

## 距离型概率区间犹豫模糊熵及其决策应用

朱勇,李得超\*,郭倩男

(浙江海洋大学 信息工程学院,浙江 舟山 316022)

**摘要:**针对概率区间犹豫模糊集的不确定性难以准确度量的问题,文章首先提出了概率区间犹豫模糊熵公理化定义的基本准则。基于概率区间犹豫模糊元的距离测度和伪距离测度,提出了一种距离型概率区间犹豫模糊熵测度,验证其满足公理化定义的要求,并将其推广到概率区间犹豫模糊集上。新的熵测度能够综合表征概率区间犹豫模糊元的个体不确定性和总体不确定性,具有结构简单、便于理解等优点。在此基础上,利用熵权法求得属性权重,结合逼近理想解排序法(Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution, TOPSIS)方法构建了一种未知属性权重的概率区间犹豫模糊多属性决策模型。实例分析和不同算子下对比结果验证了所提方法的有效性和实用性,并对相关参数进行敏感性分析,说明了其稳定性,为解决多属性决策问题提供了一种新的思路。

**关键词:**概率区间犹豫模糊集;模糊熵;熵权法;TOPSIS方法;多属性决策

**中图分类号:**O159;C934 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2024)06-1178-12

## Distance Type Probabilistic Interval-valued Hesitation Fuzzy Entropy and Its Decision Application

ZHU Yong, LI Dechao\*, GUO Qiannan

(School of Information Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022 China)

**Abstract:** Aiming at the situation that the uncertainty of probabilistic interval-valued hesitant fuzzy sets (PIVHFSs) is difficult to evaluate accurately, this paper firstly proposes the basic criterion of axiomatic definition of probabilistic interval-valued hesitation fuzzy entropy. Based on the distance measure and the pseudo distance measure of probabilistic interval-valued hesitant fuzzy elements (PIVHFEs), a new entropy measure of PIVHFEs is proposed, which meets the requirements of axiomatic definition and then is extended to PIVHFSs. The new entropy measure can comprehensively characterize the individual and collective uncertainties of PIVHFEs, and possesses some advantages of simple structure and easy understanding. On this basis, the entropy weight method is used to obtain the attribute weight, and a probabilistic interval-valued hesitation fuzzy multi-attribute decision-making model with unknown attribute weights is constructed using TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution) method. The effectiveness and practicability of the proposed method are verified by example analysis and results comparison among different operators, and the sensitivity analysis of relevant parameters is carried out to illustrate its stability. In conclusion, the new entropy measure provides a new way to solve the multi-attribute decision making problem.

**Key words:** probabilistic interval-valued hesitant fuzzy set; fuzzy entropy; entropy weight method; TOPSIS method; multi-attribute decision making

收稿日期:2023-04-19;接受日期:2023-06-09

基金项目:国家自然科学基金(61673352)

作者简介:朱勇(1997-),男,安徽芜湖人,硕士研究生,研究方向为模糊推理、模糊决策。E-mail:zyong0526@126.com

\* 通信作者:李得超(LI Dechao),E-mail:dch1831@163.com

引文格式:朱勇,李得超,郭倩男.距离型概率区间犹豫模糊熵及其决策应用[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(6):1178-1189. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023107

## 0 引言

多属性决策是指决策者在有限可行的备选方案中根据方案属性值进行决策,以便选出最优方案的过程。然而随着现代科学和技术的发展,实际决策过程中出现越来越多的未知因素和不确定信息,导致传统的决策方法处理效果很差,决策结果的可信度存在争议。Zadeh<sup>[1]</sup>于1965年提出了模糊集(Fuzzy set, FS)的概念,将特征函数取值0或1的“非此即彼”的概念扩展到在闭区间 $[0, 1]$ 中取值的隶属度函数,核心思想是用隶属度函数来描绘现实中的模糊性。模糊集理论作为处理不确定信息的有效工具,被广泛应用于模糊控制、模糊决策、聚类分析、模式识别等领域。而模糊决策作为决策领域中重要的发展方向,亟待深入研究。

Torra<sup>[2]</sup>于2010年定义了犹豫模糊集(Hesitant fuzzy set, HFS),在模糊集利用单个实数值表达某一对象隶属度的基础上扩大到几个可能值,反映了决策者在决策过程中的犹豫不决,更加贴合不确定群体决策的实际应用场景。然而,HFS中认为集合中的元素属于集合的隶属度虽然有若干个不同值,但是这些值发生的概率是相等的,这在处理某些复杂情况时会失效。于是,Xu等<sup>[3]</sup>和Gao等<sup>[4]</sup>系统研究了概率犹豫模糊集(Probabilistic hesitant fuzzy set, PHFS),其基本描述工具为概率犹豫模糊元(Probabilistic hesitant fuzzy element, PHFE),PHFE在HFE(Hesitant fuzzy element, HFE)的基础上赋予每个隶属度相应的概率,包含了更为丰富的决策信息,是对犹豫模糊集重大的改进和推广。然而,尽管概率犹豫模糊集的综合效用优秀,但是在实际决策过程中,由于客观世界的复杂性和不确定性以及决策者自身认知水平的局限性,决策者很难用几个精确隶属度来表达其偏好信息,概率犹豫模糊元中的隶属度往往在某个范围内波动。于是,Zhang等<sup>[5]</sup>将区间值的概念引入概率犹豫模糊集,定义了概率区间犹豫模糊集(Probabilistic interval-valued hesitant fuzzy set, PIVHFS),并给出了一系列运算规则和集成算子等。作为模糊决策领域最新的发展方向,概率区间犹豫模糊集得到了广泛研究,一类是对其运算规则、集成算子、信息测度等的研究<sup>[6-9]</sup>;另一类是将多属性决策方法扩展到概率区间犹豫模糊环境中<sup>[10-11]</sup>。例如,周小领等<sup>[6]</sup>提出了概率区间犹豫模糊有序加权几何(Probabilistic interval-valued hesitant fuzzy ordered weighted geometric, PIVH-FOWG)算子,并将其应用于网络舆情预测模型选择中;王金凤等<sup>[8]</sup>提出了结合均值、方差、信息不完全度的综合关联系数,并基于综合关联系数构建属性权重完全未知或部分已知的多属性决策模型;Ali等<sup>[11]</sup>研究了概率区间犹豫模糊集的距离测度和逼近理想解排序法(Technique for order preference by similarity to an ideal solution, TOPSIS)方法,并将其应用于医疗诊断中。

模糊决策领域中最关键的一个问题就是属性权重的确定,包括属性权重部分未知和完全未知,针对后一种情况,学者们通过建立线性规划模型和模糊熵权法<sup>[7-8]</sup>,利用灰色关联贡献度理论<sup>[12]</sup>进行处理。于是,针对模糊熵测度的研究显得非常有必要。Zadeh<sup>[13]</sup>首先提出模糊熵的概念,在模糊集理论中,模糊熵用来度量模糊集的不确定性,一个模糊集的熵值越大,说明这个模糊集的模糊性程度越高。熵作为模糊集理论中的重要概念,具有极高的研究价值,目前关于概率区间犹豫模糊熵的理论研究少见报道。已有相关文献<sup>[14-17]</sup>论证了熵测度和距离测度、相似度之间存在一定的转化关系。Farhadinia<sup>[14]</sup>关于犹豫模糊集及其区间形式给出了距离测度、相似度和熵测度的相互转化方法,并应用于聚类分析中;Hu等<sup>[15]</sup>基于距离测度和优先关系构造了三种犹豫模糊熵,并应用于多属性决策中;刘赢等<sup>[16]</sup>基于犹豫模糊元的模糊度和非明确度提出了一种综合犹豫熵,能够综合表征犹豫模糊元的不确定性,并引入累积前景理论改进传统TOPSIS方法,应用于多属性决策中;方冰等<sup>[17]</sup>充分考虑了概率犹豫模糊元的分布特点,结合概率犹豫模糊元的个体不确定性和整体不确定性提出了一些混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度等。受上述启发,本文主要研究概率区间犹豫模糊集的距离型熵测度。由于概率区间犹豫模糊集包含的决策信息较为复杂,为了方便后续概率区间犹豫模糊熵测度的研究和构造,首先需要对概率区间犹豫模糊集进行规范化处理。参考以往文献中相关的调和犹豫信息理论<sup>[18-21]</sup>,例如,Wu等<sup>[18]</sup>提出了将不同概率分布

的概率语言术语集调整为相同概率分布的概率语言术语集的方法;Lin等<sup>[20]</sup>率先给出了完整的对一组概率分布不同的概率犹豫模糊元规范化处理的概率分裂算法;方冰等<sup>[21]</sup>对现有成果进行总结,提出了一套基于调和犹豫信息的运算规则、集成算子、信息测度、模糊熵等。本文给出了对一组概率分布不同的概率区间犹豫模糊元规范化处理的方法。

针对规范化处理后的概率区间犹豫模糊集,本文首先提出了概率区间犹豫模糊熵公理化定义的基本准则,给出一个距离型概率区间犹豫模糊元熵测度公式,验证其满足公理化定义的要求,然后将其推广到概率区间犹豫模糊集上;在距离型概率区间犹豫模糊熵测度的基础上结合熵权法确定属性权重,基于TOPSIS方法构建了未知属性权重的多属性决策模型,利用一个网络舆情案例验证本文所提方法的有效性和实用性,并对相关参数进行了敏感性分析。

## 1 预备知识

本节主要介绍概率区间犹豫模糊集的基本概念和相关知识。

### 1.1 概率区间犹豫模糊集

**定义 1<sup>[5]</sup>** 设  $X$  是一个论域,  $X$  上的一个概率区间犹豫模糊集 (Probabilistic interval-valued hesitant fuzzy set, PIVHFS) 定义为:  $H = \{ \langle x, h(x) \rangle \mid x \in X \}$ , 其中集合  $h(x) = \{ [r_i^-(x), r_i^+(x)] \mid p^i(x), i = 1, 2, \dots, l \}$  是描述概率区间犹豫模糊集的基本工具, 称为概率区间犹豫模糊元 (Probabilistic interval-valued hesitant fuzzy element, PIVHFE)。  $[r_i^-(x), r_i^+(x)] \subset [0, 1]$  表示  $X$  中的元素  $x$  属于概率区间犹豫模糊集  $H$  的若干个可能性, 称为隶属度区间,  $p^i(x) \in (0, 1]$  是与  $[r_i^-(x), r_i^+(x)], i = 1, 2, \dots, l$  相关联的概率, 满足归一化条件  $\sum_{i=1}^l p^i(x) = 1$ 。

为了后续方便, 记概率区间犹豫模糊元为  $h = h(x) = \{ [r_i^-, r_i^+] \mid p^i, i = 1, 2, \dots, l \}$ ,  $h$  的补集为  $h^c = \{ [1 - r_i^+, 1 - r_i^-] \mid p^i, i = 1, 2, \dots, l \}$ 。且  $h$  中的元素按照区间隶属度  $[r_i^-, r_i^+]$  进行降序排列, 其降序规则如下。

**定义 2<sup>[5]</sup>** 设有两个区间数  $[a_1, b_1]$  和  $[a_2, b_2]$ 。若  $a_1 + b_1 > a_2 + b_2$ , 那么  $[a_1, b_1] > [a_2, b_2]$ 。若  $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$  且  $b_1 - a_1 < b_2 - a_2$ , 那么  $[a_1, b_1] > [a_2, b_2]$ 。

**定义 3<sup>[6]</sup>** 设  $h = \{ [r_i^-, r_i^+] \mid p^i, i = 1, 2, \dots, l \}$  是任意给定的概率区间犹豫模糊元,  $l$  是其基数, 则 PIVHFE  $h$  的得分函数定义为:

$$s(h) = \sum_{i=1}^l \frac{r_i^- + r_i^+}{2} p^i, \quad (1)$$

得分函数类似于统计学意义上的均值, 为了得到满足统计学意义标准差的偏差函数, 定义 PIVHFE  $h$  的偏差函数为:

$$v(h) = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left[ \frac{r_i^- + r_i^+}{2} - s(h) \right]^2 p^i}. \quad (2)$$

**定义 4<sup>[6]</sup>** 任意给定两个概率区间犹豫模糊元  $h_1$  和  $h_2$ ,  $s(h_1)$  和  $s(h_2)$  是其得分函数,  $v(h_1)$  和  $v(h_2)$  是其偏差函数, 那么:

- (1) 若  $s(h_1) > s(h_2)$ , 那么概率区间犹豫模糊元  $h_1 > h_2$ , 称为  $h_1$  优于  $h_2$ ;
- (2) 若  $s(h_1) < s(h_2)$ , 那么概率区间犹豫模糊元  $h_1 < h_2$ , 称为  $h_1$  劣于  $h_2$ ;
- (3) 若  $s(h_1) = s(h_2)$ , 进一步比较其偏差函数: 若  $v(h_1) < v(h_2)$ , 那么  $h_1 > h_2$ ; 若  $v(h_1) > v(h_2)$ , 那么  $h_1 < h_2$ ; 若  $v(h_1) = v(h_2)$ , 那么  $h_1 \sim h_2$ , 称为  $h_1$  与  $h_2$  无差别。

### 1.2 概率区间犹豫模糊元规范化方法

事实上, 在绝大多数实际决策问题中, 对于任意一组概率区间犹豫模糊元, 其基数往往是不相等的, 此时就需要对这组概率区间犹豫模糊元进行规范化处理, 使其具有相同的基数, 以便进行分

析和比较。参考以往文献中相关的调和犹豫信息理论<sup>[18-21]</sup>,提出一种对概率区间犹豫模糊元规范化处理的方法。

**定义5** 对于任意一组基数不等的概率区间犹豫模糊元  $h_j = \{[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l_j\}, j = 1, 2, \dots, n$ , 利用概率分裂算法进行规范化处理, 规范化处理后的这组概率区间犹豫模糊元可以表示为:  $h_j = \{[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}, j = 1, 2, \dots, n$ 。其中  $l$  表示这组 PIVHFEs 共同的基数,  $n$  表示这组 PIVHFEs 的个数。具体步骤如下:

输入:  $n$  个 PIVHFEs,  $h_j = \{[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l_j\}, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $h_j$  中的  $[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+]$  按照定义 2 规则降序排列。变量  $\alpha$  表示在 PIVHFEs 中所处位置, 变量  $\beta$  用来存储前  $\alpha$  个元素的概率之和。

输出: 规范化处理后的  $n$  个 PIVHFEs,  $h_j = \{[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}, j = 1, 2, \dots, n$ 。

Step1: 令  $\alpha = 1, \beta = 0$ 。

Step2: 比较  $n$  个概率元素  $p^1, p^2, \dots, p^n$  的大小, 令  $m_\alpha = \min\{p^1, p^2, \dots, p^n\}$ 。

Step3: 令  $j = 1$ 。

Step4: 如果  $p^j > m_\alpha$ , 将  $[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | p^i$  拆分为  $[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | m_\alpha$  和  $[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | (p^i - m_\alpha)$ ,  $[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | m_\alpha$  代替 PIVHFE  $h_j$  中  $[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | p^i$  原来所处位置,  $[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | (p^i - m_\alpha)$  插入到 PIVHFE  $h_j$  中第  $\alpha$  与第  $\alpha + 1$  个元素之间; 如果  $p^j = m_\alpha$ , PIVHFE  $h_j$  中第  $\alpha$  个元素保持不变。

Step5: 如果  $j < n$ , 令  $j = j + 1$ , 执行 Step4; 否则执行 Step6。

Step6: 计算  $\beta = \beta + m_\alpha$ 。

Step7: 判断  $\beta \geq 1$  是否成立。如果是, 执行 Step8; 否则, 令  $\alpha = \alpha + 1$  并执行 Step2。

Step8: 输出所有改进后的  $h_j = \{[r_{j_i}^-, r_{j_i}^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}, j = 1, 2, \dots, n$ 。

结束。

经过此种方法规范化处理后的概率区间犹豫模糊元不会影响其本身的概率分布, 并且其得分函数值和偏差函数值保持不变, 因此, 其包含的决策信息不会有任何损失, 符合决策者的决策需求。下面给出一个具体的例子进行说明。

**例1** 假设有

$$\begin{aligned} h_1 &= \{[0.40, 0.55] | 0.2, [0.35, 0.45] | 0.8\}, \\ h_2 &= \{[0.20, 0.40] | 0.3, [0.15, 0.45] | 0.4, [0.10, 0.45] | 0.3\}, \\ h_3 &= \{[0.58, 0.72] | 0.3, [0.50, 0.66] | 0.5, [0.42, 0.60] | 0.2\}. \end{aligned}$$

对  $h_1, h_2, h_3$  进行规范化处理, 得到

$$\begin{aligned} h_1 &= \{[0.40, 0.55] | 0.2, [0.35, 0.45] | 0.1, [0.35, 0.45] | 0.4, [0.35, 0.45] | 0.1, [0.35, 0.45] | 0.2\}, \\ h_2 &= \{[0.20, 0.40] | 0.2, [0.20, 0.40] | 0.1, [0.15, 0.45] | 0.4, [0.10, 0.45] | 0.1, [0.10, 0.45] | 0.2\}, \\ h_3 &= \{[0.58, 0.72] | 0.2, [0.58, 0.72] | 0.1, [0.50, 0.66] | 0.4, [0.50, 0.66] | 0.1, [0.42, 0.60] | 0.2\}. \end{aligned}$$

可以看到, 规范化处理后的  $h_1, h_2, h_3$  具有相同的基数, 并且它们本身的概率分布和排序关系并没有发生任何变化, 其得分函数值和偏差函数值也保持不变。规范化处理后的概率区间犹豫模糊元非常容易进行比较和分析, 在此基础上, 后续也可以重新定义一系列运算规则、集成算子、信息测度等。本文为了方便后续熵测度的构造和计算, 均假设这一系列 PIVHFEs 具有相同的基数  $l$ 。

### 1.3 概率区间犹豫模糊元距离测度

文献[8]定义的概率区间犹豫模糊元的距离测度具有较好的性质。

**定义6**<sup>[8]</sup> 设  $h_1$  和  $h_2$  为两个 PIVHFEs,  $h_1 = \{[r_{1_i}^-, r_{1_i}^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}, h_2 = \{[r_{2_i}^-, r_{2_i}^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}$ , 那么它们之间的 Hamming 距离测度定义为:

$$d(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (|p^1 r_{1i}^- - p^2 r_{2i}^-| + |p^1 r_{1i}^+ - p^2 r_{2i}^+|). \quad (3)$$

**定义 7** 设  $h_1$  和  $h_2$  为两个 PIVHFEs,  $h_1 = \{[r_{1i}^-, r_{1i}^+] | p^1, i = 1, 2, \dots, l\}$ ,  $h_2 = \{[r_{2i}^-, r_{2i}^+] | p^2, i = 1, 2, \dots, l\}$ , 那么它们之间的伪距离测度可定义为:

$$d'(h_1, h_2) = |s(h_1) - s(h_2)|, \quad (4)$$

其中  $s(h_1)$  和  $s(h_2)$  分别为  $h_1$  和  $h_2$  的得分函数。

## 2 距离型概率区间犹豫模糊熵

本节给出了概率区间犹豫模糊元熵测度的公理化定义, 基于距离测度和伪距离测度提出一种距离型概率区间犹豫模糊元熵测度公式, 并验证了其满足公理化定义的基本条件, 然后将其推广到概率区间犹豫模糊集上。

### 2.1 公理化定义

**定义 8** 设  $h = \{[r_i^-, r_i^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}$  是一个概率区间犹豫模糊元,  $h^c = \{[1 - r_i^+, 1 - r_i^-] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}$ ,  $E$  是一个映射,  $E: h \rightarrow [0, 1]$ 。若  $E(h)$  满足以下公理化条件, 则称  $E(h)$  为概率区间犹豫模糊元的熵。

(1)  $0 \leq E(h) \leq 1$ ;

(2)  $E(h) = 0$  当且仅当  $h = \{[0, 0] | 1\}$  或  $h = \{[1, 1] | 1\}$ ;

(3)  $E(h) = 1$  当且仅当  $h = \{[0.5, 0.5] | 1\}$ ;

(4)  $E(h) = E(h^c)$ ;

(5)  $E(h)$  与  $h$  和  $h^c$  之间的距离测度负相关, 也与  $h$  和  $h^c$  之间的伪距离测度负相关。

对上述条件进行说明, 条件(1)规定了熵取值的范围, 条件(2)和(3)说明了熵取最大最小值时的特殊情况, 条件(4)满足了模糊熵理论中集合与其补集熵值相等的要求, 条件(5)规定了模糊熵取值的单调性。以上5个公理化条件, 完整地表达了概率区间犹豫模糊元熵测度的性质。

基于概率区间犹豫模糊元的 Hamming 距离测度公式(3), 尝试构建如下的距离熵测度公式:

$$E_1(h) = \sum_{i=1}^l \left[ 1 - (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|) \right] p^i, \quad (5)$$

或者

$$E'_1(h) = \sum_{i=1}^l \left( 1 - 2 \left| \frac{r_i^- + r_i^+}{2} - 0.5 \right| \right) p^i. \quad (6)$$

下面对这两个距离熵测度公式进行分析。

首先根据传统模糊熵理论的定义<sup>[13]</sup>, 在一个模糊集中, 模糊熵用来度量模糊集的不确定性, 其满足: 模糊集的隶属度为0或1时, 熵值最小为0; 模糊集的隶属度为0.5时, 熵值最大为1; 模糊集的隶属度越接近0.5, 熵值越大; 模糊集与它的补集的熵值相等。

假设有三个 PIVHFEs,  $h_1 = \{[0.2, 0.8] | 1\}$ ,  $h_2 = \{[0, 1] | 1\}$  和  $h_3 = \{[0.5, 0.5] | 1\}$ , 分别用  $E_1(h)$  和  $E'_1(h)$  进行计算。用  $E'_1(h)$  计算得到  $E'_1(h_1) = E'_1(h_2) = E'_1(h_3) = 1$ , 即  $E'_1(h)$  无法对  $h_1, h_2, h_3$  进行区分, 不符合模糊熵理论的要求。对  $h_3$  进行分析发现  $h_3$  中区间隶属度只在点0.5取值, 说明其对事物描述的不确定性最大, 所以直觉上认为  $h_3$  的熵值最大为1,  $h_1$  和  $h_2$  的熵值应小于1; 观察  $h_1$  和  $h_2$  可以看到,  $h_1$  中区间隶属度左右边界相比  $h_2$  更加靠近0.5, 所以  $h_1$  的熵值应该大于  $h_2$ 。用  $E_1(h)$  进行计算可以得到,  $E_1(h_1) = 0.4$ ,  $E_1(h_2) = 0$ ,  $E_1(h_3) = 1$ , 此时,  $E_1(h_2) < E_1(h_1) < E_1(h_3)$ , 所以  $E_1(h)$  相比于  $E'_1(h)$  更符合需求。通过计算可以验证  $E_1(h)$  满足公理化条件(1)、(3)、(4)的要求, 然而, 由于在对  $h_2 = \{[0, 1] | 1\}$  进行计算时,  $E_1(h_2) = 0$ , 这是反直觉的, 使得其不满足公理化条件(2)的要求。

可以给出一个更加简洁明了的算例进行分析。假设有一个决策小组评估某个对象是否属于

某个属性,给出的决策信息可以用概率区间犹豫模糊元  $h = \{[1, 1]|0.5, [0, 0]|0.5\}$  来表示,  $h$  意味着在这个决策组中,有一半的专家认为对象完全满足属性,另一半认为对象完全不满足属性,此时,  $h$  的熵值应该是大于0小于1的。然而利用  $E_1(h)$  计算得到  $E_1(h) = 0$ , 不符合要求。事实上,通过对  $E_1(h)$  算式的构造发现,  $E_1(h)$  描述的是概率区间犹豫模糊元中所有区间隶属度不确定性的加权平均,是一种对个体不确定性的度量。

为了构建满足全部公理化条件的熵测度,根据伪距离测度公式(4),引入如下伪距离熵测度公式:

$$E_2(h) = 1 - 2|s(h) - 0.5|. \quad (7)$$

然而  $E_2(h)$  只满足公理化条件(1)、(2)、(4), 不满足条件(3)。同理,用  $E_2(h)$  对  $h = \{[1, 1]|0.5, [0, 0]|0.5\}$  进行计算得到  $E_2(h) = 1$ , 不符合要求。事实上,通过观察算式可以看到  $E_2(h)$  是对概率区间犹豫模糊元整体不确定性的度量。因此,应综合  $E_1(h)$  和  $E_2(h)$  来得到一种能够同时对个体不确定性和整体不确定性进行度量的概率区间犹豫模糊熵测度公式。

## 2.2 距离型概率区间犹豫模糊元熵测度

**定义9** 设  $h = \{[r_i^-, r_i^+]|p^i, i = 1, 2, \dots, l\}$  是一个概率区间犹豫模糊元,其距离型熵测度公式可表示为:

$$E_{\text{new}}(h) = (1 - \alpha)E_1(h) + \alpha E_2(h) = 1 - 2\alpha|s(h) - 0.5| - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|)p^i, \quad (8)$$

$E_{\text{new}}(h)$  是对概率区间犹豫模糊元所反映的个体不确定性和总体不确定性的综合权衡。其中,参数  $\alpha \in (0, 1)$  为权衡系数,参数  $\alpha = 0$  或  $1$  不符合本文所讨论问题的实际情况,对参数  $\alpha$  的分析,本文将在第4节进行。

**定理1** 定义9中的距离型熵测度公式满足定义8中的公理化定义。

**证明**

(1) 由于  $0 \leq s(h) \leq 1$ , 故  $0 \leq 2|s(h) - 0.5| \leq 1$ ; 因为  $[r_i^-, r_i^+] \subset [0, 1]$  并且  $p^i \in (0, 1]$ , 所以  $0 \leq |r_i^- - 0.5| \leq 0.5, 0 \leq |r_i^+ - 0.5| \leq 0.5$ , 那么  $0 \leq \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|)p^i \leq 1$ 。

进而  $0 \leq E_{\text{new}}(h) = 1 - 2\alpha|s(h) - 0.5| - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|)p^i \leq 1$ 。

(2) 若  $E_{\text{new}}(h) = 0$ , 对任意参数  $\alpha$ , 由于  $\alpha$  不等于0或1, 需要令下述方程组成立:

$$\begin{cases} |s(h) - 0.5| = 0.5, \\ \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|)p^i = 1, i = 1, 2, \dots, l. \end{cases} \quad (9)$$

根据方程组(9)第二项可以得到  $|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5| = 1$ , 这样对任意  $l, \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|)p^i = 1$  始终成立。由于  $0 \leq |r_i^- - 0.5| \leq 0.5, 0 \leq |r_i^+ - 0.5| \leq 0.5$ , 要使  $|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5| = 1$  成立, 只能令  $|r_i^- - 0.5| = |r_i^+ - 0.5| = 0.5$ , 那么  $r_i^- = r_i^+ = 0$  或  $r_i^- = r_i^+ = 1$  或者  $r_i^- = 0, r_i^+ = 1$ 。然而只有  $r_i^- = r_i^+ = 0$  或  $r_i^- = r_i^+ = 1$  符合方程组第一项的要求,  $r_i^- = 0, r_i^+ = 1$  时得到的  $|s(h) - 0.5| = 0$ , 不符合要求。这样得到的概率区间犹豫模糊元  $h = \{[0, 0]|1\}$  或  $h = \{[1, 1]|1\}$ 。充分性同样可证。

(3) 若  $E_{\text{new}}(h) = 1$ , 对任意参数  $\alpha$ , 由于  $\alpha$  不等于0或1, 需要令下述方程组成立:

$$\begin{cases} |s(h) - 0.5| = 0, \\ \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|)p^i = 0, i = 1, 2, \dots, l. \end{cases} \quad (10)$$

根据方程组(10)第二项可以得到  $|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5| = 0$ , 那么  $r_i^- = r_i^+ = 0.5$ , 此时方程组第一项也成立。这样得到的概率区间犹豫模糊元  $h = \{[0.5, 0.5]|1\}$ 。充分性易证。

(4)对任意  $h = \{[r_i^-, r_i^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}$ , 因为  $h^c = \{[1 - r_i^+, 1 - r_i^-] | p^i, i = 1, 2, \dots, l\}$ , 故  $E_{\text{new}}(h^c) = (1 - \alpha)E_1(h^c) + \alpha E_2(h^c) = 1 - 2\alpha|0.5 - s(h)| - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^l (|0.5 - r_i^-| + |0.5 - r_i^+|) p^i = E_{\text{new}}(h)$ .

(5) 对于  $E_{\text{new}}(h) = 1 - 2\alpha|s(h) - 0.5| - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|) p^i = 1 - \alpha|s(h) - s(h^c)| - (1 - \alpha) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (|2r_i^- - 1| + |2r_i^+ - 1|) p^i = 1 - \alpha d'(h, h^c) - (1 - \alpha) d(h, h^c)$ , 可以得到  $E_{\text{new}}(h)$  与  $h$  和  $h^c$  之间的距离测度负相关, 也与  $h$  和  $h^c$  之间的伪距离测度负相关。

综上,  $E_{\text{new}}(h)$  满足定义 8 中所有的公理化条件。

### 2.3 距离型概率区间犹豫模糊集熵测度

定义 10 设  $X$  是一个论域,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $H = \{ \langle x, h(x) \rangle | x \in X \}$  为定义在  $X$  上的概率区间犹豫模糊集, 其中的一系列概率区间犹豫模糊元可表示为  $h_j = \{[r_j^-, r_j^+] | p^i, i = 1, 2, \dots, l_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . 若存在映射  $E: H \rightarrow [0, 1]$ , 使其满足:

- (1)  $0 \leq E(H) \leq 1$ ;
- (2)  $E(H) = 0$  当且仅当对任意  $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ ,  $h_j = \{[0, 0] | 1\}$  或  $h_j = \{[1, 1] | 1\}$ ;
- (3)  $E(H) = 1$  当且仅当对任意  $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ ,  $h_j = \{[0.5, 0.5] | 1\}$ ;
- (4)  $E(H) = E(H^c)$ .

那么称  $E(H)$  为概率区间犹豫模糊集的熵。

将概率区间犹豫模糊元的熵  $E_{\text{new}}(h)$  推广到概率区间犹豫模糊集中, 可以得到:

$$E_{\text{new}}(H) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ 1 - 2\alpha|s(h) - 0.5| - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|) p^i \right]. \tag{11}$$

考虑到绝大多数决策过程中属性权重存在差异, 假设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  的属性权重记为  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}^T$ , 那么概率区间犹豫模糊集熵测度的加权形式为:

$$E_{\text{new}}(H) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left[ 1 - 2\alpha|s(h) - 0.5| - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^l (|r_i^- - 0.5| + |r_i^+ - 0.5|) p^i \right]. \tag{12}$$

## 3 基于新型熵的多属性决策方法

TOPSIS 方法的基本思想是在有限可行的备选方案中根据方案属性值选取距离正理想方案最近、同时距离负理想方案最远的可行解作为最优解, 利用相对贴近度评价指标来对备选方案进行择优排序<sup>[22]</sup>。本文重点在于熵测度的研究, 并非对多属性决策方法进行创新, 因此利用上述概率区间犹豫模糊熵结合熵权法构建了一种简单的基于 TOPSIS 方法的多属性决策模型。

### 3.1 问题描述

针对属性权重完全未知的概率区间犹豫模糊多属性决策环境, 假设  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  表示  $m$  个方案集,  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  表示  $n$  个属性集, 属性的权重向量  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}^T$ , 其中  $\omega_j \in [0, 1]$ ,  $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ 。决策者对所有决策信息进行处理, 考虑到决策环境较为复杂以及决策者自身认知水平的影响, 评估值用 PIVHFE  $h_{ij}$  的形式来表示, 以充分描述所有不确定信息。  $h_{ij}$  表示备选方案  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  在属性  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$  下的评价, 均为概率区间犹豫模糊元, 将决策者给出的概率区间犹豫模糊决策信息整理为如下形式矩阵:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

即

$$H = (h_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} \{[r_1^-(x_1), r_1^+(x_1)] | p^1(x_1)\}_{l_{11}} & \{[r_1^-(x_2), r_1^+(x_2)] | p^1(x_2)\}_{l_{12}} & \cdots & \{[r_1^-(x_n), r_1^+(x_n)] | p^1(x_n)\}_{l_{1n}} \\ \{[r_2^-(x_1), r_2^+(x_1)] | p^2(x_1)\}_{l_{21}} & \{[r_2^-(x_2), r_2^+(x_2)] | p^2(x_2)\}_{l_{22}} & \cdots & \{[r_2^-(x_n), r_2^+(x_n)] | p^2(x_n)\}_{l_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{[r_m^-(x_1), r_m^+(x_1)] | p^m(x_1)\}_{l_{m1}} & \{[r_m^-(x_2), r_m^+(x_2)] | p^m(x_2)\}_{l_{m2}} & \cdots & \{[r_m^-(x_n), r_m^+(x_n)] | p^m(x_n)\}_{l_{mn}} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中  $l_{ij}$  表示概率区间犹豫模糊元  $h_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) 的基数。

### 3.2 决策步骤

Step1: 信息矩阵标准化。第一步, 由于效益型属性和成本型属性对评价的作用是相反的, 若  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 是成本型属性, 令  $h_{ij} = h_{ij}^c$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ); 第二步, 对  $h_{ij}$  中区间隶属度按照降序的顺序进行排列; 第三步, 若属性  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 下的概率区间犹豫模糊元中区间隶属度个数不同, 则按照定义 5 中的规范化算法进行处理, 使得每个属性下的 PIVHFEs 具有相同的基数。最后得到标准评价信息矩阵  $\tilde{H}$ 。

Step2: 确定属性权重值。根据熵测度公式 (8) 计算  $\tilde{H}$  中所有  $h_{ij}$  的熵值, 属性  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 信息下的熵值越大, 信息越模糊, 对方案总体的可用信息越少, 此时赋予它较小的权重。于是可利用熵测度公式 (8) 结合熵权法确定属性权重。

$$E(C_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(h_{ij}), \omega_j = \frac{1 - E(C_j)}{n - \sum_{k=1}^n E(C_k)}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Step3: 确定正负理想方案。这里令正理想方案  $A^+ = \{h_1^+, h_2^+, \dots, h_n^+\}$  和负理想方案  $A^- = \{h_1^-, h_2^-, \dots, h_n^-\}$ , 其中,  $h_j^+ = \left\{ [1, 1] \left| \frac{1}{l_j} \right. \right\}_{l_j}$ ,  $h_j^- = \left\{ [0, 0] \left| \frac{1}{l_j} \right. \right\}_{l_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $l_j$  表示规范化处理后属性  $C_j$  下  $h_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 共同的基数。

Step4: 计算  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 与正负理想方案  $A^+$  和  $A^-$  之间的加权距离。在已知属性权重  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}^T$  的基础上, 根据 Hamming 距离测度公式 (3) 计算每个方案  $A_i$  与  $A^+$  和  $A^-$  之间的加权距离。

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^n \omega_j d(h_{ij}, h_j^+), D_i^- = \sum_{j=1}^n \omega_j d(h_{ij}, h_j^-). \quad (15)$$

Step5: 计算备选方案  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 的相对贴近度。在已知距离  $D_i^+$  和  $D_i^-$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  根据 TOPSIS 法相对贴近度的定义, 计算  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 的相对贴近度。

$$R(A_i) = \frac{D_i^-}{D_i^- + D_i^+}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

Step6: 按照相对贴近度  $R(A_i)$  值的大小对所有方案进行择优排序,  $R(A_i)$  值越大, 效果越好。

## 4 实例分析

采用文献 [6] 的网络舆情案例结合本文所提出的多属性决策方法进行处理, 以便于比较和分析。

### 4.1 算例

某市的新闻传播管理部门为了预测该市网络舆情走势和分析该市网络舆情的演化规律, 现欲购买一套网络舆情预测系统。现有五套不同类型的网络舆情预测系统  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) 可供选

择,为了从这五种网络舆情预测系统中选出一种综合性能最高的系统,该部门聘请专家小组从如下四个属性:技术水平( $C_1$ )、性能( $C_2$ )、信誉( $C_3$ )和服务水平( $C_4$ ),对这五种网络舆情预测系统进行评估。专家对系统 $A_i$ 在属性 $C_j$ 下的评估值用PIVHFE $h_{ij}$ 的形式来表示,整理得到的专家评估信息如表1、表2所示。

Step1:由于这四个属性指标 $C_j(j=1,2,\dots,4)$ 均为效益型, $h_{ij}$ 中区间隶属度均按照降序的顺序进行排列,并且 $C_j(j=1,2,\dots,4)$ 下的PIVHFEs具有相同的基数,故无需进行标准化。根据表1得到评价信息矩阵 $H=(h_{ij})_{5 \times 4}$ ,其中 $h_{ij}$ 为表1中相应的概率区间犹豫模糊元。

Step2:利用熵测度公式(8)对 $H=(h_{ij})_{5 \times 4}$ 中的所有 $h_{ij}$ 进行处理,这里令权衡系数 $\alpha=0.5$ ,得到概率区间犹豫模糊熵信息表2。

表1 概率区间犹豫模糊评估信息表

Table 1 Information of probabilistic interval-valued hesitation fuzzy evaluation

系统	$C_1$	$C_2$
$A_1$	{[0.6,0.8] 0.5,[0.4,0.6] 0.2,[0,0.5] 0.3}	{[0.6,0.8] 0.4,[0.5,0.7] 0.3,[0.2,0.4] 0.3}
$A_2$	{[0.5,0.7] 0.6,[0.4,0.6] 0.1,[0.2,0.4] 0.3}	{[0.4,0.6] 0.5,[0.3,0.5] 0.1,[0.1,0.3] 0.4}
$A_3$	{[0.7,0.9] 0.2,[0.4,0.6] 0.4,[0,0.2] 0.4}	{[0.6,0.8] 0.3,[0.3,0.5] 0.5,[0.2,0.4] 0.2}
$A_4$	{[0.4,0.6] 0.6,[0.3,0.5] 0.2,[0.2,0.4] 0.2}	{[0.4,0.6] 0.4,[0.2,0.4] 0.4,[0,0.2] 0.2}
$A_5$	{[0.6,0.8] 0.3,[0.2,0.4] 0.4,[0.1,0.3] 0.3}	{[0.7,0.9] 0.6,[0.6,0.8] 0.2,[0.3,0.5] 0.2}
	$C_3$	$C_4$
$A_1$	{[0.2,0.4] 0.5,[0.1,0.3] 0.4,[0,0.2] 0.1}	{[0.7,0.9] 0.3,[0.4,0.6] 0.3,[0.2,0.4] 0.4}
$A_2$	{[0.5,0.7] 0.3,[0.4,0.6] 0.5,[0,0.2] 0.2}	{[0.7,0.9] 0.6,[0.5,0.7] 0.3,[0,0.2] 0.1}
$A_3$	{[0.4,0.6] 0.7,[0.1,0.3] 0.2,[0,0.2] 0.1}	{[0.7,0.9] 0.4,[0.2,0.4] 0.5,[0.1,0.3] 0.1}
$A_4$	{[0.6,0.8] 0.5,[0.5,0.7] 0.2,[0.3,0.5] 0.3}	{[0.5,0.7] 0.5,[0.3,0.5] 0.3,[0.2,0.4] 0.2}
$A_5$	{[0.5,0.7] 0.4,[0.4,0.6] 0.4,[0.1,0.3] 0.2}	{[0.7,0.9] 0.5,[0.4,0.6] 0.1,[0.2,0.4] 0.4}

表2 概率区间犹豫模糊熵信息表

Table 2 Information of probabilistic interval-valued hesitation fuzzy entropy

系统	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	0.78	0.78	0.48	0.79
$A_2$	0.87	0.69	0.79	0.58
$A_3$	0.64	0.82	0.73	0.74
$A_4$	0.82	0.64	0.76	0.86
$A_5$	0.66	0.56	0.84	0.69

根据公式(14)计算各属性的平均熵: $E(C_1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 E(h_{i1})=\frac{1}{5}(0.78+0.87+0.64+0.82+0.66)=0.7540, E(C_2)=0.6980, E(C_3)=0.7200, E(C_4)=0.7320$ 。

结合熵权法求得属性权重: $w_1=\frac{1-E(C_1)}{4-\sum_{k=1}^4 E(C_k)}=0.2245, w_2=0.2755, w_3=0.2555,$

$w_4=0.2445$ 。

Step3:令正理想方案 $A^+=\{h_1^+,h_2^+,\dots,h_4^+\}$ ,负理想方案 $A^-=\{h_1^-,h_2^-, \dots, h_4^-\}$ ,其中, $h_j^+=\left\{[1,1]\left|\frac{1}{3}\right.\right\}_3, h_j^-=\left\{[0,0]\left|\frac{1}{3}\right.\right\}_3, j=1,2,\dots,4$ 。

Step4:分别计算 $h_{ij}$ 与正理想解 $h_j^+=\left\{[1,1]\left|\frac{1}{3}\right.\right\}_3$ 和负理想解 $h_j^-=\left\{[0,0]\left|\frac{1}{3}\right.\right\}_3$ 之间距离,结果用矩阵形式表示:

$$\begin{aligned}
 [d(h_{ij}, h_j^+)]_{5 \times 4} &= \begin{pmatrix} 0.5417 & 0.4500 & 0.7580 & 0.4900 \\ 0.5867 & 0.6300 & 0.5500 & 0.6233 \\ 0.6000 & 0.5300 & 0.6867 & 0.5367 \\ 0.5867 & 0.6600 & 0.4767 & 0.5367 \\ 0.6100 & 0.5933 & 0.5200 & 0.5633 \end{pmatrix}, \\
 [d(h_{ij}, h_j^-)]_{5 \times 4} &= \begin{pmatrix} 0.5250 & 0.5500 & 0.2400 & 0.5100 \\ 0.5000 & 0.3700 & 0.4500 & 0.6700 \\ 0.4000 & 0.4700 & 0.4000 & 0.4900 \\ 0.4400 & 0.3400 & 0.5900 & 0.4800 \\ 0.3900 & 0.7000 & 0.4800 & 0.5700 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

在已知属性权重  $W = \{0.2245, 0.2755, 0.2555, 0.2445\}^T$  的基础上,根据公式(15)计算  $A_i$  与正负理想方案  $A^+$  和  $A^-$  之间的加权距离,按照公式(16)计算备选方案  $A_i$  的相对贴近度,结果如表3所示。

表3 方案  $A_i$  与正负理想方案距离

Table 3 Distance of scheme  $A_i$  between positive and negative ideal schemes

方案	$D_i^+$	$D_i^-$	相对贴近度 $R(A_i)$
$A_1$	0.5591	0.4554	0.4489
$A_2$	0.5982	0.4930	0.4518
$A_3$	0.5874	0.4413	0.4290
$A_4$	0.5666	0.4606	0.4484
$A_5$	0.5710	0.5424	0.4872

注:相对贴近度表示方案综合效果,数值越大,效果越好。

Note: The relative closeness degree represents the comprehensive effect of the scheme, the larger the value, the better the effect.

Step5:按照相对贴近度对方案进行择优排序,由于  $R(A_5) > R(A_2) > R(A_1) > R(A_4) > R(A_3)$ , 于是  $A_5 > A_2 > A_1 > A_4 > A_3$ 。  $A_5$  的综合效果最好,为最优选择。

为进一步比较,选取文献[5]中 PIVHFOWA 算子,文献[6]中 PIVHFOWG 算子,文献[23]中的 PIVHFMSM ( $r = 1, g(t) = -\ln(2 - t/t)$ ) 算子对上述数据进行处理,利用得分函数值大小对方案进行排序,结果如表4所示。

表4 不同算子下方案的得分函数值及排序结果

Table 4 Score function values and sorting results of schemes with different operators

算子	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	排序
PIVHFOWA	0.4914	0.4938	0.4951	0.4753	0.5580	$A_5 > A_3 > A_2 > A_1 > A_4$
PIVHFOWG	0.4184	0.4664	0.4566	0.4366	0.5317	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
PIVHFMSM	0.1071	0.1174	0.1152	0.1098	0.1339	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$

可以看到,不同算子集成下的排序结果与本文决策方法相比,虽然在部分方案的优劣次序上存在差异,但是综合效用最高的始终为方案  $A_5$ ,验证了本文所提决策方法的有效性。

#### 4.2 参数敏感性分析

本文所提出的距离型熵测度公式中存在不确定参数  $\alpha$ ,因此有必要分析其参数变化对决策结果的影响。令  $\alpha = 0.1$  以步长 0.1 增加到 0.9,重新计算对应的属性权重和相对贴近度,将得到的结果在图1—图2中表示。

由图1可以看到,随着权衡系数  $\alpha$  的不断增大,属性  $C_1$  和  $C_4$  的权重值呈相似的减小趋势,并且  $C_4$  的减小幅度更为明显,属性  $C_2$  和  $C_3$  呈几乎相同的增大趋势;并且属性权重值在 0.2 到 0.5 之间经历了三次变化,即  $w_4 > w_2 > w_3 > w_1, w_2 > w_4 > w_3 > w_1, w_2 > w_3 > w_4 > w_1$ ,说明属性权重对权衡系数  $\alpha$  的敏感性较高。观察图1可以看到权衡系数  $\alpha$  越大,属性权重之间的差异越大。虽然权重

变化并未影响最优方案的选择,但是在实际情况中仍然需要根据决策需求选择合适的权衡系数。

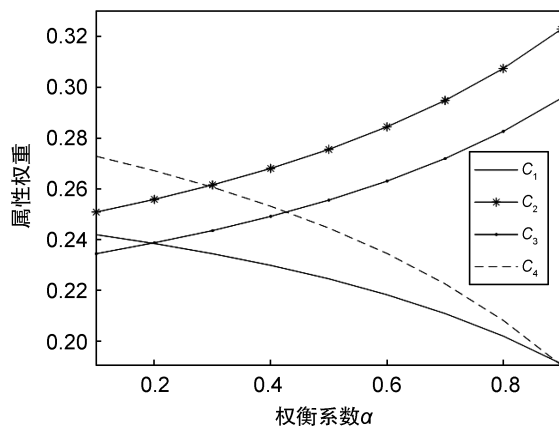


图1 属性权重随权衡系数 $\alpha$ 的变化曲线

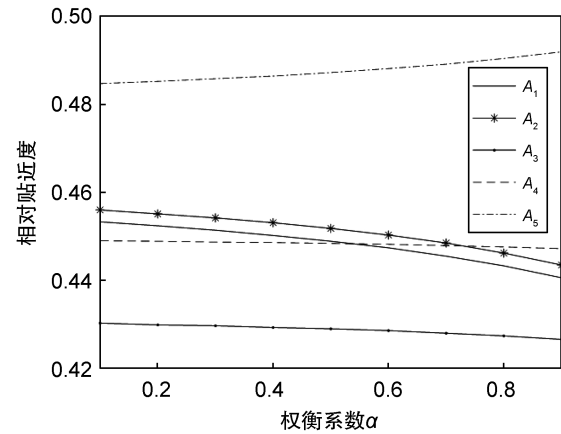


图2 相对贴近度随权衡系数 $\alpha$ 的变化曲线

Fig. 1 Variation curve of attribute weights with tradeoff factor  $\alpha$  Fig. 2 Variation curve of relative closeness with tradeoff factor  $\alpha$

由图2可以看到,随着权衡系数 $\alpha$ 的不断增大, $A_5$ 的相对贴近度呈增大趋势, $A_1, A_2, A_3, A_4$ 的相对贴近度呈减小趋势;并且方案的相对贴近度在0.5和0.8之间经历了三次变化, $A_5 > A_2 > A_1 > A_4 > A_3, A_5 > A_2 > A_4 > A_1 > A_3, A_5 > A_4 > A_2 > A_1 > A_3$ 。并且由图2可以看到对于较大的权衡系数 $\alpha$ ,方案的区分程度较好,因此在实际决策过程中可以选择较大的参数 $\alpha$ 以便对方案进行对比。很明显参数 $\alpha$ 的变化并未影响最优方案的选择,本文决策方法对权衡系数 $\alpha$ 的变化并不敏感。

## 5 结论

属性权重的确定是模糊决策领域一直以来的难题,模糊熵的研究亟待扩充。本文提出的概率区间犹豫模糊熵测度能够充分描绘概率区间犹豫模糊集的不确定性,具有物理意义清晰、易于理解和计算等优点。结合熵权法构建了一种基于TOPSIS方法的概率区间犹豫模糊多属性决策模型,将其应用于网络舆情预测模型选择中,与不同算子下的对比分析验证了所提方法的有效性与实用性。然而,本文所提概率区间犹豫模糊熵测度缺乏与其他同类型熵测度的对比分析,其实际效用值得商榷;另外,本文熵测度的构造方式同样可应用于区间犹豫模糊集中。

## 参考文献:

- [1] ZADEH L A. Fuzzy Sets[J]. *Inf Control*, 1965, **8**(3): 338-353. DOI: 10.1016/s0019-9958(65)90241-x.
- [2] TORRA V. Hesitant Fuzzy Sets[J]. *Int J Intell Syst*, 2010, **25**(6): 529-539. DOI: 10.1002/int.20418.
- [3] XU Z S, ZHOU W. Consensus Building with a Group of Decision Makers Under the Hesitant Probabilistic Fuzzy Environment[J]. *Fuzzy Optim Decis Mak*, 2017, **16**(4): 481-503. DOI: 10.1007/s10700-016-9257-5.
- [4] GAO J, XU Z S, LIAO H C. A Dynamic Reference Point Method for Emergency Response Under Hesitant Probabilistic Fuzzy Environment[J]. *Int J Fuzzy Syst*, 2017, **19**(5): 1261-1278. DOI: 10.1007/s40815-017-0311-4.
- [5] ZHANG S, XU Z S, WU H Y. Fusions and Preference Relations Based on Probabilistic Interval-valued Hesitant Fuzzy Information in Group Decision Making[J]. *Soft Comput A Fusion Found Methodol Appl*, 2019, **23**(17): 8291-8306. DOI: 10.1007/s00500-018-3465-6.
- [6] 周小领, 马庆功. 概率犹豫模糊算法及其网络舆情预测模型选择[J]. *计算机工程与应用*, 2019, **55**(4): 179-184. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.1710-0284.
- [7] ZHOU X L, MA Q G. Probabilistic Hesitant Fuzzy Algorithm and Its Application for Selection Method of Network Public Opinion Prediction Model[J]. *Comput Eng Appl*, 2019, **55**(4): 179-184. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.1710-0284.
- [7] KRISHANKUMAR R, RAVICHANDRAN K S, AHMED M I, et al. Interval-valued Probabilistic Hesitant Fuzzy Set Based Muirhead Mean for Multi-attribute Group Decision-making[J]. *Mathematics*, 2019, **7**(4): 342. DOI: 10.3390/math7040342.

- [8] 王金凤,程璐,冯立杰,等.基于关联系数的概率区间犹豫模糊多属性决策方法[J].统计与决策,2020,36(20):176-180. DOI: 10.13546/j.cnki.tjyj.2020.20.038.  
WANG J F, CHENG L, FENG L J, *et al.* Fuzzy Multi-attribute Decision-making Method with Probabilistic Interval Hesitation Based on Correlation Coefficient[J]. *Stat Decis*, 2020, 36(20): 176-180. DOI: 10.13546/j.cnki.tjyj.2020.20.038.
- [9] 陈惠琴,黄韩亮.概率区间犹豫模糊集的多属性群决策方法[J].辽宁工程技术大学学报(自然科学版),2020,39(6):550-557. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.1710-0284.  
CHEN H Q, HUANG H L. Multiple Attribute Decision-making Method on Probabilistic Interval-valued Hesitant Fuzzy Sets[J]. *J Liaoning Tech Univ Nat Sci*, 2020, 39(6): 550-557. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.1710-0284.
- [10] KRISHANKUMAR R, RAVICHANDRAN K S, KAR S, *et al.* Interval-valued Probabilistic Hesitant Fuzzy Set for Multi-criteria Group Decision-making[J]. *Soft Comput*, 2019, 23(21): 10853-10879. DOI: 10.1007/s00500-018-3638-3.
- [11] ALI J, BASHIR Z, RASHID T. On Distance Measure and TOPSIS Model for Probabilistic Interval-valued Hesitant Fuzzy Sets: Application to Healthcare Facilities in Public Hospitals[J]. *Grey Syst Theory Appl*, 2022, 12(1): 197-229. DOI: 10.1108/gs-07-2020-0092.
- [12] 李美娟,卢锦呈.基于一种新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法[J].控制与决策,2022,37(2):483-492. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0926.  
LI M J, LU J C. Pythagorean Fuzzy TOPSIS Based on Novel Score Function and Cumulative Prospect Theory[J]. *Control Decis*, 2022, 37(2): 483-492. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0926.
- [13] ZADEH L A. Probability Measures of Fuzzy Events[J]. *J Math Anal Appl*, 1968, 23(2): 421-427. DOI: 10.1016/0022-247x(68)90078-4.
- [14] FARHADINIA B. Information Measures for Hesitant Fuzzy Sets and Interval-valued Hesitant Fuzzy Sets[J]. *Inf Sci*, 2013, 240: 129-144. DOI: 10.1016/j.ins.2013.03.034.
- [15] HU J H, ZHANG X L, CHEN X H, *et al.* Hesitant Fuzzy Information Measures and Their Applications in Multi-criteria Decision Making[J]. *Int J Syst Sci*, 2016, 47(1): 62-76. DOI: 10.1080/00207721.2015.1036476.
- [16] 刘赢,关欣,李易城.基于综合犹豫模糊熵的多属性决策研究[J].控制与决策,2024,39(6):2022-2030. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.2088.  
LIU Y, GUAN X, LI Y C. Multi-attribute Decision Making Based on Comprehensive Hesitation Fuzzy Entropy[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(6): 2022-2030. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.2088.
- [17] 方冰,韩冰.混合型概率犹豫模糊熵和交叉熵测度[J].控制与决策,2023,38(2):546-554. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1452.  
FANG B, HAN B. Hybrid Entropy and Cross-entropy Measures of Probabilistic Hesitant Fuzzy Information[J]. *Control Decis*, 2023, 38(2): 546-554. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1452.
- [18] WU X L, LIAO H C, XU Z S, *et al.* Probabilistic Linguistic MULTIMOORA: a Multicriteria Decision Making Method Based on the Probabilistic Linguistic Expectation Function and the Improved Borda Rule[J]. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2018, 26(6): 3688-3702. DOI: 10.1109/TFUZZ.2018.2843330.
- [19] 朱峰,徐济超,刘玉敏,等.基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法[J].控制与决策,2020,35(8):1977-1986. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1432.  
ZHU F, XU J C, LIU Y M, *et al.* Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-attribute Decision Method Based on Signed Distance and Cross Entropy[J]. *Control Decis*, 2020, 35(8): 1977-1986. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1432.
- [20] LIN M W, ZHAN Q S, XU Z S. Decision Making with Probabilistic Hesitant Fuzzy Information Based on Multiplicative Consistency[J]. *Int J Intell Syst*, 2020, 35(8): 1233-1261. DOI: 10.1002/int.22240.
- [21] 方冰,韩冰,朱江.基于调和犹豫模糊信息的多属性决策方法[J].控制与决策,2022,37(10):2657-2666. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0328.  
FANG B, HAN B, ZHU J. Multi-attribute Decision-making Method Based on the Reconciled Hesitant Fuzzy Information[J]. *Control Decis*, 2022, 37(10): 2657-2666. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0328.
- [22] HWANG C L, YOON K. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications: A State-of-the-art Survey[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981. DOI: 10.1007/978-3-642-48318-9.
- [23] 罗世华,方童,刘俊.概率区间直觉犹豫模糊Maclaurin对称平均算子及决策方法[J].控制与决策,2021,36(5):1249-1258. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1370.  
LUO S H, FANG T, LIU J. Probabilistic Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Maclaurin Symmetric Mean Operators and Decision Method[J]. *Control Decis*, 2021, 36(5): 1249-1258. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1370.