f\left(u_{\varepsilon_k}(x,t)\right)\to f\left(u_\varepsilon(x,t)\right)\quad a.e.\ u_\varepsilon(x,t)\in\tilde{Q}_{\tau,T}。\tag{22}$$

根据公式(5)和公式(22)，可知序列$f\left(u_{\varepsilon_k}\right)$在$L^{p/p-1}\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$中是有界的，则

$$f\left(u_{\varepsilon_k}\right)弱收敛于f\left(u_\varepsilon\right),\ u_\varepsilon\in L^{p/p-1}\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)。\tag{23}$$

根据引理2和公式(10)有

$$\begin{gathered}\int_\tau^T-\left(u_{\varepsilon_k}(t),\varphi'(t)\right)_T\mathrm{d}t+\int_\tau^T\left(\left(\left(u_{\varepsilon_k}(t),\varphi(t)\right)\right)_{V_T}+\varepsilon\left(\left(u_{\varepsilon_k}(t),\varphi(t)\right)\right)_{H_0^1(\Omega_T)}\right)\mathrm{d}t+\\\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(t)\right),\varphi(t)\right)_T\mathrm{d}t=\int_\tau^T\left(g(t),\varphi(t)\right)_T\mathrm{d}t。\end{gathered}\tag{24}$$

其中$\varphi(t)\in\Phi_{\tau,T}$。由公式(21)，公式(23)和公式(24)可知，当$k\to+\infty$时，式(24)的解取极限得到u_ε是方程(8)的变分解。

为了证明u_ε在(τ,T)上满足能量等式，根据公式(9)得到如下的能量等式

$$\begin{gathered}\left|u_{\varepsilon_k}(T)\right|_T^2+2\int_\tau^T\left(\left\|u_{\varepsilon_k}(r)\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_k}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_t)}^2\right)\mathrm{d}r+2\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r\leqslant\\\left|u_\tau\right|_T^2+2\int_\tau^t\left(g(r),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r\qquad a.e.\ t\in(\tau,T)。\end{gathered}\tag{25}$$

则

$$\begin{gathered}\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r=\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right)-f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_{\varepsilon_k}(r)-u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r+\\\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r+\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r-\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r。\end{gathered}$$

将公式(4)应用于上式可得

$$\begin{gathered}\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r\geqslant-l\int_\tau^T\left|u_{\varepsilon_k}(r)-u_\varepsilon(r)\right|_T^2\mathrm{d}r+\\\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r+\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r-\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r。\end{gathered}$$

由上述不等式和公式(25)得到

$$\begin{gathered}\left|u_{\varepsilon_k}(T)\right|_T^2+2\int_\tau^T\left(\left\|u_{\varepsilon_k}(r)\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_k}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2\right)\mathrm{d}r\leqslant\\\left|u_\tau\right|_T^2+2l\int_\tau^T\left|u_{\varepsilon_k}(r)-u_\varepsilon(r)\right|_T^2\mathrm{d}r-2\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_k}(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r-\\2\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r+2\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r+2\int_\tau^t\left(g(r),u_{\varepsilon_k}(r)\right)_T\mathrm{d}r。\end{gathered}$$

根据公式(21)，公式(23)和范数的下半连续性可知u_{ε_k}在$L^2(\tau,T;V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$中弱收敛于$u_\varepsilon$。则

$$\left|u_\varepsilon(T)\right|_T^2\leqslant\left|u_\tau\right|_T^2+2\int_\tau^T\left[\left(g(r),u_\varepsilon(r)\right)_T-\left\|u_\varepsilon(r)\right\|_{V_T}^2-\varepsilon\left\|u_\varepsilon(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2-\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\right]\mathrm{d}r。$$

由引理2和$u_\varepsilon\in C\left([\tau,T];H_T\right)$可知$u_\varepsilon$满足能量等式。最后，假设存在序列$u_{\tau_n}\in V_\tau\cap L^p(\Omega_\tau)$使得$n\to+\infty$时，$u_{\tau_n}\to u_\tau$。对任意$n$，令$u_{\varepsilon_n}\in C\left([\tau,T];H_T\right)$且$u_{\varepsilon_n}$为对应初值$u_{\tau_n}$的方程(8)满足能量等式的变分解。因此，对任意$n\geqslant1$，

$$\left|u_{\varepsilon_n}(t)\right|_T^2+2\int_\tau^T\left(\left\|u_{\varepsilon_n}(r)\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_n}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2\right)\mathrm{d}r+2\int_\tau^T\left(f\left(u_{\varepsilon_n}(r)\right),u_{\varepsilon_n}(r)\right)_T\mathrm{d}r=$$

$$\left|u_{\tau n}\right|_{T}^{2}+2\int_{\tau}^{t}\left(g(r),u_{\varepsilon_n}(r)\right)_{T}\mathrm{d}r,\qquad t\in(\tau,T)。$$

根据上述等式和公式(3)可得

$$\left\{u_{\varepsilon_n}\right\}在L^{\infty}(\tau,T;\ H_T)\cap L^2(\tau,T;\ V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)是有界的。\tag{26}$$

另一方面,对于任意的$t\in[\tau,T]$和$n,m\geqslant 1$有

$$\left|u_{\varepsilon_n}(t)-u_{\varepsilon_m}(t)\right|_{T}^{2}+2\int_{\tau}^{t}\left\|u_{\varepsilon_n}(r)-u_{\varepsilon_m}(r)\right\|_{V_T}^{2}+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_n}(r)-u_{\varepsilon_m}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^{2}\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\left|u_{\tau_n}(t)-u_{\tau_m}(t)\right|_{T}^{2}+2l\int_{\tau}^{t}\left|u_{\varepsilon_n}(r)-u_{\varepsilon_m}(r)\right|_{T}^{2}\mathrm{d}r。$$

利用Gronwall引理可得

$$\left\{u_{\varepsilon_n}\right\}是一个柯西列,u_{\varepsilon_n}\in L^2(\tau,T;\ V_T)\cap C\left([\tau,T];\ H_T\right)。\tag{27}$$

根据公式(26)和公式(27)可得$n\to+\infty$时,u_{ε_n}在$L^2(\tau,T;\ V_T)\cap C\left([\tau,T];\ H_T\right)$上收敛于$u_\varepsilon$,$u_\varepsilon\in L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$。则如前所述,$L^{p/p-1}\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$中存在一个收敛的子序列$f\left(u_{\varepsilon_n}\right)$。当$n\to+\infty$时,$f\left(u_{\varepsilon_n}\right)$弱收敛于$f\left(u_\varepsilon\right)$。因此,$u_{\varepsilon_n}$取极限可得$u_\varepsilon$是方程(8)的变分解。又因为任意$u_{\varepsilon_n}$在$[\tau,T]$中都满足能量等式,则应用文献[9]的引理10得到$u_\varepsilon$在$[\tau,T]$上也满足能量等式。

2.3 变分解的唯一性

定理3 设$u_{\varepsilon_1},u_{\varepsilon_2}$是方程(8)对应初值$u_1(\tau),u_2(\tau)\in H_\tau$的两个变分解,当$\varepsilon\to 0$时它们都满足能量等式(7),则

$$\left|u_{\varepsilon_1}(t)-u_{\varepsilon_2}(t)\right|_{T}^{2}+2\int_{\tau}^{t}\left(\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{V_T}^{2}+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^{2}\right)\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{2l(t-\tau)}\left|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right|_{T}^{2},\qquad t\in(\tau,T)。$$

证明 根据文献[9]的引理6可得

$$\left|u_{\varepsilon_1}(t)-u_{\varepsilon_2}(t)\right|_{T}^{2}+2\int_{\tau}^{t}\left(\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{V_T}^{2}+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^{2}\right)\mathrm{d}r+$$
$$2\int_{\tau}^{t}\left(f\left(u_{\varepsilon_1}(r)\right)-f\left(u_{\varepsilon_2}(r)\right),u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right)_{T}\mathrm{d}r=\tag{28}$$
$$\left|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right|_{T}^{2}+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\tau}^{t-h}\left|\left(u_{\varepsilon_1}(r+h)-u_{\varepsilon_1}(r)\right)-\left(u_{\varepsilon_2}(r+h)-u_{\varepsilon_2}(r)\right)\right|_{T}^{2}\mathrm{d}r。$$

由等式$\left|u_{\varepsilon_1}(t)-u_{\varepsilon_2}(t)\right|_{T}^{2}=\left|u_{\varepsilon_1}(t)\right|_{T}^{2}+\left|u_{\varepsilon_2}(t)\right|_{T}^{2}-2\left(u_{\varepsilon_1}(t),u_{\varepsilon_2}(t)\right)_{T}$有

$$\zeta_{u_{\varepsilon_1},T}(t)=\zeta_{u_{\varepsilon_2},T}(t)=0,\qquad t\in(\tau,T),$$

和

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\tau}^{t-h}\left|\left(u_{\varepsilon_1}(r+h)-u_{\varepsilon_1}(r)\right)-\left(u_{\varepsilon_2}(r+h)-u_{\varepsilon_2}(r)\right)\right|_{T}^{2}\mathrm{d}r=$$
$$-2\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\tau}^{t-h}\left(u_{\varepsilon_1}(r+h)-u_{\varepsilon_1}(r),u_{\varepsilon_2}(r+h)-u_{\varepsilon_2}(r)\right)_{T}\mathrm{d}r\quad a.e.\ t\in(\tau,T)。$$

利用Cauchy-Schwarz不等式可得

$$\left|\frac{1}{h}\int_{\tau}^{t-h}\left(u_{\varepsilon_1}(r+h)-u_{\varepsilon_1}(r),u_{\varepsilon_2}(r+h)-u_{\varepsilon_2}(r)\right)_{T}\mathrm{d}r\right|\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{h}\int_{\tau}^{t-h}\left|u_{\varepsilon_1}(r+h)-u_{\varepsilon_1}(r)\right|_{T}^{2}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{h}\int_{\tau}^{t-h}\left|u_{\varepsilon_2}(r+h)-u_{\varepsilon_2}(r)\right|_{T}^{2}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}。$$

又因$\zeta_{u_{\varepsilon_1},T}(t)=\zeta_{u_{\varepsilon_2},T}(t)=\limsup\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{\tau}^{t-h}\left|u(r+h)-u(r)\right|_{T}^{2}\mathrm{d}r=0$,故有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\tau}^{t-h}\left(u_{\varepsilon_1}(r+h)-u_{\varepsilon_1}(r),u_{\varepsilon_2}(r+h)-u_{\varepsilon_2}(r)\right)_T\mathrm{d}r=0,\quad t\in(\tau,T)。\tag{29}$$

由公式(4),公式(28)和公式(29)可得

$$\left|u_{\varepsilon_1}(t)-u_{\varepsilon_2}(t)\right|_T^2+2\int_{\tau}^{t}\left(\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2\right)\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\left|u_{\varepsilon_1}(\tau)-u_{\varepsilon_2}(\tau)\right|_T^2+2l\int_{\tau}^{t}\left|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right|_T^2\mathrm{d}r。$$

最后,将Gronwall引理应用于上式可得

$$\left|u_{\varepsilon_1}(t)-u_{\varepsilon_2}(t)\right|_T^2+2\int_{\tau}^{t}\left(\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{V_T}^2+\varepsilon\left\|u_{\varepsilon_1}(r)-u_{\varepsilon_2}(r)\right\|_{H_0^1(\Omega_T)}^2\right)\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{2l(t-\tau)}\left|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right|_T^2\quad a.e.\,t\in(\tau,T)。$$

推论1 对于任意的$u_\tau\in H_\tau$,方程(6)至多存在一个满足能量等式(7)的变分解。

3 退化抛物方程变分解的适定性

本小节考虑了扰动方程(8)在单调区域上解的性质,即证明了该方程解的极限是退化抛物方程的解,进一步得到了单调区域上非线性退化抛物方程满足能量等式变分解的适定性。

定理4 设$\{\Omega_t\colon t\in R\}$是$R^N$中的一个具有光滑边界的有界域,$f$满足公式(3)和公式(4),外力项$g\in V_t^*$,则对任意的$u_\tau\in H_\tau$和$T>\tau$,方程(6)存在唯一的解$u$满足能量等式(7)且

$$u\in L^2(\tau,T;\,V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right),u\in C\left([\tau,T];\,L^2(\Omega_T)\right)。$$

另外,如果$u_\tau\in V_T\cap L^p(\Omega_T)$,则$u$也满足$u\in L^\infty(\tau,T;\,V_T)\cap L^\infty\left(\tau,T;\,L^p(\Omega_T)\right),u'\in L^2(\tau,T;\,H_T)$。

证明 对任意$0<\varepsilon<1$,非线性退化抛物方程的扰动方程(8)存在唯一的解

$$u_\varepsilon\in C\left([\tau,T];\,H_T\right)\cap L^2(\tau,T;\,V_T)\cap L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)。$$

对于任意的$\varphi\in\Phi_{\tau,T}$,u_ε满足

$$\int_{\tau}^{T}\int_{\Omega_t}\left(u_\varepsilon'\varphi+\sigma_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon\nabla\varphi+f(u_\varepsilon)\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\tau}^{T}\int_{\Omega_t}g\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{30}$$

并且在Ω_t上几乎处处$u_\varepsilon|_{t=\tau}=u_\tau$。将方程(8)与$u_\varepsilon$做内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_\varepsilon|_2^2+\int_{\Omega_T}\sigma_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega_T}f(u_\varepsilon)u_\varepsilon\mathrm{d}x=\int_{\Omega_T}gu_\varepsilon\mathrm{d}x\ 。$$

根据公式(3)和Hölder不等式,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_\varepsilon|_2^2+\int_{\Omega_T}\sigma_\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x+C_1\int_{\Omega_T}|u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\leqslant C_0|\Omega_T|+\frac{1}{2}\|g\|_{H_0^{-1,q}(\Omega_T)}^2+\frac{1}{2}\|u_\varepsilon\|_{V_T}^2,\tag{31}$$

其中$|\Omega_T|=\int_{\Omega_T}\mathrm{d}x$。由Gronwall引理可知,$u_\varepsilon$在$L^\infty(\tau,T;\,H_T)$上关于$\varepsilon$是一致有界的。

从公式(31)中提取一个弱收敛的子序列,为了方便仍用u_ε表示,则有

$$\begin{gathered}u_\varepsilon\text{在}L^2(\tau,T;\,V_T)\text{中弱收敛于}u,\\ u_\varepsilon\text{在}L^p\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)\text{中弱收敛于}u,\\ u_\varepsilon\text{在}L^\infty(\tau,T;\,H_T)\text{中弱}*\text{收敛于}u。\end{gathered}\tag{32}$$

此外,由公式(3)可得

$$\left|f(u_\varepsilon)\right|_{L^q(\tilde{Q}_{\tau,T})}^q\leqslant C\int_{\tau}^{T}\left(\int_{\Omega_T}\left(1+|u_\varepsilon|^{p-1}\right)^q\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\leqslant C\int_{\tau}^{T}\left(\int_{\Omega_T}\left(1+|u_\varepsilon|^{q(p-1)}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t。$$

因此,$f(u_\varepsilon)$在$L^q\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$上关于$\varepsilon$是一致有界的。现在,再提取一个弱收敛的子序列,也用u_ε表示,且有$f(u_\varepsilon)\rightharpoonup\chi,u_\varepsilon\in L^q\left(\tau,T;\,L^q(\Omega_t)\right)$。接下来,我们需要证明$\chi=f(u)$。事实上,$u_\varepsilon'$在

$L^2\left(\tau,T;\ H^{-1,\sigma}(\Omega_T)\right)+L^q\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$和$L^q\left(\tau,T;\ H^{-1,\sigma}(\Omega_T)\right)\cap L^q\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right)$中关于$\varepsilon$也是一致有界的。根据公式(30)有$\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}=\operatorname{div}\left(\sigma_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon\right)-f(u_\varepsilon)+g(x,t)$,对其应用Aubin-lions紧性定理并进一步提取子序列使得$u_\varepsilon\to u, u_\varepsilon\in L^2(\tau,T;\ H_T)$。$V_T\cap L^q(\Omega_T)\subset$。$\subset H_T\subset H^{-1,\sigma}\left((\Omega_T)\right)\cap L^q\left((\Omega_T)\right)$保证了几乎对任意$(x,t)\in\tilde{Q}_{\tau,T}$都存在子序列$u_\varepsilon$使得$u_\varepsilon\to u$。故由$f$的连续性和弱极限的唯一性可知,对任意$(x,t)\in\tilde{Q}_{\tau,T}$都有$f(u_\varepsilon)\to f(u), u_\varepsilon\in L^q\left(\tau,T;\ L^q(\Omega_T)\right)$。

由$\sigma_\varepsilon(x)=\sigma(x)+\varepsilon$得到

$$\int_\tau^T\int_{\Omega_t}\sigma(x)|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant\int_\tau^T\int_{\Omega_t}\sigma(x)|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\varepsilon\int_\tau^T\int_{\Omega_t}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_\tau^T\int_{\Omega_t}\sigma_\varepsilon(x)|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant C\left(|\Omega_T|,\lambda\right)。$$

且$\int_{\tilde{Q}_{\tau,T}}|u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\leqslant C$,$C$与$\varepsilon$无关。则

$$\varepsilon\int_\tau^T\int_{\Omega_t}|\nabla u|_\varepsilon|\nabla\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{3}}\int_\tau^T\int_{\Omega_t}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\varepsilon^{\frac{2}{3}}\int_\tau^T\int_{\Omega_t}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to0。$$

现假设$u_\tau\in V_T\cap L^p(\Omega_T)$,式(30)与$u'_\varepsilon$做内积可得

$$\left|u'_\varepsilon(t)\right|_T^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_\varepsilon(x)\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega_T)}+\left(f\left(u_\varepsilon(t)\right),u'_\varepsilon(t)\right)=\left(g(t),u'_\varepsilon(t)\right)_T。$$

由公式(5)和Hölder不等式有

$$\left|u'_\varepsilon(t)\right|_T^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_\varepsilon(x)\|u_\varepsilon\|^2_{V_T}+2\int_{\Omega_T}F\left(u_\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\leqslant\left|g(t)\right|_T^2,\tag{33}$$

和

$$-2\tilde{C}_0|\Omega_T|+2\tilde{C}_1\|u_\varepsilon(t)\|^p_{L^p(\Omega_T)}\leqslant2\int_{\Omega_T}F\left(u_\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\leqslant2\tilde{C}_0|\Omega_T|+2\tilde{C}_2\|u_\varepsilon(t)\|^p_{L^p(\Omega_T)}。\tag{34}$$

将公式(33)在$[\tau,T]$上关于t积分并代入公式(34)可得

$$\int_\tau^t\left|u'_\varepsilon(r)\right|_T^2\mathrm{d}r+\sigma_\varepsilon(x)\|u_\varepsilon\|^2_{V_T}+2\tilde{C}_1\|u_{k_n}(t)\|^p_{L^p(\Omega_T)}\leqslant\sigma_\varepsilon(x)\|u_\tau\|^2_{V_T}+4\tilde{C}_0|\Omega_T|+2\tilde{C}_2\|u_\tau\|^p_{L^p(\Omega_T)}+\int_\tau^t\left|g(r)\right|_T^2\mathrm{d}r。$$

则$\{u_\varepsilon\}$在$L^\infty(\tau,T;\ V_T)\cap L^\infty\left(\tau,T;\ L^p(\Omega_T)\right)$中有界,$\{u'_\varepsilon\}$在$L^2(\tau,T;\ H_T)$中也是有界的。通过$u_\varepsilon$的唯一性可知,解$u_\varepsilon$在$L^\infty(\tau,T;\ V_T)\cap L^\infty\left(\tau,T;\ L^p(\Omega_T)\right)$中弱*收敛于$u$,$u'_\varepsilon$在$L^2(\tau,T;\ H_T)$中弱收敛于$u'$。将方程(8)与$\varphi$做内积并且令$\varepsilon\to0$,则有

$$\int_\tau^T\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi+\sigma(x)\nabla u\nabla\varphi+f(u)\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_\tau^T\int_{\Omega_t}g\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \varphi\in C_0^\infty\left(\tilde{Q}_{\tau,T}\right),$$

其中u为方程(6)的弱解。

为了证明u在(τ,T)上满足能量等式,根据定理2得到如下的能量等式

$$\begin{aligned}&\left|u_\varepsilon(T)\right|_T^2+2\int_\tau^T\left(\|u_\varepsilon(r)\|^2_{V_T}+\varepsilon\|u_\varepsilon(r)\|^2_{H_0^1(\Omega_T)}\right)\mathrm{d}r+2\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r\leqslant\\&|u_\tau|_T^2+2\int_\tau^t\left(g(r),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r\qquad a.e.\ t\in(\tau,T)。\end{aligned}\tag{35}$$

则

$$\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r=\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right)-f\left(u(r)\right),u_\varepsilon(r)-u(r)\right)_T\mathrm{d}r+$$
$$\int_\tau^T\left(f\left(u_\varepsilon(r)\right),u(r)\right)_T\mathrm{d}r+\int_\tau^T\left(f\left(u(r)\right),u_\varepsilon(r)\right)_T\mathrm{d}r-\int_\tau^T\left(f\left(u(r)\right),u(r)\right)_T\mathrm{d}r。$$

将公式(4)应用于上式可得

$$\int_{\tau}^{T}\Big(f\big(u_{\varepsilon}(r)\big),u_{\varepsilon}(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r\geqslant -l\int_{\tau}^{T}\big|u_{\varepsilon}(r)-u(r)\big|_{T}^{2}\mathrm{d}r+\int_{\tau}^{T}\Big(f\big(u_{\varepsilon}(r)\big),u(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r+$$
$$\int_{\tau}^{T}\Big(f\big(u(r)\big),u_{\varepsilon}(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r-\int_{\tau}^{T}\Big(f\big(u(r)\big),u(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r。$$

由这个不等式和公式(35)得到

$$\big|u_{\varepsilon}(T)\big|_{T}^{2}+2\int_{\tau}^{T}\Big(\big\|u_{\varepsilon}(r)\big\|_{V_T}^{2}+\varepsilon\big\|u_{\varepsilon}(r)\big\|_{H_0^1(\Omega_T)}^{2}\Big)\mathrm{d}r\leqslant$$
$$|u_{\tau}|_{T}^{2}+2l\int_{\tau}^{T}\big|u_{\varepsilon}(r)-u(r)\big|_{T}^{2}\mathrm{d}r-2\int_{\tau}^{T}\Big(f\big(u_{\varepsilon}(r)\big),u(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r-$$
$$2\int_{\tau}^{T}\Big(f\big(u(r)\big),u_{\varepsilon}(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r+2\int_{\tau}^{T}\Big(f\big(u(r)\big),u(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r+2\int_{\tau}^{t}\Big(g(r),u_{\varepsilon}(r)\Big)_{T}\mathrm{d}r。\tag{36}$$

根据公式(32)有u_{ε}在$L^2(\tau,T;\ V_T)\cap L^p\big(\tilde{Q}_{\tau,T}\big)$中弱收敛于$u$。则$\varepsilon\to 0$时公式(36)如下

$$\big|u(T)\big|_{T}^{2}\leqslant|u_{\tau}|_{T}^{2}+2\int_{\tau}^{T}\Big[\big(g(r),u(r)\big)_{T}-\big\|u(r)\big\|_{V_T}^{2}-\Big(f\big(u(r)\big),u(r)\Big)_{T}\Big]\mathrm{d}r。$$

故u满足能量等式(7)。

4 拉回吸引子

本节首先给出了变分解产生的解过程,即非自治动力系统的双参数半群。其次,证明了解过程满足渐近紧性条件及其拉回吸收集的存在性,进一步得到了拉回吸引子的存在性。

4.1 变分解生成的过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$

设$g\in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{N+1})$,利用定理4和文献[9]的定义3可知,对任意$\tau\in R$,$u_{\tau}\in H_{\tau}$且初值为$u_{\tau}$的方程(2)存在满足能量等式(7)的变分解$u$,且$u\in C\big([\tau,T];\ H_T\big)$。

设D_1和D_2是Banach空间X_t中的非空子集,Hausdorff半距离定义如下

$$\mathrm{dist}(D_1,D_2):=\sup_{u\in D_1}\inf_{v\in D_2}d_t(u,v),\qquad D_1,D_2\in X_t。$$

考虑定义在Banach空间X_t上的过程U(也称为双参数半群),定义算子族

$$\{U(t,\tau);-\infty<\tau\leqslant t<+\infty\}:X_{\tau}\to X_t$$

满足$U(\tau,\tau)x=x$且$U(t,\tau)=U(t,r)U(r,\tau)$,$\forall\tau\leqslant r\leqslant t,x\in X_{\tau}$,且$U(t,\tau):H_{\tau}\to H_t$是连续算子族。

4.2 拉回$\mathcal{D}_{\lambda}$-吸收集

引理3[9] 设$X\subset Y$是一个Banach空间,X在Y中是紧的。假设$\{u_n\}$是$L^{\infty}(t_0,T;\ X)$中的有界序列,对任意$p\in[1,+\infty)$,v_n在$L^p(t_0,T;\ X)$中弱收敛于v,且$u\in C^0\big([t_0,T];\ Y\big)$,则对任意$t\in[t_0,T]$,$u(t)\in X$且$\big\|u(t)\big\|_X\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^{\infty}(t_0,T;\ X)}$,$\forall t\in[t_0,T]$。

定理5 设区域满足公式(1),公式(3)和公式(4),此外,假设$T>\tau+1$且$g\in L_{\mathrm{loc}}^2\big(\mathbb{R}^{N+1}\big)$满足

$$C_{g,T}:=\sup_{t\leqslant T}\int_{t-1}^{t}\big|g(r)\big|_{T}^{2}\mathrm{d}r<+\infty,$$

则对任意$u_{\tau}\in L^2(\Omega_{\tau})$,方程(6)满足能量等式的变分解$u$在$(\tau,T)$上也满足

$$u(t)\in V_T,\qquad \tau+1\leqslant t\leqslant T,$$

和

$$\big\|u(t)\big\|_{V_T}^{2}\leqslant C_3|u_{\tau}|_{\tau}^{2}\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}(\tau-T+2)}+\Big[4\tilde{C}_0+2C_3C_0\big(1+\lambda_{1,T}^{-1}\big)\Big]|\Omega_T|+\Big(1+2C_3\lambda_{1,T}^{-1}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{1,T}}\big)^{-1}\Big)C_{g,T},\tag{37}$$

其中$\tau+1\leqslant t\leqslant T$,$C_3:=(1+\tilde{C}_2C_1{}^{-1})$,$\lambda_{1,T}$是Dirichlet边界条件区域$\Omega_T$上算子$-\mathrm{div}\big(\sigma(x)\nabla\cdot\big)$的第一特征值。

证明 首先,假设$u_\tau\in V_\tau\cap L^p(\Omega_\tau)$,并且定义

$$y_{k_n}(t):=\|u_{k_n}(t)\|_{V_T}^2+k\big((M_k(t)u_{k_n}(t),u_{k_n}(t))\big)_T+2\int_{\Omega_T}F(u_{k_n}(x,t))\mathrm{d}x+2C_0|\Omega_T|,$$

其中u_{k_n}是u_k的Galerkin近似值,则根据公式(5)和公式(18),有

$$y_{k_n}(t)\geqslant 0\text{和}y'_{k_n}(t)\leqslant|g(t)|_T^2\quad a.e.\ t\in(\tau,T),\tag{38}$$

则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{k_n}(t)|_T^2+\|u_{k_n}(t)\|_{V_T}^2+k\big((M_k(t)u_{k_n}(t),u_{k_n}(t))\big)_T+\big(f(u_{k_n}(t)),u_{k_n}(t)\big)=\big(g(t),u_{k_n}(t)\big)_T\quad a.e.\ t\in(\tau,T),$$

利用公式(3)和上式可以推导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{k_n}(t)|_T^2+\|u_{k_n}(t)\|_{V_T}^2+2k\big((M_k(t)u_{k_n}(t),u_{k_n}(t))\big)_T+2C_1\|u_{k_n}(t)\|_{L^p(\Omega_T)}^P\leqslant 2C_0|\Omega_T|+\lambda^{-1}{}_{1,T}|g(t)|_T^2\quad a.e.\ t\in(\tau,T),\tag{39}$$

特别地有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_{k_n}(t)|_T^2+\lambda_{1,T}|u_{k_n}(t)|_T^2\leqslant 2C_0|\Omega_T|+\lambda^{-1}{}_{1,T}|g(t)|_T^2。$$

将上述不等式乘以$\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}t}$并积分得到

$$|u_{k_n}(t)|_T^2\leqslant|u_{\tau_n}|_T^2\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}(\tau-t)}+2C_0\lambda^{-1}{}_{1,T}|\Omega_T|+\lambda^{-1}{}_{1,T}\mathrm{e}^{-\lambda_{1,T}t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}r}|g(r)|_T^2\mathrm{d}r\quad\forall t\in[\tau,T]。\tag{40}$$

将公式(39)从t到$t+1$积分并结合公式(40)可得

$$\int_t^{t+1}\|u_{k_n}(s)\|_{V_T}^2\mathrm{d}s+2k\int_t^{t+1}\big((M_k(s)u_{k_n}(s),u_{k_n}(s))\big)_T\mathrm{d}s+2C_1\int_t^{t+1}\|u_{k_n}(s)\|_{L^p(\Omega_T)}^P\mathrm{d}s\leqslant |u_{\tau_n}|_T^2\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}(\tau-t)}+2C_0(1+\lambda^{-1}{}_{1,T})|\Omega_T|+\lambda^{-1}{}_{1,T}\int_t^{t+1}|g(r)|_T^2\mathrm{d}r+\lambda^{-1}{}_{1,T}\mathrm{e}^{-\lambda_{1,T}t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}r}|g(r)|_T^2\mathrm{d}r,\tag{41}$$

其中$\tau\leqslant t\leqslant T-1$,则有$\int_\tau^t\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}r}|g(r)|_T^2\mathrm{d}r\leqslant C_{g,T}\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}t}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{1,T}}\big)^{-1}$。故不等式(41)变为

$$\int_t^{t+1}\|u_{k_n}(s)\|_{V_T}^2\mathrm{d}s+2k\int_t^{t+1}\big((M_k(s)u_{k_n}(s),u_{k_n}(s))\big)_T\mathrm{d}s+2C_1\int_t^{t+1}\|u_{k_n}(s)\|_{L^p(\Omega_T)}^P\mathrm{d}s\leqslant |u_{\tau_n}|_T^2\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}(\tau-t)}+2C_0(1+\lambda^{-1}{}_{1,T})|\Omega_T|+2\lambda^{-1}{}_{1,T}C_{g,T}\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}t}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{1,T}}\big)^{-1}。\tag{42}$$

因此,根据公式(5)和y_{k_n}的定义有

$$y_{k_n}(t)\leqslant\|u_{k_n}(t)\|_{V_T}^2+k\big((M_k(t)u_{k_n}(t),u_{k_n}(t))\big)_T+2\tilde{C}_2\|u_{k_n}(t)\|_{L^p(\Omega_T)}^P+4\tilde{C}_0|\Omega_T|,$$

其中$t\in(\tau,T)$。结合上式和(42)可以得到

$$\int_t^{t+1}y_{k_n}(s)\mathrm{d}s\leqslant C_3|u_{\tau_n}|_\tau^2\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}(\tau-T)}+\big[4\tilde{C}_0+2C_3C_0(1+\lambda_{1,T}^{-1})\big]|\Omega_T|+2C_3\lambda_{1,T}^{-1}C_{g,T}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{1,T}}\big)^{-1},\tag{43}$$

其中$\tau\leqslant t\leqslant T-1$。现由公式(38)可得

$$y_{k_n}(t+1)\leqslant y_{k_n}(s)+\int_t^{t+1}|g(r)|_T^2\mathrm{d}r,\forall\tau\leqslant t\leqslant s\leqslant t+1\leqslant T。$$

将上式在t到$t+1$积分得到

$$y_{k_n}(t+1)\leqslant\int_t^{t+1}y_{k_n}(s)\mathrm{d}s+C_{g,T},\forall\tau\leqslant t\leqslant T-1。$$

根据该不等式和公式(43),有

$$\|u_{k_n}(t)\|_{V_T}^2\leqslant C_3|u_{\tau n}|_\tau^2\mathrm{e}^{\lambda_{1,T}(\tau-T)}+\big[4\tilde{C}_0+2C_3C_0(1+\lambda_{1,T}^{-1})\big]|\Omega_t|+\Big(1+2C_3\lambda_{1,T}^{-1}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda_{1,T}}\big)^{-1}\Big)C_{g,T},\tag{44}$$

其中$\tau+1\leqslant t\leqslant T$,则$n\to+\infty$时,$u_{k_n}$在$L^2(\tau,T;\ V_T)$上弱收敛于$u_k$,$u_{k_n}$在$L^2(t,t+1;\ V_T)$上弱收敛

于 u_k，$\tau\leqslant t\leqslant T-1$。因此，结合公式（44）和引理3得到 $u_k(t)\in V_T$，$\tau+1\leqslant t\leqslant T$，$\forall k\geqslant 1$，则

$$\left\|u_{k_n}(t)\right\|_{V_T}^2\leqslant C_3\left|u_\tau\right|_\tau^2 e^{\lambda_{1,T}(t-T+2)}+\left[4\tilde{C}_0+2C_3C_0\left(1+\lambda_{1,T}^{-1}\right)\right]\left|\Omega_T\right|+\left(1+2C_3\lambda_{1,T}^{-1}\left(1-e^{-\lambda_{1,T}}\right)^{-1}\right)C_{g,T}。$$

$k\to+\infty$ 时，u_k 在 $L^2(\tau,T;\ V_T)$ 上弱收敛于 u，$u\in C\left([\tau,T];\ H_T\right)$。$u$ 为初值为 $u_\tau\in V_\tau\cap L^p(\Omega_\tau)$ 的方程（6）的解。因此，u 满足公式（37）和公式（38），则任意的 $u_\tau\in L^2(\Omega_\tau)$，方程（6）的解也满足公式（37）和公式（38）。

为了证明过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\geqslant\tau}$ 存在拉回 D_λ-吸收集，设：

$$R_\lambda:=\left\{\rho:\mathbb{R}\to[0,\infty)e^{\lambda_{1,T}t}\rho^2(t)\to 0,t\to-\infty\right\},$$

且对任意 $\gamma_{\hat{D}}\in R_\lambda$ 有 $D(t)\subset\left\{u\in H_T:\|u\|_{L^2(\Omega_T)}\leqslant\gamma_{\hat{D}}(t)\right\}$。对任意 $t\in R$，记

$$R_\lambda{}^2(t)=1+C_3\left|u_\tau\right|_\tau^2 e^{\lambda_{1,T}(t-T+2)}+\left[4\tilde{C}_0+2C_3C_0\left(1+\lambda_{1,T}^{-1}\right)\right]\left|\Omega_T\right|+\left(1+2C_3\lambda_{1,T}^{-1}\left(1-e^{-\lambda_{1,T}}\right)^{-1}\right)C_{g,T}。\tag{45}$$

定义

$$B(t):=\left\{u\in V_t:\|u\|_t\leqslant R_\lambda(t)\right\},t\in R。$$

定义2 对任意 $\lambda_{1,T}>0$，D_λ 表示由非空子集族 $\hat{B}:=\left\{B(t):B(t)\subset H_T,t\in R\right\}$ 所构成的集合类，且满足 $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(e^{\lambda_{1,T}t}\sup\limits_{u\in D(t)}\|u\|_{L^2(\Omega_t)}^2\right)=0$。

定理6 若引理3的假设成立，则 H_T 中的中心在原点，半径为 $r_{\hat{D}(t)}$ 的闭球族

$$\hat{B}_\lambda=\left\{B_\lambda(t)=\bar{B}\left(0,r_{\hat{D}(t)}\right):t\in R\right\}$$

为方程（2）的解过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\geqslant\tau}$ 的拉回 D_λ-吸收集且 $\hat{B}_\lambda\in D_\lambda$。

证明 根据公式（37）易得 $\hat{B}_\lambda$ 为过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\geqslant\tau}$ 的拉回 D_λ-吸收集。由公式（45）可知，对任意 $t\leqslant 0$，当 $t\to-\infty$ 时，有 $e^{\lambda_{1,T}t}R_\lambda{}^2(t)\to 0$。故 $\hat{B}_\lambda\in D_\lambda$。

4.3 拉回 D_λ-吸引子

首先，在 $B(\tau)\times B(\tau)$ 上定义收缩函数 $\eta_{\tau,t}(u_1,u_2)=2l\int_\tau^t\left\|u_1(r)-u_2(r)\right\|_r^2 dr$，其中

$$B(\tau):=\left\{u\in V_\tau:\|u\|_{V_\tau}\leqslant R_\lambda(t)\right\},t\geqslant\tau。$$

定理7 若引理3的假设成立，则过程 $\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\geqslant\tau}$ 在 H_T 中拉回 D_λ-渐近紧。

证明 令 u_1 和 u_2 为分别以 $B(\tau)$ 中的 $u_{\tau1}$ 和 $u_{\tau2}$ 为初值且满足能量等式（10）和方程（2）的两个变分解，将 u_1 和 u_2 满足的方程做差，并记作 $\omega=u_1-u_2$，然后等式两边同时关于 ω 做内积，有

$$\frac{d}{dr}\left\|\omega(r)\right\|_r^2+\left\|\omega(r)\right\|_{V_r}^2\leqslant 2l\left\|\omega(r)\right\|_r^2,$$

进一步对任意 $r\in[\tau,t]$ 有

$$\frac{d}{dr}\left\|\omega(r)\right\|_r^2+2\lambda_{1,T}\left\|\omega(r)\right\|_{V_r}^2\leqslant 2l\left\|\omega(r)\right\|_r^2,$$

在上式的两端同时乘以 $e^{\lambda_{1,T}r}$，并在 $[\tau,t]$ 上积分得到

$$\left\|\omega(t)\right\|_t^2\leqslant\left\|\omega(\tau)\right\|_\tau^2 e^{-2\lambda_{1,T}(t-\tau)}+2l\int_\tau^t\left\|\omega(r)\right\|_r^2 e^{-2\lambda_{1,T}(t-r)}dr\leqslant\left\|\omega(\tau)\right\|_\tau^2 e^{-2\lambda_{1,T}(t-\tau)}+2l\int_\tau^t\left\|\omega(r)\right\|_r^2 dr。$$

由 V_τ 在 H_τ 中的稠密性以及 $u_n(t)\to u(t)$，$u(t)\in C\left([\tau,T];\ V_T\right)$，对任意 $u_1(\tau)$，$u_2(\tau)$ 有

$$\left\|u_2(t)-u_1(t)\right\|_t^2\leqslant\left\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\right\|_\tau^2 e^{-2\lambda_{1,T}(t-\tau)}+2l\int_\tau^t\left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|_r^2 dr。$$

存在 $\tau_1\left(\varepsilon,t,\hat{B}_\lambda(\tau)\right)\leqslant t$，当 $\tau\leqslant\tau_1$ 时有 $\left\|u_2(\tau)-u_1(\tau)\right\|_\tau^2 e^{-2\lambda_{1,T}(t-\tau)}\leqslant\varepsilon$，则

$$\left\|U(t,\tau)u_2(\tau)-U(t,\tau)u_1(\tau)\right\|_{V_\tau}^2\leqslant\varepsilon+\eta_{\tau,t}\big(u_1(\tau),u_2(\tau)\big)。$$

故解过程$\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\geqslant\tau}$在$H_T$中拉回$D_\lambda$-渐近紧。

定理8 若引理3的假设成立,则$\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\geqslant\tau}$在$H_T$存在唯一的拉回$D_\lambda$-吸引子,集簇$\hat{\mathcal{A}}=\left\{\mathcal{A}(t):\mathcal{A}(t):=\omega\left(\hat{B},t\right),t\in R\right\}$为过程$U(t,\tau)$的拉回$D_\lambda$-吸引子。

证明 利用定理5和定理7验证文献[9]中的定义21可知,解过程$\left\{U(t,\tau)\right\}_{t\geqslant\tau}$存在拉回$D_\lambda$-吸引子。又由定理6得到$\hat{B}_\lambda\in D_\lambda$,即该吸引子是唯一的。故上述结论得证。

参考文献:

[1] BONACCORSI S, GUATTERI G. A Variational Approach to Evolution Problems with Variable Domains[J]. *J Differ Equ*, 2001, **175**(1): 51-70. DOI: 10.1006/jdeq.2000.3959.

[2] CALDIROLI P, MUSINA R. On a Variational Degenerate Elliptic Problem[J]. *NoDEA-Nonlinear Diff*, 2000, **7**(2): 187-199. DOI: 10.1007/s000300050004.

[3] CARABALLO T, ŁUKASZEWICZ G, REAL J. Pullback Attractors for Asymptotically Compact Non-autonomous Dynamical Systems[J]. *Nonlinear Anal Theory Methods Appl*, 2006, **64**(3): 484-498. DOI: 10.1016/j.na.2005.03.111.

[4] CHOLEWA J W, DLOTKO T. Global Attractors in Abstract Parabolic Problems[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.

[5] CRAUEL H, KLOEDEN P E, REAL J. Stochastic Partial Differential Equations with Additive Noise on Time-varying Domains[J]. *Sema J*, 2010, **51**(1): 41-48. DOI: 10.1007/BF03322552.

[6] KLOEDEN P E, RASMUSSEN M. Nonautonomous Dynamical Systems[M]. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2011.

[7] BERNARDI M L, POZZI G A, SAVARÉ G. Variational Equations of Schrödinger-type in Non-cylindrical Domains[J]. *J Differ Equ*, 2001, **171**(1): 63-87. DOI: 10.1006/jdeq.2000.3834.

[8] 周峰. 非柱形区域上两类发展方程解的长时间行为研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2016.
ZHOU F. Study on Long-term Behavior of Solutions of Two Kinds of Evolution Equations on Non-cylindrical Domains[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2016.

[9] KLOEDEN P E, MARÍN-RUBIO P, REAL J. Pullback Attractors for a Semilinear Heat Equation in a Non-cylindrical Domain[J]. *J Differ Equ*, 2008, **244**(8): 2062-2090. DOI: 10.1016/j.jde.2007.10.031.

[10] KULIEVA G, KULIEV K. Rothe's Method for Nonlinear Parabolic Variational Inequalities in Noncylindrical Domains[C]// International Uzbekistan-Malaysia Conference on "Computational Models and Technologies (cmt2020)": cmt2020. 2021.

[11] 李娟. 一些非线性退化抛物方程解的研究[D]. 南昌: 南昌航空大学, 2017.
LI J. Solutions of Some Nonlinear Degenerate Parabolic Equations[D]. Nanchang: Nanchang Hangkong University, 2017.

[12] LI H T, MA S, ZHONG C K. Long-time Behavior for a Class of Degenerate Parabolic Equations[J]. *Discrete Continuous Dyn Syst A*, 2014, **34**(7): 2873-2892. DOI: 10.3934/dcds.2014.34.2873.

[13] LI H T, MA S. Asymptotic Behavior of a Class of Degenerate Parabolic Equations[J]. *Abstr Appl Anal*, 2012, **2012**: 1-15. DOI: 10.1155/2012/673605.

[14] 李心. 非线性耗散系统解的长时间行为与稳态统计性质研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2016.
LI X. The Long Time Behavior of Solutions and Stationary Statistical Characteristics Nonlinear Dissipative Systems [D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2016.

[15] 苏彩月, 汪颖. 一类变指标四阶退化抛物方程解的长时间行为和稳定性[J]. 大连交通大学学报, 2022, **43**(5): 109-111. DOI: 10.13291/j.cnki.djdxac.2022.05.020
SU C Y, WANG Y. Long-time Behavior and Stability of Solutions for a Fourth-order Degenerate Parabolic Equation with Variable Exponents[J]. *J Dalian Jiaotong Univ*, 2022, **43**(5): 109-111. DOI: 10.13291/j. cnki. djdxac.2022.05.020.