山西大学学报(自然科学版)47(3):539－546,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023113

$|x|$在加密的Chebyshev结点的有理插值

张慧明[1],李建俊[2*]
(1.河北地质大学 数理学院,河北 石家庄 050031;
2.河北师范大学附属民族学院,河北 石家庄 050091)

摘 要:本文在Chebyshev结点基础上构造一类新的结点,研究$|x|$在这类新结点的有理插值,利用放缩法得到确切逼近阶为$O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$。通过对$|x|$在几种结点组的误差进行数值计算、分析,揭示$|x|$的有理插值本质。

关键词:加密的Chebyshev结点;调整的Chebyshev结点;有理插值;Newman型有理算子;逼近阶
中图分类号:O174.41 **文献标志码**:A **文章编号**:0253-2395(2024)03-0539-08

Rational Interpolation to $|x|$ at the Dense Chebyshev Nodes

ZHANG Huiming[1], LI Jianjun[2*]
(1. *School of Mathematics and Physics, Hebei GEO University, Shijiazhuang* 050031, *China;*
2. *Minzu College Affaliated to Hebei Normal University, Shijiazhuang* 050091, *China*)

Abstract: This article constructs a new nodes based on the Chebyshev nodes, studies the rational interpolation of$|x|$ at the new nodes, and uses the scaling method to obtain an exact approximation order that is $O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$. By numerically calculating and analyzing the errors of $|x|$ in several node groups, the essence of rational interpolation of $|x|$ is revealed.

Key words: dense Chebyshev nodes; adjusted Chebyshev nodes; rational interpolation; Newman-type rational operators; order of approximation

0 引言

1913年,Bernstein[1]最先研究$|x|$的逼近问题。他用n次多项式逼近$|x|$,得到确切的逼近阶为$E_n(|x|)=O\left(\frac{1}{n}\right)$,且不能改善。

1964年,Newman[2]构造函数$r_n(x)=x\frac{p(x)-p(-x)}{p(x)+p(-x)}$,其中$p(x)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{-\frac{k}{\sqrt{n}}}+x\right)$。得到结论:当$n\geqslant5$时,有$R_n(|x|)=\max_{|x|\leqslant1}\left\{\left||x|-r_n(x)\right|\right\}\leqslant3e^{-\sqrt{n}}$。这个结果远远优于其多项式的最佳逼近$E_n(|x|)$。

收稿日期:2023-04-25;**接受日期**:2023-06-22
基金项目:河北省自然科学基金(A2020403024)
作者简介:张慧明(1978-),男,河北井陉人,硕士,副教授,研究方向为函数逼近论。E-mail:zhanghm2008@126.com
* **通信作者**:李建俊(LI Jianjun),E-mail:lijianjun5011@126.com
引文格式:张慧明,李建俊.$|x|$在加密的Chebyshev结点的有理插值[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(3):539-546. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023113

1997年,Brutman等[3]将以上有理函数进行推广:设$X=\{x_i|0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n\leqslant 1\}_{i=1}^{n}$,$p_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x_k+x)$,则基于$\{-x_n,\cdots,-x_3,-x_2,-x_1,0,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$的Newman型有理算子定义为$r_n(X;x)=x\frac{p_n(x)-p_n(-x)}{p_n(x)+p_n(-x)}$。

在Newman的经典结果之后的半个多世纪里,引起不少学者的关注,这方面研究成果不断涌现。也有研究与Newman结点组相关的有理插值问题[4-6]。田漪等[7]和詹倩等[8]在基于Newman结点组构造一些结点组,对$|x|$的精确上界达到$e^{-\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{3+\varepsilon}}}$。

1982年,Werner[9]研究$|x|$在等距结点$E=\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k=1}^{n}$的有理插值;1997年,Brutman等[10]把结点组取作Chebyshev结点$T=\left\{x_k=\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$;2010年,张慧明等[11]把结点组取作第二类Chebyshev结点$U=\left\{x_k=\sin\frac{k\pi}{2n}\right\}_{k=1}^{n-1}$,得到逼近阶均为$O\left(\frac{1}{n\log n}\right)$。随后,张慧明等[12]把结点组取作正切结点$V=\left\{x_k=\tan\frac{k\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$,得到逼近阶也为$O\left(\frac{1}{n\log n}\right)$。

1998年,Brutman[13]把结点组取作调整Chebyshev结点$\overline{T}=\left\{x_k=\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$;2014年,张慧明等[14]把结点组取作调整第二类Chebyshev结点$\overline{U}=\left\{x_k=\sin^2\frac{k\pi}{2n}\right\}_{k=1}^{n-1}$;2022年,张慧明等[15]把结点组取作调整第三、四类Chebyshev结点,得到逼近阶均为$O\left(\frac{1}{n^2}\right)$。

赵易等[16]构造一类结点组,对$|x|$的逼近阶可以达到$O\left(\frac{1}{n^k\log n}\right)$,并得到结论:当结点向零点集中时,$|x|$的有理插值逼近阶也随之更佳。

由于$|x|$在Chebyshev结点有理插值在零点附近$\left[0,\sin\frac{\pi}{4n}\right]$逼近效果较差,所以本文在$\left[0,\sin\frac{\pi}{4n}\right]$增加$n$-1个结点$\left\{\sin\frac{k\pi}{4n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}$,得到加密的Chebyshev结点$T^*=\left\{\sin\frac{k\pi}{4n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}\cup\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}=\left\{\sin\frac{k\pi}{4n^2}\right\}_{k=1}^{n}\cup\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=2}^{n}$研究$|x|$在这类新结点的有理插值,得到逼近阶为$O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$。

1 基本结果

首先介绍几个引理:

引理1[3] 令$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$,则$|e_n(X;x)|=||x|-r_n(X;x)|\leqslant\frac{1}{A_n}(x\in[-x_1,x_1])$。

引理2[17] 当$0\leqslant y<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时,有$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}\leqslant\frac{x-y}{x+y}$。

引理3[18] 当$0<t<\dfrac{1}{2}$时,有$\dfrac{1-t}{1+t}>3^{-2t}$。

本文主要结论:

定理1 结点组取T^*,有$\left|e_{2n-1}(T^*;x)\right|=\left||x|-r_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\dfrac{\pi}{4n^2\log n}$。

证明 由于$r_{2n-1}(T^*;x)=x\dfrac{p_{2n-1}(x)-p_{2n-1}(-x)}{p_{2n-1}(x)+p_{2n-1}(-x)}$和$|x|$都是偶函数,只考虑区间$[0,1]$即可。

1)当$0\leqslant x\leqslant\sin\dfrac{\pi}{4n^2}$时,(当$t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$\dfrac{2t}{\pi}\leqslant\sin t\leqslant t$)

$$A_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\dfrac{k\pi}{4n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}}\geqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\dfrac{k\pi}{4n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\dfrac{k\pi}{2n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4n^2}{k\pi}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2n}{k\pi}=\frac{2n}{\pi}\left(2n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)=$$
$$\frac{2n}{\pi}\left[(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right]\geqslant\frac{4n^2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\frac{4n^2}{\pi}\log n。$$

由引理1得:$\left|e_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\dfrac{1}{A_{2n-1}}<\dfrac{\pi}{4n^2\log n}$。

2)当$\sin\dfrac{\pi}{4n^2}\leqslant x\leqslant\sin\dfrac{n\pi}{4n^2}=\sin\dfrac{\pi}{4n}$时,取$\sin\dfrac{(j-1)\pi}{4n^2}\leqslant x\leqslant\sin\dfrac{j\pi}{4n^2}$($j=2,3,\cdots,n$)有

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|=\left|\frac{p_{2n-1}(-x)}{p_{2n-1}(x)}\right|=\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}-x\right|}{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}+x}\prod_{k=2}^{n}\frac{\left|\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}-x\right|}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}+x}=$$
$$\prod_{k=1}^{j-1}\frac{x-\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}+x}\prod_{k=j}^{n}\frac{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}-x}{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}+x}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}-x}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}+x}\leqslant\prod_{k=1}^{j-1}\frac{\sin\dfrac{j\pi}{4n^2}-\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}{\sin\dfrac{j\pi}{4n^2}+\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}\prod_{k=j}^{n}\frac{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}-\sin\dfrac{\pi}{4n^2}}{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}+\sin\dfrac{\pi}{4n^2}}。$$

由引理2得:

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\prod_{k=1}^{j-1}\frac{j-k}{j+k}\prod_{k=j+1}^{n}\frac{k-1}{k+1}=$$
$$\frac{j-1}{j+1}\frac{j-2}{j+2}\frac{j-3}{j+3}\cdots\frac{2}{2j-2}\frac{1}{2j-1}\frac{j}{j+2}\frac{j+1}{j+3}\cdots\frac{n-3}{n-1}\frac{n-2}{n}\frac{n-1}{n+1}\leqslant$$
$$\frac{j-1}{3}\frac{j-2}{4}\frac{j-3}{5}\cdots\frac{2}{j}\frac{1}{j+1}\frac{j}{j+2}\frac{j+1}{j+3}\cdots\frac{n-3}{n-1}\frac{n-2}{n}\frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}。$$

3)当$\sin\dfrac{\pi}{4n}\leqslant x\leqslant\sin\dfrac{3\pi}{4n}$时,有

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|=\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}-x\right|}{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}+x}\prod_{k=2}^{n}\frac{\left|\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}-x\right|}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}+x}=$$
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{x-\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}{x+\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}-x}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}+x}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{3\pi}{4n}-\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}{\sin\dfrac{3\pi}{4n}+\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}-\sin\dfrac{\pi}{4n}}{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}+\sin\dfrac{\pi}{4n}}。$$

由引理2得：

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{3n-k}{3n+k}\prod_{k=2}^{n}\frac{2k-2}{2k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{3n-k}{3n+k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-2}{n-1}\frac{n-1}{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{k}{3n}}{1+\frac{k}{3n}}\leqslant\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3n}}<\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\log n}=\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}。$$

由情形2)、3)得：$\left|e_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\dfrac{2x\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|}{1-\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|}\leqslant 3x\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\dfrac{9\pi}{4n^2\cdot\sqrt[3]{n^2}}$。

4）当 $\sin\dfrac{3\pi}{4n}\leqslant x\leqslant\sin\dfrac{5\pi}{4n}$ 时，有

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|=\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\sin\frac{k\pi}{4n^2}-x\right|}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}+x}\prod_{k=2}^{n}\frac{\left|\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-x\right|}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+x}\leqslant$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{\left|\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-x\right|}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+x}\leqslant\prod_{k=3}^{n}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-\sin\frac{3\pi}{4n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+\sin\frac{3\pi}{4n}}。$$

由引理2得：

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\prod_{k=3}^{n}\frac{2k-4}{2k+2}=\prod_{k=3}^{n}\frac{k-2}{k+1}=$$

$$\frac{1}{4}\frac{2}{5}\frac{3}{6}\frac{4}{7}\cdots\frac{n-5}{n-2}\frac{n-4}{n-1}\frac{n-3}{n}\frac{n-2}{n+1}=\frac{6}{(n-1)n(n+1)}。$$

5）当 $\sin\dfrac{5\pi}{4n}\leqslant x\leqslant\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}$ 时，取 $\sin\dfrac{(2j-1)\pi}{4n}\leqslant x\leqslant\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{4n}$（$j=3,4,\cdots,n-1$）有

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|=\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\sin\frac{k\pi}{4n^2}-x\right|}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}+x}\prod_{k=2}^{n}\frac{\left|\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-x\right|}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+x}\leqslant$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-x\right|}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+x}\leqslant\prod_{k=1}^{j}\frac{\sin\frac{(2j+1)\pi}{4n}-\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{(2j+1)\pi}{4n}+\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-\sin\frac{5\pi}{4n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+\sin\frac{5\pi}{4n}}。$$

由引理2得：

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\prod_{k=1}^{j}\frac{j-k+1}{j+k}\prod_{k=j+1}^{n}\frac{k-3}{k+2}=$$

$$\frac{j}{j+1}\frac{j-1}{j+2}\frac{j-2}{j+3}\cdots\frac{2}{2j-1}\frac{1}{2j}\frac{j-2}{j+3}\frac{j-1}{j+4}\frac{j}{j+5}\cdots\frac{n-5}{n}\frac{n-4}{n+1}\frac{n-3}{n+2}\leqslant$$

$$\frac{j}{4}\frac{j-1}{5}\frac{j-2}{6}\cdots\frac{2}{j+2}\frac{1}{j+3}\frac{j-2}{j+3}\frac{j-1}{j+4}\frac{j}{j+5}\cdots\frac{n-5}{n}\frac{n-4}{n+1}\frac{n-3}{n+2}\leqslant$$

$$\frac{1}{4}\frac{2}{5}\frac{3}{6}\cdots\frac{j-1}{j+2}\frac{j}{j+3}\frac{j-1}{j+4}\frac{j}{j+5}\cdots\frac{n-5}{n}\frac{n-4}{n+1}\frac{n-3}{n+2}=$$

$$\frac{6(j-1)j}{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}\leqslant\frac{6}{n(n+1)(n+2)}。$$

6)当$\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}\leqslant x\leqslant 1$时,

$$\left|h_{2n-1}(T^*;\,x)\right|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-x\right|}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+x}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{2n\pi}{4n}-\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{2n\pi}{4n}+\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}。$$

由引理2得:

$$\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{2n-2k+1}{2n+2k-1}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{2n-2k+2}{2n+2k}=$$
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n+k}=\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+2}\frac{n-2}{n+3}\cdots\frac{3}{2n-2}\frac{2}{2n-1}\frac{1}{2n}=$$
$$\frac{1}{n+1}\frac{2}{n+2}\frac{3}{n+3}\cdots\frac{n-2}{2n-2}\frac{n-1}{2n-1}\frac{n}{2n}\leqslant\frac{1}{2^n}。$$

由情形4)、5)和6)得:

$$\left|e_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant 3\left|h_{2n-1}(T^*;x)\right|\leqslant\frac{18}{(n-1)n(n+1)}。$$

综合以上六种情形定理得证。

这个逼近阶是不能改善的,有以下定理:

定理2 当$n\geqslant 22$时,取$x^*=\frac{1}{2n^2\log n}$,有$\left|e_{2n-1}(T^*;\,x^*)\right|>\frac{1}{21n^2\log n}$。

证明 当$n\geqslant 22$时,有$0\leqslant h_{2n-1}(T^*;\,x^*)=\frac{p_{2n-1}(-x^*)}{p_{2n-1}(x^*)}\leqslant 1$,

$$h_{2n-1}(T^*;\,x^*)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{4n^2}-x^*}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}+x^*}\prod_{k=2}^{n}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}-x^*}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}+x^*}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{x^*}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}}{1+\frac{x^*}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}}\prod_{k=2}^{n}\frac{1-\frac{x^*}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}}{1+\frac{x^*}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}}。$$

由引理3得:$h_{2n-1}(T^*;\,x^*)>3^{-2x^*\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}\right)}$,其中

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{2n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\frac{2k-1}{2n}}=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2n^2}{k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2n}{2k-1}=2n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2n\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k-1}<2n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}<$$
$$(2n^2+n)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant n(2n+1)(\log n+0.6)。$$

进一步得:

$$h_{2n-1}(T^*;\,x^*)>3^{-\frac{n(2n+1)(\log n+0.6)}{n^2\log n}}>\frac{1}{15}。\tag{1}$$

另一方面:$h_{2n-1}(T^*;\,x^*)<\mathrm{e}^{-2x^*\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}\right)}$。

由定理1中情形1可得$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}>\frac{4n^2}{\pi}\log n>n^2\log n$。

由上式可得:

$$h_{2n-1}(T^*;\ x^*)<\mathrm{e}^{-1}。\tag{2}$$

由(1)(2)两式得:$n^2\log n\left|e_{2n-1}(T^*;\ x^*)\right|=\frac{h_{2n-1}(T^*;\ x^*)}{1+h_{2n-1}(T^*;\ x^*)}>\frac{1}{15(1+\mathrm{e}^{-1})}>\frac{1}{21}$。

定理得证。

由定理1和定理2可得到确切逼近阶为$O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$。

2 分析总结

定理1证明中A_{2n-1}有两部分,$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}\geqslant\frac{4n^2\log n}{\pi}$、$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}\geqslant\frac{2n(\log n-1)}{\pi}$。当$n$较大时,$\frac{4n^2\log n}{\pi}$近似为$\frac{2n(\log n-1)}{\pi}$的$2n$倍,两者可以近似合并为$\frac{2n(2n+1)\log n}{\pi}$。$A_{2n-1}$取倒数后得$\frac{1}{A_{2n-1}}<\frac{\pi}{4n^2\log n}$。由于$|x|$在$\left[0,\sin\frac{\pi}{4n^2}\right]$逼近阶最差,$|x|$在$\left[\sin\frac{3\pi}{4n^2},1\right]$逼近阶可以达到$O\left(\frac{1}{n^3}\right)$。所以$|x|$在整个区间$[0,1]$逼近阶为$O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$。综上所述,$|x|$在$[0,1]$有理插值逼近阶取决于0点到最小正结点的区间的逼近阶,进而取决于A_{2n-1},进而取决于$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{4n^2}}$。所以要提高现有逼近阶还可以在$\left[0,\sin\frac{\pi}{4n^2}\right]$再增加结点。

$T^*=\left\{\sin\frac{k\pi}{4n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}\cup\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$、$U^*=\left\{\sin\frac{k\pi}{2n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}\cup\left\{\sin\frac{k\pi}{2n}\right\}_{k=1}^{n-1}$[17]、$E^*=\left\{\frac{k}{n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}\cup\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k=1}^{n}$[19]分别是Chebyshev结点$T=\left\{x_k=\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$[10]、第二类Chebyshev结点$U=\left\{x_k=\sin\frac{k\pi}{2n}\right\}_{k=1}^{n-1}$[11]、等距结点$E=\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k=1}^{n}$[9]的零点附近区间$[0,x_1]$增加$n-1$个结点得到的结点组;$|x|$在Chebyshev结点、第二类Chebyshev结点、等距结点的有理插值逼近阶都是$O\left(\frac{1}{n\log n}\right)$,增加结点后逼近阶可以达到$O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$。

以上研究$|x|$在加密的Chebyshev结点的有理插值,得到逼近阶为$O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$。这个结果和文[17,19]一致,优于结点组取等距结点[9]、正切结点[12]、两类Chebyshev结点[10-11]、四类调整的Chebyshev结点[13-15]和扩展的Chebyshev结点[20]的有理插值。

最后,计算$|x|$在结点组$T^*=\left\{\sin\frac{k\pi}{4n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}\cup\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$、$U^*=\left\{\sin\frac{k\pi}{2n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}\cup\left\{\sin\frac{k\pi}{2n}\right\}_{k=1}^{n-1}$

和$E^*=\left\{\dfrac{k}{n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}\cup\left\{\dfrac{k}{n}\right\}_{k=1}^{n}$的有理插值误差（$n$分别取5、10、15、20、25和30），见表1。

表1 |x|在结点组T^*、U^*、E^*的有理插值误差

Table 1 Rational interpolation errors of |x| in node groups T^*, U^*, E^*

n	$\lvert e_n(T^*;x)\rvert$	$\lvert e_n(U^*;x)\rvert$	$\lvert e_n(E^*;x)\rvert$
5	3.509×10^{-3}	6.811×10^{-3}	4.343×10^{-3}
10	7.119×10^{-4}	13.88×10^{-4}	8.872×10^{-4}
15	2.834×10^{-4}	5.558×10^{-4}	3.550×10^{-4}
20	1.482×10^{-4}	2.917×10^{-4}	1.862×10^{-4}
25	8.983×10^{-5}	17.73×10^{-5}	11.31×10^{-5}
30	5.978×10^{-5}	11.82×10^{-5}	7.538×10^{-5}

$|x|$在结点组$T=\left\{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right\}_{k=1}^{n}$、$U=\left\{\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right\}_{k=1}^{n-1}$和$E=\left\{\dfrac{k}{n}\right\}_{k=1}^{n}$的有理插值误差（$n$分别取25、100、225、400、625和900），见表2。

表2 |x|在结点组T、U、E的有理插值误差

Table 2 Rational interpolation errors of |x| in node groups T, U, E

n	$\lvert e_n(T;x)\rvert$	$\lvert e_n(U;x)\rvert$	$\lvert e_n(E;x)\rvert$
25	3.203×10^{-3}	4.356×10^{-3}	2.910×10^{-3}
100	6.399×10^{-4}	8.068×10^{-4}	5.362×10^{-4}
225	2.544×10^{-4}	3.118×10^{-4}	2.063×10^{-4}
400	1.331×10^{-4}	1.605×10^{-4}	1.059×10^{-4}
625	8.083×10^{-5}	9.642×10^{-5}	6.348×10^{-5}
900	5.387×10^{-5}	6.375×10^{-5}	4.191×10^{-5}

表1数据表明：$|x|$在结点组T^*的有理插值误差最小，在结点组U^*的有理插值误差最大，是由于误差主要取决于$\left\{\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}$、$\left\{\sin\dfrac{k\pi}{2n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}$和$\left\{\dfrac{k}{n^2}\right\}_{k=1}^{n-1}$，而$\sin\dfrac{k\pi}{4n^2}<\dfrac{k}{n^2}<\sin\dfrac{k\pi}{2n^2}$，三个结点组相比，$T^*$中前$n-1$个结点比另外两个结点组更接近零点；当$n$较大时，$|x|$在$T^*$的误差几乎是在$U^*$的误差一半。

对照表1和表2：当$n=5$、10、15、20、25、30时，$|x|$在结点组T^*的有理插值误差和当$n=25$、100、225、400、625、900时，$|x|$在结点组T的有理插值误差接近；当$n=30$时$|x|$在U^*、E^*的误差几乎是当$n=900$时在U、E的误差两倍。

参考文献：

[1] BERNSTEIN S. Sur La Meilleure Approximation de |x| Par des Polynomes de Degrés Donnés[J]. *Acta Math*, 1913, **37**(1): 1-57. DOI: 10.1007/BF02401828.

[2] NEWMAN D J. Rational Approximation to |x|[J]. *Michigan Math J*, 1964, **11**(1): 11-14. DOI: 10.1307/mmj/1028999029.

[3] BRUTMAN L, PASSOW E. On Rational Interpolation to |x|[J]. *Constr Approx*, 1997, **13**(3): 381-391. DOI: 10.1007/s003659900049.

[4] XIE T F, ZHOU S P. The Asymptotic Property of Approximation to |x| by Newman's Rational Operators[J]. *Acta Math Hung*, 2004, **103**(4): 313-319. DOI: 10.1023/B: AMHU.0000028831.89374.d3.

[5] XIE T F, ZHOU X L. Improvement of Newman Inequality[J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **315**(1): 359-366. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.06.066.

[6] 张慧明, 李建俊. |x|在加密Newman结点的有理插值[J]. 工程数学学报, 2018, **35**(4): 408-414. DOI: 10.3969/j.issn.1005-3085.2018.04.004.
ZHANG H M, LI J J. On Rational Interpolation to |x| at the Dense Newman Nodes[J]. *Chin J Eng Math*, 2018, **35**(4): 408-414. DOI: 10.3969/j.issn.1005-3085.2018.04.004.

[7] 田漪, 蒋艳杰. 基于调整的Newman型结点组对|x|的有

理插值逼近[J]. 华北电力大学学报(自然科学版), 2008, **35**(3): 110-112.

TIAN Y, JIANG Y J. On Rational Interpolation to |*x*| at the Adjusted Newman Nodes[J]. *J North China Electr Power Univ Nat Sci Ed*, 2008, **35**(3): 110-112.

[8] 詹倩, 许树声. 基于一类新结点集的Newman型有理插值算子[J]. 数学进展, 2015, **44**(5): 757-764. DOI: 10.11845/sxjz.2014061b.

ZHAN Q, XU S S. Newman-type Rational Interpolation Operator Based on a New Type Set of Nodes[J]. *Adv Math China*, 2015, **44**(5): 757-764. DOI: 10.11845/sxjz.2014061b.

[9] WERNER H. Rationale Interpolation von |*x*| in äquidistanten Punkten[J]. *Math Z*, 1982, **180**(1): 11-17. DOI: 10.1007/BF01214996.

[10] BRUTMAN L, PASSOW E. Rational Interpolation to |*x*| at the Chebyshev Nodes[J]. *Bull Austral Math Soc*, 1997, **56**(1): 81-86. DOI: 10.1017/s0004972700030756.

[11] 张慧明, 李建俊. |*x*|在第二类Chebyshev结点的有理逼近[J]. 郑州大学学报(理学版), 2010, **42**(2): 1-3.

ZHANG H M, LI J J. Rational Approximation to |*x*| at the Chebyshev Nodes of the Second Kind[J]. *J Zhengzhou Univ Nat Sci Ed*, 2010, **42**(2): 1-3.

[12] 张慧明, 门玉梅, 李建俊. |*x*|在正切结点组的有理插值[J]. 天津师范大学学报(自然科学版), 2011, **31**(4): 5-6. DOI: 10.3969/j.issn.1671-1114.2011.04.002.

ZHANG H M, MEN Y M, LI J J. On Rational Interpolation to |*x*| at Nodes of Tangent[J]. *J Tianjin Norm Univ Nat Sci Ed*, 2011, **31**(4): 5-6. DOI: 10.3969/j.issn.1671-1114.2011.04.002.

[13] BRUTMAN L. On Rational Interpolation to |*x*| at the Adjusted Chebyshev Nodes[J]. *J Approx Theory*, 1998, **95**(1): 146-152. DOI: 10.1006/jath.1998.3206.

[14] 张慧明, 李建俊, 段继光. |*x*|在调整的第二类Chebyshev结点组的有理插值[J]. 数学杂志, 2014, **34**(3): 509-514. DOI: 10.13548/j.sxzz.2014.03.012.

ZHANG H M, LI J J, DUAN J G. On Rational Interpolation to |*x*| at the Adjusted Chebyshev Nodes of the Second Kind[J]. *J Math*, 2014, **34**(3): 509-514. DOI: 10.13548/j.sxzz.2014.03.012.

[15] 张慧明, 李建俊. |*x*|在调整的第三类Chebyshev结点的有理逼近问题研究[J]. 高等学校计算数学学报, 2022, **44**(2): 107-115.

ZHANG H M, LI J J. Research on Rational Approximation to |*x*| at the Adjusted Chebyshev Nodes of the Third Kind [J]. *Numer Math A J Chin Univ*, 2022, **44**(2): 107-115.

[16] ZHAO Y, ZHOU S P. Some Remarks on Rational Interpolation to | *x* |[J]. *J Math Res Expo*, 2003, **23**(1): 65-70.

[17] 张慧明,段生贵,李建俊,等. |*x*|的有理插值[J]. 高等学校计算数学学报, 2016, **38**(1): 52-59.

ZHANG H M, DUAN S G, LI J J, *et al*. On Rational Interpolation to |*x*|[J]. *Numer Math A J Chin Univ*, 2016, **38**(1): 52-59.

[18] HAN X L. On the Order of Approximation for the Rational Interpolation to |*x*|[J]. *Approx Theory & its Appl*, 2002, **18**(2): 58-64. DOI: 10.1007/BF02837401.

[19] 张慧明, 李建俊. |*x*|在拟等距结点的有理插值[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2022, **56**(4): 573-576. DOI:10.19603/j.cnki.1000-1190.2022.04.004.

ZHANG H M, LI J J. On Rational Interpolation to |*x*| at the Quasi-equidistant Nodes[J]. *J Central China Norm Univ Nat Sci*, 2022, **56**(4): 573-576. DOI: 10.19603/j.cnki.1000-1190.2022.04.004.

[20] 李建俊, 张慧明. |*x*|在扩展的Chebyshev结点的有理插值[J]. 河北大学学报(自然科学版), 2023, **43**(1): 16-20. DOI: 10.3969/j.issn.1000-1565.2023.01.003

LI J J, ZHANG H M. On Rational Interpolation to |*x*| at the Extended Chebyshev Nodes[J]. *J Hebei Univ Nat Sci Ed*, 2023, **43**(1): 16-20. DOI: 10.3969/j.issn.1000-1565.2023.01.003.