山西大学学报(自然科学版)47(2):328－332,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023094

广义Petersen图的哈密尔顿指数

赵丽颖,吕盛梅*
(青海民族大学 数学与统计学院,青海 西宁 810007)

摘　要:Alspach的研究已经证明:除了$P(n,k)$($n\equiv 5(\mathrm{mod}6)$;$k=2,(n-1)/2,(n+1)/2,n-2$)和$P(n, n/2)$($n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$;$n\geqslant 8$)两种情形,广义Petersen图都是哈密尔顿的。本文在此基础上,考虑了这两种情形下的哈密尔顿指数,并证明了:$P(n,k)$($n\equiv 5(\mathrm{mod}6)$;$k=2,(n-1)/2,(n+1)/2,n-2$)的哈密尔顿指数为1;$P(n,n/2)$($n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$;$n\geqslant 8$)的哈密尔顿指数为2。至此,广义Petersen图的哈密尔顿指数问题得到完全解决。

关键词:广义Petersen图;迭代线图;哈密尔顿指数;枝
中图分类号:O157.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)02-0328-05

Hamiltonian Indices of Generalized Petersen Graphs

ZHAO Liying, LÜ Shengmei*
(*School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining* 810007, *China*)

Abstract: Alspach's research has proved that Generalized Petersen Graphs are all Hamiltonian except for $P(n,k)$ ($n\equiv 5(\mathrm{mod}6)$; $k=2,(n-1)/2,(n+1)/2,n-2$) and $P(n, n/2)$ ($n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$; $n\geqslant 8$). On this basis, we consider the Hamiltonian indices of these two cases in this paper, and show that: the Hamiltonian indices of $P(n, k)$($n\equiv 5(\mathrm{mod}6)$; $k=2,(n-1)/2,(n+1)/2,n-2$) are all 1; the Hamiltonian indices of $P(n, n/2)$($n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$; $n\geqslant 8$) are all 2. Now, the problem of Hamiltonian indices of Generalized Petersen Graphs is completely solved.

Key words: generalized Petersen graph; iterated line graph; hamiltonian index; branch

0　引言

哈密尔顿问题起源于英国数学家Hamilton提出的周游世界的游戏,是图的一种遍历问题。该问题在运筹学、通信网络、社交网络、复杂性理论、计算机科学和编码理论等领域中都有着重要的应用,参见文献[1-2]。关于哈密尔顿问题的研究,主要有以下方面:偶因子指数问题、哈密尔顿指数问题、最长圈问题、泛圈问题、哈密尔顿连通问题、哈密尔顿连通性的禁用子图问题等等,具体可参见Gould系列综述文献[3-5]。哈密尔顿指数问题作为哈密尔顿问题的一个重要分支,引起了大家的关注。1965年,Harary和Nash-Williams在文献[6]中刻画了所有图G,使得其线图$L(G)$是哈密尔顿的;1968年,Chartrand在文献[7]中提出了哈密尔顿指数的概念,后来他还证明了连通图(除路之外)的哈密尔顿指数总是存在的。1981年,Bertossi在文献[8]中证明了判断一个给定的图的线图为哈密尔顿图是NP-完全的。2014年,熊黎明和朱倩倩给出了有关哈密尔顿指数

收稿日期:2023-03-03;**接受日期**:2023-05-10
基金项目:青海民族大学2023年度校级规划项目(23GH11);青海民族大学研究生创新项目(07M2022006)
作者简介:赵丽颖(1997-),女,山东烟台人,硕士,研究方向为结构图论。E-mail:1104642479@qq.com
* **通信作者**:吕盛梅(LÜ Shengmei),E-mail:meizi3411@163.com
引文格式:赵丽颖,吕盛梅.广义Petersen图的哈密尔顿指数[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(2):328-332.DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023094

的综述文献[9]。

设$G=(V(G),E(G))$是顶点集和边集分别为$V(G)$和$E(G)$的简单无向图，图G的线图$L(G)$指的是以G的边集为顶点集且$L(G)$的两个顶点(即G的两条边)邻接当且仅当它们在G中是关联的。本文考虑的图均为有限无向无环允许有重边的简单图，且所有未定义的术语和符号参见文献[10]。对于整数$m\geqslant 1$，m次迭代线图$L^m(G)$递归地定义为$L(L^{m-1}(G))$，其中，$L^0(G)=G$，$L^1(G)=L(G)$。图G的哈密尔顿指数是指使得$L^m(G)$是哈密尔顿的最小整数m，记为$h(G)$。

广义Petersen图记为$P(n,k)$，其点集和边集分别为：

$$V=\{u_0,u_1,\cdots u_{n-1},v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\},$$

$$E=\{u_iu_{i+1},u_iv_i,v_iv_{i+k}|0\leqslant i\leqslant n-1\},$$

其中下标取模n，$n\geqslant 2$，$1\leqslant k\leqslant n-1$。Petersen图即$P(5,2)$。

Watkins在文献[11]中引入了广义Petersen图的概念，并提出了除了$P(5,2)\cong P(5,3)$外，每个立方图$P(n,k)$是否存在一个1因子分解。与此同时，Robertson在文献[12]中证明了$P(n,2)$是哈密尔顿的当且仅当$n\neq 5(\mathrm{mod}\,6)$。在文献[13]中Bondy也单独证明了这个结果，后来Bondy也证明了当$n\neq 5$时，$P(n,3)$是哈密尔顿的。在1972年，Castagna和Prins给出了一个猜想[14]：如果不同构于$P(n,2)$，当$n\equiv 5(\mathrm{mod}\,6)$时，广义Petersen图$P(n,k)$是哈密尔顿的。在$n$和$k$互质的情况下，Bannai在文献[15]中证明了Castagna-Prins猜想，给出了以下定理：

定理1[15] 如果n和k互质，则$P(n,k)$是哈密尔顿的，除非$n\equiv 5(\mathrm{mod}\,6)$，并且$P(n,k)\cong P(n,2)$，即$k=2,(n-1)/2,(n+1)/2,n-2$。

Alspach在文献[16]中证明了即使当$4\leqslant k\leqslant n/2$不与$n$互质时，$P(n,k)$也是哈密尔顿的。并且证明了以下重要定理：

定理2[16] 广义Petersen图$P(n,k)$是哈密尔顿的当且仅当不是以下两种情况：

(1) $P(n,2)\cong P(n,n-2)\cong P\Big(n,(n-1)/2\Big)\cong P\Big(n,(n+1)/2\Big)$，$n\equiv 5(\mathrm{mod}\,6)$；

(2) $P(n,n/2)$，$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$并且$n\geqslant 8$。

由定理2我们知道，当$n\equiv 5(\mathrm{mod}\,6)$时，$P(n,2)$，$P(n,n-2)$，$P(n,(n-1)/2)$，$P(n,(n+1)/2)$都不是哈密尔顿的；当$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$，$n\geqslant 8$时，$P(n,n/2)$也不是哈密尔顿的。然而众所周知对一个图做线图更容易在其中找到哈密尔顿圈，此时我们自然地想到，这两种情形下做几次迭代线图就可以找到哈密尔顿圈，即它们的哈密尔顿指数是多少？本文中我们主要解决了上述问题。

1 主要结果

图G中的一个控制闭迹(简称DCT)是指G中的一个闭迹(一个欧拉子图)T，使得G的每条边至少有一个顶点在T上。1965年，Harary和Nash-Williams证明了图G中DCT的存在性和线图$L(G)$中哈密尔顿圈的存在性之间的关系[6]，其主要结果如下：

定理3[6] 设G是一个至少三条边的连通图，线图$L(G)$是哈密尔顿的当且仅当图G有一个DCT。

Chartrand等和Sarazin在文献[17-18]中分别给出了哈密尔顿指数与最大度$\Delta(G)$和最小度$\delta(G)$之间的关系：

定理4[17] 设G是一个最小度至少3的连通图，则$h(G)\leqslant 2$。

定理5[18] 设G是一个非路的连通图，则$h(G)\leqslant |V(G)|-\Delta(G)$。

2009年，Chen和Lai等在文献[19]中推广了这两个定理，给出了哈密尔顿连通指数与最大度和最小度之间的关系。若图G的任意两点u,v之间都有一条哈密尔顿路存在，则称图G是哈密尔顿连通的，其哈密尔顿连通指数是指使得$L^m(G)$是哈密尔顿连通的最小整数m，记为$hc(G)$。

定理6[19] 设G是一个最小度至少为3的连通图，则$hc(G)\leqslant 3$。

定理7[19] 设G是一个非路非圈的连通图，则$hc(G)\leqslant |V(G)|-\Delta(G)+1$。

设H是图G的一个子图，顶点u在H中的度记为$d_H(u)$。H的两个子图H_1,H_2之间的距离$d_G(H_1,H_2)$，定义为$\min\{d_H(u_1,u_2)$:

$u_1\in V(H_1),u_2\in V(H_2)\}$，其中 $d_H(u_1,u_2)$ 表示 H 中从 u_1 到 u_2 的最短路长。记 $V_i(G)=\{v\in V(G):d_G(v)=i\}$，$G$ 中的枝 b 指的是内部顶点的度为2，外部顶点的度不为2的路。如果一条枝的长度为1，那么它没有内部顶点。用 $B(G)$ 表示所有枝的集合，$B_1(G)$ 表示 $B(G)$ 中有一个末端点是1度点的集合。$B_H(G)$ 定义为 G 中所有边都在 H 里的枝的集合。

2002，熊黎明和刘展鸿给出以下定理[20]：

定理8[20] 设 G 是一个至少三条边的连通图并且整数 $m\geqslant 2$，$L^m(G)$ 是哈密尔顿的当且仅当 $EU_m(G)\neq\varnothing$。其中 $EU_m(G)$ 表示图 G 中满足以下条件的子图 H 的集合：

（1）$d_H(x)\equiv 0(\bmod 2),\forall x\in V(H)$；

（2）$V_0(H)\subseteq\bigcup_{i\geqslant 3}^{\Delta(G)}V_i(G)\subseteq V(H)$；

（3）对任意的枝 $b\in B(G)\backslash B_H(G)$，都有 $|E(b)|\leqslant m+1$；

（4）对任意的枝 $b\in B_1(G)$，都有 $|E(b)|\leqslant m$；

（5）对于 H 的每个子图 H_1，都有 $d_G(H_1,H-H_1)\leqslant m-1$。

关于哈密尔顿指数的结果还有很多，比如哈密尔顿指数的上下界问题，哈密尔顿指数的度和问题、哈密尔顿指数在一定条件下的禁用子图集等，具体可参见文献[21-24]。

下面给出我们的结论：

定理9 当 $n\equiv 5(\bmod 6)$ 时，$P(n,k)$ 的哈密尔顿指数为1，即 $h(P(n,k))=1$，此时 $k=2,(n-1)/2,(n+1)/2$ 或 $n-1$。

证明 由定理3得知，我们需要在 $P(n,k)$ 里找到一个控制闭迹。根据定理2中(1)的等价关系，我们只需要证明这四种情况中其中一个的哈密尔顿指数的情形。下面我们证明当 $k=2$ 时的结果，即在 $P(n,2)$ 中找到一个控制闭迹。

当 $n\equiv 5(\bmod 6)$ 时，设 $n=6t+5$，为了方便，我们把广义 Petersen 图外圈的点记为 $u_0,u_1,\cdots,u_{6t+4}$，内圈的点记为 $v_0,v_1,\cdots,v_{6t+4}$。内圈与外圈的点用 u_iv_i 相连，$0\leqslant i\leqslant 6t+4$。

下面给出当 n 取不同情形时，在 $P(n,2)$ 中都能找到控制闭迹：

（1）当 $t=0$ 时，$n=5$，即为 Petersen 图（如图1），$u_0u_1u_2u_3v_3v_1v_4v_2v_0u_0$ 是一个控制闭迹。

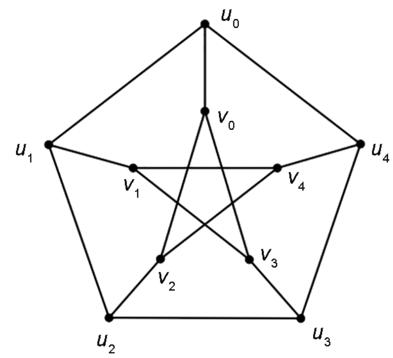

图1 Petersen图

Fig. 1 Petersen Graph

（2）当 $t\neq 0$ 且 $n=6t+5$ 时，$P(n,2)$ 里也有一个DCT，即

$u_0u_1u_2\cdots u_{6t+3}v_{6t+3}v_{6t+1}\cdots v_1v_{6t+4}v_{6t+2}\cdots v_0u_0$。

（3）当 $t\neq 0$ 且 $n=6(t+1)+5$ 时，$P(n,2)$ 里仍然有一个DCT。此时，$P(n,2)$ 外圈的点为 $u_0,u_1,\cdots,u_{6t+4},\cdots,u_{6t+10}$，内圈的点为 $v_0,v_1,\cdots,v_{6t+4},\cdots,v_{6t+10}$。由 $P(n,2)$ 的结构可知，我们可以在其中找到一个DCT：

$$u_0u_1u_2\cdots u_{6t+3}\cdots u_{6t+9}v_{6t+9}v_{6t+7}\cdots$$
$$v_{6t+1}\cdots v_1v_{6t+10}v_{6t+8}\cdots v_{6t+2}\cdots v_0u_0。$$

综合以上三种情况，$L(P(n,2))$ 是哈密尔顿的，即 $h(P(n,2))=1$。因此，$h(P(n,k))=1$（此时 $k=2,(n-1)/2,(n+1)/2$ 或 $n-2$）。

定理10 当 $n\geqslant 8$，$n\equiv 0(\bmod 4)$ 时，$P(n,n/2)$ 的哈密尔顿指数为2，即 $h(P(n,n/2))=2$。

证明 为了方便，我们把广义 Petersen 图外圈的点记为 $u_0,u_1,\cdots,u_{n-1}$，内圈的点记为 $v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}$。

（1）首先证明 $h(P(n,n/2))\leqslant 2$。

由定理8，我们只需要证明 $EU_2(P(n,n/2))\neq\varnothing$。因此，我们选择子图 H 为 $P(n,n/2)(n\geqslant 8,n\equiv 0(\bmod 4))$ 的所有 u_i 构成的集合，且 $E(H)=\varnothing$，则 H 显然满足定理8中条件（1）：$d_H(x)\equiv 0(\bmod 2),\forall x\in V(H)$ 和定理8条件（2）：$V_0(H)\subseteq\bigcup_{i\geqslant 3}^{\Delta(P)}V_i(P)\subseteq V(H)$。

对任意的枝 $b\in B(P(n,n/2))\backslash B_H(P(n,n/2))$，

此时其长度不超过3,即$\left|E(b)\right| \leqslant 3 = m+1$,其中$m=2$,于是定理8中(3)成立。

由于图$P(n, n/2)(n \geqslant 8, n \equiv 0(\bmod 4))$中,没有$B_1(P(n, n/2))$,显然定理8中(4)成立。

对于H中的每个子图H_1,H_1与$H-H_1$之间的距离显然为1,即$d_{P(n, n/2)}(H_1, H-H_1)=1 \leqslant m-1$,其中$m=2$,于是定理8中(5)成立。

因此,$EU_2(P(n, n/2)) \neq \varnothing$,$L^2(G)$是哈密尔顿的,即$h(P(n, n/2)) \leqslant 2$成立。

(2)由定理2知,当$n \geqslant 8, n \equiv 0(\bmod 4)$时,$P(n, n/2)$不是哈密尔顿图,即$h(P(n, n/2)) \neq 0$。下面只需证明$h(P(n, n/2)) \neq 1$。

我们用反证法,假设$h(P(n, n/2))=1$,即$L\big(P(n, n/2)\big)$是哈密尔顿图。由定理3可知,$P(n, n/2)$有一个DCT,记为T。由$2=\delta\big(P(n, n/2)\big)<\Delta\big(P(n, n/2)\big)=3$可知,$T$为一个圈。因为$T$要控制$P(n, n/2)$的所有边,所以$P(n, n/2)$中的枝$u_i v_i v_{i+\frac{n}{2}} u_{i+\frac{n}{2}}$均包含在$T$中,我们不妨假设$u_0 u_1 \in E(T)$,那么由$\left\{u_i v_i v_{i+\frac{n}{2}} u_{i+\frac{n}{2}} \middle| 0 \leqslant i \leqslant n-1\right\} \subset E(T)$可知,只能有边$u_2 u_3, u_4 u_5, \cdots, u_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1}, \cdots, u_{n-2} u_{n-1} \in E(T)$(在$P(8,4)$中,$u_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1}=u_4 u_5$)。此时,$u_0 v_0 v_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1} v_{\frac{n}{2}+1} v_1 u_1 u_0$就是$T$中一个长为8的圈且为这种情况下的最长圈,即为$T$。但T中不包含枝$u_2 v_2 v_{\frac{n}{2}+2} u_{\frac{n}{2}+2}$,矛盾。因此$h(P(n, n/2)) \neq 1$。

综上所述,当$n \geqslant 8, n \equiv 0(\bmod 4)$时,$P(n, n/2)$的哈密尔顿指数为2,即$h(P(n, n/2))=2$。

2 结论

本文在前人研究的基础上,进一步考虑了广义Petersen图的哈密尔顿指数,并对文献[15]遗留的两种情形展开进一步研究,得到了当$n \equiv 5(\bmod 6)$时,$h(P(n,k))=1$ $(k=2,(n-1)/2,(n+1)/2$或$n-2)$;当$n \geqslant 8$且$n \equiv 0(\bmod 4)$时,$h(P(n, n/2))=2$。该结论意味着广义Petersen图的哈密尔顿指数问题完全被解决。然而关于广义Petersen图的哈密尔顿连通指数研究结果较少,因此我们将进一步考虑如下问题:

问题(1):广义Petersen图$P(n,k)$的哈密尔顿连通指数是多少?

问题(2):广义Petersen图$P(n,k)$的哈密尔顿指数和哈密尔顿连通指数之间有什么关系?

参考文献:

[1] 康子扬, 彭凌辉, 周干. 一种用于片上网络的拥塞感知哈密尔顿最短路径路由算法[J]. 计算机工程与科学, 2022, **44**(6): 986-993. DOI: 10.3969/j. issn. 1007-130X.2022.06.005.
KANG Z Y, PENG L H, ZHOU G. A Congestion-Aware Hamilton Shortest Path Routing Algorithm for Network on Chip[J]. *Comp Eng & Sci*, 2022, **44**(6): 986-993. DOI: 10.3969/j.issn.1007-130X.2022.06.005.

[2] 祝爱卿, 金鹏展, 唐贻发. 基于辛格式的深度哈密尔顿神经网络[J]. 计算数学, 2020, **42**(3): 370-384. DOI: 10.12286/jssx.2020.3.370.
ZHU A Q, JIN P Z, TANG Y F. Deep Hamiltonian Neural Networks Based on Symplectic Integrators[J]. *Math Numer Sinica*, 2020, **42**(3): 370-384. DOI: 10.12286/jssx.2020.3.370.

[3] GOULD R J. Updating the Hamiltonian Problem: A Survey[J]. *J Graph Theory*, 1991, **15**(2): 121-157. DOI: 10.1002/jgt.3190150204.

[4] GOULD R J. Advances on the Hamiltonian Problem - A Survey[J]. *Graphs Comb*, 2003, **19**(1): 7-52. DOI: 10.1007/s00373-002-0492-x.

[5] GOULD R J. Recent Advances on the Hamiltonian Problem: Survey III[J]. *Graphs Comb*, 2014, **30**(1): 1-46. DOI: 10.1007/s00373-013-1377-x.

[6] HARARY F, NASH-WILLIAMS C St J A. On Eulerian and Hamiltonian Graphs and Line Graphs[J]. *Can Math Bull*, 1965, **8**(6): 701-709. DOI: 10.4153/cmb-1965-051-3.

[7] CHARTRAND G. On Hamiltonian Line-graphs[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1968, **134**(3): 559-566. DOI: 10.1090/s0002-9947-1968-0231740-1.

[8] BERTOSSI A A. The Edge Hamiltonian Path Problem is NP-complete[J]. *Inf Process Lett*, 1981, **13**(4/5): 157-159. DOI: 10.1016/0020-0190(81)90048-X.

[9] 熊黎明, 朱倩倩. 关于哈密尔顿指数的综述[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2014, **38**(3): 229-235. DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2014.03.002.
XIONG L M,ZHU Q Q. A Review of Hamilton Index[J]. *J Jiangxi Norm Univ Nat Sci Ed*, 2014, **38**(3): 229-235. DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2014.03.002.

[10] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Appli-*

cations[M]. New York: American Elsevier Pub. Co., 1976.

[11] WATKINS M E. A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs[J]. *J Comb Theory*, 1969, **6**: 152−164. DOI: 10.1016/S0021-9800(69)80116-X.

[12] ROBERTSON G N. Graphs Under Grith, Valency, and Connectivity Constraints[M]. Ontario: University of Waterloo, 1968.

[13] BONDY J A. Variations on the Hamiltonian Theme[J]. *Can Math Bull*, 1972, **15**(1): 57−62. DOI: 10.4153/CMB-1972-012-3.

[14] CASTAGNA F, PRINS G. Every Generalized Petersen Graph has a Tait Coloring[J]. *Pacific J Math*, 1972, **40**: 53−58. DOI: 10.2140/pjm.1972.40.53..

[15] BANNAI K. Hamiltonian Cycles in Generalized Petersen Graphs[J]. *J Comb Theory Ser B*, 1978, **24**(2): 181−188. DOI: 10.1016/0095-8956(78)90019-9.

[16] ALSPACH B. The Classification of Hamiltonian Generalized Petersen Graphs[J]. *J Comb Theory Ser B*, 1983, **34**(3): 293−312. DOI: 10.1016/0095-8956(83)90042-4.

[17] CHARTRAND G, WALL C E. On the Hamiltonian Index of a Graph[J]. *Studia Sci Math Hungar*, 1973, **8**: 43−48. DOI: 10.1080/03081080108818697.

[18] SARAZIN M L. A Simple Upper Bound for the Hamiltonian Index of a Graph[J]. *Discrete Math*, 1994, **134**(1/2/3): 85−91. DOI: 10.1016/0012-365x(94)p2679-9.

[19] CHEN Z H, LAI H J, XIONG L M, *et al*. Hamilton-connected Indices of Graphs[J]. *Discrete Math*, 2009, **309**(14): 4819−4827. DOI: 10.1016/j.disc.2008.06.030.

[20] XIONG L M, LIU Z H. Hamiltonian Iterated Line Graphs[J]. *Discrete Math*, 2002, **256**(1/2): 407−422. DOI: 10.1016/s0012-365x(01)00442-3.

[21] LIU X, XIONG L M. Forbidden Subgraphs on Hamiltonian Index[J]. *Discrete Math*, 2020, **343**(6): 111841. DOI: 10.1016/j.disc.2020.111841.

[22] LIU J, LI S P, ZHANG X D, *et al*. Hamiltonian Index of Directed Multigraph[J]. *Appl Math Comput*, 2022, **425**: 127074. DOI: 10.1016/j.amc.2022.127074.

[23] LIU Z M, XIONG L M. Degree Sum Conditions for Hamiltonian Index[J]. *Appl Math A J Chin Univ*, 2021, **36**(3): 403−411. DOI: 10.1007/s11766-021-3885-4.

[24] LEI L, XIONG W, XIE Y K, *et al*. On the Extended Clark-Wormold Hamiltonian-like Index Problem[J]. *Discrete Math*, 2022, **345**(4): 112745. DOI: 10.1016/j.disc.2021.112745.