

一类潜伏期具有传染性的随机 SEI_1I_2RQ 传染病模型

曹欢,张太雷*,刘宗莹,蒋为平
(长安大学 理学院,陕西 西安 710064)

摘要:为了研究环境中的随机因素对传染病的影响,考虑了一类潜伏期传染的随机传染病模型。通过构造Lyapunov函数并结合伊藤公式等方法,首先证明了随机模型全局正解的存在唯一性。其次,分析了确定性模型和随机模型的解在无病平衡点和地方病平衡点附近的波动行为,得到了当基本再生数小于1时,确定性模型和随机模型的解均在无病平衡点附近波动,当基本再生数大于1时,确定性模型和随机模型的解均在地方病平衡点附近波动,且随机模型解的波动幅度与干扰强度成正相关。再次,给出随机模型解的平均持续和灭绝性的充分条件。最后,对该模型做了相应的数值模拟,结果表明,当干扰强度足够大时,疾病将灭绝。

关键词:随机模型;平衡点;伊藤公式;波动行为;持久性;灭绝性

中图分类号:O175.1 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2024)04-0704-13

A Stochastic SEI_1I_2RQ Epidemic Model with Infectious Latent Period

CAO Huan, ZHANG Tailei*, LIU Zongxuan, JIANG Weiping
(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: In order to study the influence of random factors in the environment on infectious diseases, a random infectious disease model with infectious latent period is considered. By constructing Lyapunov function and combining with the Ito formula, the existence and uniqueness of the global positive solutions of the stochastic model is proved; Then, the fluctuation behavior of the solutions of the deterministic model and the stochastic model near the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point are analyzed, and we obtained the solutions of the deterministic model and the stochastic model fluctuate near the disease-free equilibrium point when the basic reproduction number is less than 1, and the solution of the deterministic model and the stochastic model fluctuate near the endemic equilibrium point when the basic regeneration number is greater than 1. The fluctuation amplitude of the stochastic model solution is positively correlated with the interference intensity. The sufficient conditions for the average persistence and extinction of the stochastic model solution are also given. Finally, the corresponding numerical simulation of the model shows that the disease will become extinct when the disturbance is strong enough.

Key words: stochastic model; equilibrium; Ito formula; wave behavior; persistence; extinction

0 引言

传染病是由各种病原体引起的且能在人与人、人与动物、动物与动物之间相互传播的疾病,历史上传染病的暴发给人类带来了巨大的伤害与损失,如14世纪的黑死病造成全世界死亡人数高达7500万,1918年的西班牙大流感曾经造成全世界约10亿人感染,2020年的新冠疫情给各地经济发

收稿日期:2023-03-21;接受日期:2023-07-24

基金项目:陕西省自然科学基金基础研究计划(2022JM-023)

作者简介:曹欢(1997-),女,山西忻州人,硕士研究生,研究方向为生物数学。E-mail:caohuanmath@126.com

*通信作者:张太雷(ZHANG Tailei),E-mail:tlzhang@chd.edu.cn

引文格式:曹欢,张太雷,刘宗莹,等.一类潜伏期具有传染性的随机 SEI_1I_2RQ 传染病模型[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):704-716. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023129

展和社会运行带来了极大冲击,使全国经济和人民生活处于急刹车状态。因此,建立相关数学模型来研究传染病的传播规律是非常有必要的,它可以为传染病的预防及控制提供很大帮助。

自从2010年以来,邢伟、Azman、Jacobs等学者通过分析确定性模型的动力学性质对传染病的传播规律进行深入研究,并取得重大进展^[1-6]。Abid等^[7]考虑到传染病潜伏期和染病期具有传染性,并对此类传染病进行了动力学分析,最后,进行了数值模拟,结果反映了疾病未来发展趋势。王晓静等^[8]建立了一类 SS_qEE_qAIHR 传染病动力学模型,并对此模型进行动力学分析。王冲等^[9]建立了一类潜伏期和染病期均传染且考虑隔离因素的传染病模型,确定出疾病消除与流行的阈值条件,为传染病的预防与控制提供理论依据。李文智等^[10]建立具有疫苗接种的埃博拉病毒,得出提高疫苗接种率可有效控制疾病传播。张丽娟等^[11]建立了一类潜伏期具备传染性的 SEI₁I₂RQ 传染病模型并进行了动力学分析。Gao等^[12]研究了一类潜伏期具有传染性的新型冠状病毒感染,通过流行病学调查问卷、实验室收集相关数据等方式,描述了一个聚集性病例,为研究潜伏期感染提供了重要信息。邱理杨等^[13]分析丽水市新型冠状病毒感染聚集性疫情的病例潜伏期传染性,得到新型冠状病毒感染患者在发病前2天具有传染性且潜伏期传染性与发病后无明显区别,这为提高防控能力提供依据。

但是,在传染病的传播过程中,传播系数会受到随机因素(如:温度、湿度、媒体报道等)的干扰,这使得模型中的参数在平均值附近上下波动,确定性模型没有考虑环境中随机因素的干扰,而这种随机因素带来的影响不可忽略,通过分析确定性模型的动力学性质很难对实际问题进行准确的描述,因此,考虑随机模型更加贴合实际,基于此,刘世杰、Yuan、Bardina等研究了具有随机干扰的传染病模型^[14-18]。胡瑞等^[19]建立了一类随机 SEIRQ 模型且对其进行动力学分析;杜金姬等^[20]考虑具有病毒变异 Logistic 死亡率的 SEIR 传染病模型,并研究非线性随机系统的动力学行为;Zhang等^[21]中建立具有不同总人口规模的随机 SIQS 传染病模型,最后数值模拟显示了理论结果的正确性;Hou等^[22]提出了一类新型冠状病毒的随机 SIHR 模型,分析噪声强度、传播率、确认率等关键参数对疾病传播的影响,得到降低传播率且增加确认率有助于控制 COVID-19 传播的结论;Mohamed等^[23]考虑一类具有复发和非线性发生率的随机流行病模型,分析模型全局正解的存在唯一性及平稳分布的存在性,最后,通过数值模拟显示理论结果的正确性;李录苹等^[24]研究了一类具有疫苗接种和感染者死亡后病毒仍继续传播的随机埃博拉传染病模型,对该病毒进行动力学分析,最终给出疾病持续与灭绝的阈值;秦闯亮等^[25]考虑了随机扰动对流行病的影响,建立了一类具有隔离措施的随机 SEIR 模型,讨论随机模型的解在相应的无病平衡点附近的渐近行为,得到了该模型存在遍历平稳分布的充分条件。

以上模型虽然考虑到了随机因素,但是未考虑疾病在潜伏期具有传染性。因此,本文在张丽娟等^[11]研究的确定性模型基础上引入随机扰动因素,建立潜伏期具有传染性的随机 SEI₁I₂RQ 传染病模型。

1 模型的建立

考虑如下 SEI₁I₂RQ 传染病传播模型(见文献[11])

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta_1 SE - \beta_2 SI_1 - dS, \\ \frac{dE}{dt} = \beta_1 SE + \beta_2 SI_1 - dE - \mu_1 E - \mu_2 E, \\ \frac{dI_1}{dt} = \mu_1 E - dI_1 - \eta_1 I_1 - mI_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dI_2}{dt} = \mu_2 E - dI_2 - bI_2 + mI_1 - r_2 I_2, \\ \frac{dR}{dt} = r_2 I_2 - dR + \mu_3 Q, \\ \frac{dQ}{dt} = -dQ - \mu_3 Q + \eta_1 I_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $S(t), E(t), I_1(t), I_2(t), R(t), Q(t)$ 分别表示 t 时刻易感者、潜伏者、疑似患者、确诊患者、移除者(假设治愈者不再被感染)、隔离者的数量。 A 表示人群的输入率, β_1, β_2 分别表示潜伏者和疑似患者的有效接触率, μ_1, μ_2 分别表示潜伏者转为疑似者和确诊患者的比率, d 表示自然死亡率, b 表示因病死亡率, m 表示疑似转为确诊患者的比率, η_1 表示疑似者被隔离的比率, r_2 表示患病者被治愈的比率, μ_3 表示隔离者被治愈的比率。

由于模型的其他方程不含 $R(t), Q(t)$, 所以只讨论前 4 个方程组成的子模型。由文献[11]可知, 模型(1)的基本再生数为 $R_0 = \frac{\beta_1 A(d + \eta_1 + m) + \beta_2 \mu_1 A}{d(d + \eta_1 + m)(d + \mu_1 + \mu_2)}$, 其无病平衡点与地方病平衡点分别为 $P^0 = (\frac{A}{d}, 0, 0, 0)$ 和 $P^* = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*)$ 。当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P^0 是全局渐近稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的。

本文在上述确定性模型的基础上引入干扰因素, 建立如下潜伏期具有传染性的随机传染病模型

$$\begin{cases} dS(t) = (A - \beta_1 SE - \beta_2 SI_1 - dS)dt + \sigma_1 S dB_1(t), \\ dE(t) = (\beta_1 SE + \beta_2 SI_1 - dE - \mu_1 E - \mu_2 E)dt + \sigma_2 E dB_2(t), \\ dI_1(t) = (\mu_1 E - dI_1 - \eta_1 I_1 - mI_1)dt + \sigma_3 I_1 dB_3(t), \\ dI_2(t) = (\mu_2 E - dI_2 - bI_2 + mI_1 - r_2 I_2)dt + \sigma_4 I_2 dB_4(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $B_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 是相互独立的布朗运动, $\sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为干扰强度系数。

2 全局正解的存在唯一性

为了研究模型(2)的动力学行为, 首先证明该模型存在全局正解。

定理 1 对于任意给定的初值 $S(0), E(0), I_1(0), I_2(0) \in R_+^4$, 随机模型(2)在 $[0, \infty)$ 上存在唯一解 $(S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)) (t \geq 0)$, 且该解位于 R_+^4 中的概率为 1。

证明 模型(2)的解满足局部 Lipschitz 连续性条件, 因此, 对任意给定的初值 $(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0)) \in R_+^4$, 当 $t \in [0, \tau_e)$ 时 (τ_e 爆破时间), 模型(2)存在唯一解 $(S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)) \in R_+^4$ 。要证明解是全局的, 只需证 $\tau_e = \infty$ 成立。令 $k_0 \geq 1$ 充分大, 使得 $(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0))$ 落在区间 $[\frac{1}{k_0}, k_0]$ 上。而对于 $k \geq k_0$, 定义停时

$$\tau_k = \inf \{ t \in [0, \tau_e] : \min \{ S(t), E(t), I_1(t), I_2(t) \} \leq \frac{1}{k} \text{ 或 } \max \{ S(t), E(t), I_1(t), I_2(t) \} \geq k \}.$$

规定 $\inf \emptyset = \infty$ (\emptyset 表示空集)。显然, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 单调递增。不妨设 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 因此证明解的全局存在性, 只需证明 $\tau_\infty = \infty$ 。

假设 $\tau_\infty < \infty$, 则存在两个常数 $T > 0$ 和 $\epsilon \in (0, 1)$ 满足 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon$ 。因此, 存在 $k_1 \geq k_0$, 使得对所有的 $k \geq k_1$, 有 $P\{\tau_k \leq T\} \geq \epsilon$ 。

定义如下函数

$$V(S, E, I_1, I_2) = \left(S - a - a \ln \frac{S}{a} \right) + (E - 1 - \ln E) + (I_1 - 1 - \ln I_1) + (I_2 - 1 - \ln I_2).$$

其中 $a = \min\left\{\frac{d}{\beta_1}, \frac{d + \eta_1}{\beta_2}\right\}$ 。由于 $x - 1 - \ln x \geq 0, \forall x > 0$, 因此 V 为非负函数。由 Itô 公式

$$dV(S, E, I_1, I_2) = LVdt + \sigma_1(S - a)dB_1 + \sigma_2(E - 1)dB_2 + \sigma_3(I_1 - 1)dB_3 + \sigma_4(I_2 - 1)dB_4,$$

其中

$$\begin{aligned} LV = & \left(1 - \frac{a}{S}\right)(A - \beta_1 SE - \beta_2 SI_1 - dS) + \left(1 - \frac{1}{E}\right)(\beta_1 SE + \beta_2 SI_1 - dE - \mu_1 E - \mu_2 E) + \\ & \left(1 - \frac{1}{I_1}\right)(\mu_1 E - dI_1 - \eta_1 I_1 - mI_1) + \left(1 - \frac{1}{I_2}\right)(\mu_2 E - dI_2 - bI_2 + mI_1 - r_2 I_2) + \\ & \frac{1}{2}(a\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \leq A + (a + 3)d + b + m + \mu_1 + \mu_2 + \eta_1 + r_2 + (\beta_1 a - d)E + \\ & (\beta_2 a - (d + \eta_1))I_1 + \frac{1}{2}(a\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \leq \\ & A + (a + 3)d + b + m + \mu_1 + \mu_2 + \eta_1 + r_2 + \frac{1}{2}(a\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) := K, \end{aligned}$$

这里 K 为正常数, 则

$$dV \leq Kdt + \sigma_1(S - a)dB_1 + \sigma_2(E - 1)dB_2 + \sigma_3(I_1 - 1)dB_3 + \sigma_4(I_2 - 1)dB_4,$$

对上式两边从 0 到 $\tau_k \wedge T$ 积分并取期望得

$$EV(S(\tau_k \wedge T), E(\tau_k \wedge T), I_1(\tau_k \wedge T), I_2(\tau_k \wedge T)) \leq V(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0)) + KT.$$

令 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$, 对 $\forall k \geq k_1$, 有 $P(\Omega_k) \geq \varepsilon_0$ 。对 $\forall \omega \in \Omega_k$, 由停时定义知 $S(\tau_k, \omega), E(\tau_k, \omega), I_1(\tau_k, \omega), I_2(\tau_k, \omega)$ 中至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$, 则

$$V(S(\tau_k, \omega), E(\tau_k, \omega), I_1(\tau_k, \omega), I_2(\tau_k, \omega)) \geq \min\left\{k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k}\right\},$$

所以

$$\begin{aligned} V(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0)) + KT & \geq E(I_{\Omega_k(\omega)} S(\tau_k, \omega), E(\tau_k, \omega), I_1(\tau_k, \omega), I_2(\tau_k, \omega)) \geq \\ & \varepsilon \min\left\{k - 1 - \ln k, \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k}\right\}, \end{aligned}$$

其中 $I_{\Omega_k(\omega)}$ 表示 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$ 的示性函数。令 $k \rightarrow \infty$, 则与假设矛盾。所以 $\tau_\infty = \infty$ 成立, 即 $(S(t), E(t), I_1(t), I_2(t))$ 是模型(2)的全局正解。证毕。

3 无病平衡点附近的渐近行为

当确定性模型(1)的 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P^0 稳定, 接下来讨论模型(2)的解在 P^0 附近的渐近行为。

定理 2 若 $R_0 < 1$ 且满足 $\sigma_2^2 < 2d + \mu_1 + \mu_2 - \frac{\beta_1 A}{d}, \sigma_3^2 < 2d + 2\eta_1 + m - \mu_1 - \frac{\beta_2 A}{d}, \sigma_4^2 < 2(d + b + r_2) - \mu_2 - m$, 则对任意初值 $(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0)) \in R^+$, 模型(2)的解有如下性质

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \left(S(\xi) - \frac{A}{d} \right)^2 + E^2(\xi) + I_1^2(\xi) + I_2^2(\xi) d\xi \leq \frac{2A^2 d (\sigma_1^2 + 2d + \mu_1 + \mu_2) + A^3 (\beta_1 + \beta_2)}{2m_1 d^3},$$

其中

$$m_1 = \min\left\{2d, d + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\beta_1 A}{2d}, d + \eta_1 + \frac{m}{2} - \frac{\mu_1 + \sigma_3^2}{2} - \frac{\beta_2 A}{2d}, d + b + r_2 - \frac{\mu_2 + m + \sigma_4^2}{2}\right\}.$$

证明 定义函数 $V_{11} = \frac{1}{2}\left(S - \frac{A}{d}\right)^2, V_{12} = \frac{1}{2}I_1^2, V_{13} = \frac{1}{2}I_2^2, V_{14} = \frac{1}{2}\left(S - \frac{A}{d} + E\right)^2$ 。由 Itô 公式得

$$\begin{aligned}
LV_{11} &= \left(S - \frac{A}{d}\right) \left(A - \beta_1 SE - \beta_2 SI_1 - dS\right) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \leq \\
& \frac{A\beta_1}{2d} E^2 + \frac{A\beta_2}{2d} I_1^2 + \frac{A(\beta_1 + \beta_2)}{2d} S^2 - d \left(S - \frac{A}{d}\right)^2 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \leq \\
& \frac{A\beta_1}{2d} E^2 + \frac{A\beta_2}{2d} I_1^2 + \frac{A^3(\beta_1 + \beta_2)}{2d^3} - d \left(S - \frac{A}{d}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2 A^2}{2d^2}, \\
LV_{12} &= I_1(\mu_1 E - dI_1 - \eta_1 I_1 - mI_1) + \frac{1}{2} \sigma_3^2 I_1^2 \leq \frac{\mu_1}{2} E^2 - \left(d + \eta_1 + m - \frac{\mu_1 + \sigma_3^2}{2}\right) I_1^2, \\
LV_{13} &= I_2(\mu_2 E - dI_2 - bI_2 + mI_1 - r_2 I_2) + \frac{1}{2} \sigma_4^2 I_2^2 \leq \frac{\mu_2}{2} E^2 - \left(b + d + r_2 - \frac{\mu_2 + m + \sigma_4^2}{2}\right) I_2^2 + \frac{m}{2} I_1^2, \\
LV_{14} &= \left(S - \frac{A}{d} + E\right) \left(A - dS - (d + \mu_1 + \mu_2)E\right) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 E^2 \leq \\
& \frac{A^2 \sigma_1^2}{2d^2} + \frac{A^2(d + \mu_1 + \mu_2)}{d^2} + \frac{A^2}{d} - d \left(S - \frac{A}{d}\right)^2 - \left(d + \mu_1 + \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) E^2.
\end{aligned}$$

令 $V_1 = V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14}$, 则

$$\begin{aligned}
dV_1 &= dV_{11} + dV_{12} + dV_{13} + dV_{14} \leq \\
& \left[-2d \left(S - \frac{A}{d}\right)^2 - \left(d + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\beta_1 A}{2d}\right) E^2 - \left(d + \eta_1 + \frac{m}{2} - \frac{\mu_1 + \sigma_3^2}{2} - \frac{\beta_2 A}{2d}\right) I_1^2 - \right. \\
& \left. \left(b + d + r_2 - \frac{\mu_2 + m + \sigma_4^2}{2}\right) I_2^2 + \frac{\sigma_1^2 A^2}{d^2} + \frac{A^2(d + \mu_1 + \mu_2)}{d^2} + \frac{A^3(\beta_1 + \beta_2)}{2d^3} + \frac{A^2}{d} \right] dt + \\
& \sigma_1 S \left(S - \frac{A}{d}\right) dB_1 + \sigma_1 S \left(S - \frac{A}{d} + E\right) dB_1 + \sigma_2 E \left(S - \frac{A}{d} + E\right) dB_2 + \sigma_3 I_1^2 dB_3 + \sigma_4 I_2^2 dB_4.
\end{aligned}$$

对上式两边从 0 到 t 积分并取期望得

$$\begin{aligned}
EV_1(t) - EV_1(0) &\leq E \int_0^t \left[-2d \left(S(\xi) - \frac{A}{d}\right)^2 - \left(d + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\beta_1 A}{2d}\right) E^2(\xi) - \right. \\
& \left. \left(d + \eta_1 + \frac{m}{2} - \frac{\mu_1 + \sigma_3^2}{2} - \frac{\beta_2 A}{2d}\right) I_1^2(\xi) - \left(b + d + r_2 - \frac{\mu_2 + m + \sigma_4^2}{2}\right) I_2^2(\xi) \right] d\xi + \\
& \sigma_1 ES(\xi) \left(S(\xi) - \frac{A}{d}\right) dB_1 + \sigma_3 E \int_0^t I_1^2(\xi) dB_3 + \sigma_4 E \int_0^t I_2^2(\xi) dB_4 + \sigma_1 E \int_0^t S(\xi) \left(S(\xi) - \frac{A}{d} + E(\xi)\right) dB_1 + \\
& \sigma_2 E \int_0^t E(\xi) S\left(\xi - \frac{A}{d} + E(\xi)\right) dB_2 + E \left[\frac{2A^2 d(\sigma_1^2 + 2d + \mu_1 + \mu_2) + A^3(\beta_1 + \beta_2)}{2d^3} t \right].
\end{aligned}$$

由于两边从 0 到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\langle \int_0^t dB_i(t), \int_0^t dB_i(t) \right\rangle}{t} \leq 1 < \infty$, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t dB_i(t)}{t} = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 在 $[0, \infty)$ 上几乎处处成立, 由此可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \left(S(\xi) - \frac{A}{d}\right)^2 + E^2(\xi) + I_1^2(\xi) + I_2^2(\xi) d\xi \leq \frac{2A^2 d(\sigma_1^2 + 2d + \mu_1 + \mu_2) + A^3(\beta_1 + \beta_2)}{2m_1 d^3}.$$

注1 由定理2可知, 当 $R_0 < 1$ 且 $\sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 满足一定条件的情况下, 随机模型(2)的解在无病平衡点 P^0 附近波动, 且波动幅度与干扰强度 $\sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 成正相关。

4 地方病平衡点附近的渐近行为

地方病平衡点对应着疾病持续存在的状态, 其渐近行为有助于我们了解疾病的发展趋势, 接

下来讨论模型(2)在 P^* 附近的渐近性质。

定理3 若 $R_0 > 1$, 则对任意初值 $(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0)) \in R_+$, 模型(2)的解有如下性质

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t \left((S(\xi) - S^*)^2 + (E(\xi) - E^*)^2 + (I_1(\xi) - I_1^*)^2 + (I_2(\xi) - I_2^*)^2 \right) d\xi \leq \frac{\delta}{m_2},$$

其中

$$m_2 = \min \left\{ C_4 \frac{d}{2}, C_5 \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{4}, C_6 \frac{d + \eta_1 + m}{4}, C_7 \frac{b + d + r_2}{2} \right\},$$

$$\delta = \left(\frac{C_1}{2} S^* + \frac{(C_4 + C_5) A^2}{2d^2} \right) \sigma_1^2 + \left(\frac{C_2}{2} E^* + \frac{C_5 A^2}{2d^2} \right) \sigma_2^2 + \left(\frac{C_3}{2(d + \eta_1 + m)} + \frac{A^2 C_6}{2d^2} \right) \sigma_3^2 + \frac{C_7 A^2}{2d^2} \sigma_4^2,$$

$C_i (i = 1, 2, \dots, 7)$ 将在证明中给出。

证明 定义如下函数

$$V_2(S, E, I_1, I_2) = C_1 V_{21} + C_2 V_{22} + C_3 V_{23} + C_4 V_{24} + C_5 V_{25} + C_6 V_{26} + C_7 V_{27},$$

其中

$$V_{21} = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}, V_{22} = E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*}, V_{23} = \frac{1}{\mu_1 E^*} \left(I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right),$$

$$V_{24} = \frac{1}{2} (S - S^*)^2, V_{25} = \frac{1}{2} (S - S^* + E - E^*)^2, V_{26} = \frac{1}{2} (I_1 - I_1^*)^2, V_{27} = \frac{1}{2} (I_2 - I_2^*)^2.$$

由Itô公式得

$$\begin{aligned} LV_{21} &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^* + \left(1 - \frac{S^*}{S} \right) (A - \beta_1 S E - \beta_2 S I_1 - dS) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^* - (\beta_1 E^* + \beta_2 I_1^* + d) \frac{(S - S^*)^2}{S} - \beta_1 (S - S^*) (E - E^*) - \beta_2 (S - S^*) (I_1 - I_1^*), \\ LV_{22} &= \left(1 - \frac{E^*}{E} \right) (\beta_1 S E + \beta_2 S I_1 - dE - \mu_1 E - \mu_2 E) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 E^* = \\ &= \beta_1 (S - S^*) (E - E^*) + \beta_2 (S - S^*) (I_1 - I_1^*) + \beta_2 S^* I_1^* \left(\frac{S}{S^*} + \frac{I_1}{I_1^*} - \frac{E}{E^*} - \frac{E^* S I_1}{E S^* I_1^*} \right) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 E^*, \end{aligned}$$

由于 $x - 1 \geq \ln x$ (当且仅当 $x = 1$ 取等号)对于 $x > 0$ 成立, 有 $-\frac{E^* S I_1}{E S^* I_1^*} \leq \ln \frac{E}{E^*} - \ln \frac{S}{S^*} - \ln \frac{I_1}{I_1^*} - 1$,

所以有

$$\beta_2 S^* I_1^* \left(\frac{S}{S^*} + \frac{I_1}{I_1^*} - \frac{E}{E^*} - \frac{E^* S I_1}{E S^* I_1^*} \right) \leq \beta_2 S^* I_1^* \left(\ln \frac{E}{E^*} - \frac{E}{E^*} - \ln \frac{I_1}{I_1^*} + \frac{I_1}{I_1^*} \right) + \beta_2 I_1^* \left(S - S^* + S^* \ln \frac{S}{S^*} \right).$$

又因为 $S - S^* + S^* \ln \frac{S}{S^*} \leq S - S^* + S^* \left(\frac{S^*}{S} - 1 \right) = \frac{(S - S^*)^2}{S}$, 因此

$$\begin{aligned} LV_{22} &\leq \beta_1 (S - S^*) (E - E^*) + \beta_2 (S - S^*) (I_1 - I_1^*) + \beta_2 I_1^* \frac{(S - S^*)^2}{S} + \\ &= \beta_2 S^* I_1^* \left(\ln \frac{E}{E^*} - \frac{E}{E^*} - \ln \frac{I_1}{I_1^*} + \frac{I_1}{I_1^*} \right) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 E^*, \\ LV_{23} &= \frac{1}{\mu_1 E^*} \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1} \right) (\mu_1 E - dI_1 - \eta_1 I_1 - mI_1) + \frac{\sigma_3^2 I_1^*}{2\mu_1 E^*} \leq \frac{E}{E^*} - \frac{I_1}{I_1^*} + \ln \frac{I_1}{I_1^*} - \ln \frac{E}{E^*} + \frac{\sigma_3^2 I_1^*}{2\mu_1 E^*}, \\ LV_{24} &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 + (S - S^*) (A - \beta_1 S E - \beta_2 S I_1 - dS) \leq \\ &= \frac{\sigma_1^2 A^2}{2d^2} - d(S - S^*)^2 - \beta_1 S^* (S - S^*) (E - E^*) - \beta_2 S^* (S - S^*) (I_1 - I_1^*), \\ LV_{25} &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 E^2 (S - S^* + E - E^*) (A - dS - (d + \mu_1 + \mu_2) E) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_1^2 A^2}{2d^2} + \frac{\sigma_2^2 A^2}{2d^2} - \left(d - \frac{(2d + \mu_1 + \mu_2)^2}{2(d + \mu_1 + \mu_2)} \right) (S - S^*)^2 - \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{2} (E - E^*)^2, \\
& LV_{26} = (I_1 - I_1^*)(\mu_1 E - (d + \eta_1 + m)I_1) + \frac{1}{2} \sigma_3^2 I_1^2 = \\
& (I_1 - I_1^*)(\mu_1(E - E^*) - (d + \eta_1 + m)(I_1 - I_1^*)) + \frac{1}{2} \sigma_3^2 I_3^2 \leq \\
& \frac{\mu_1^2}{2(d + \eta_1 + m)} (E - E^*)^2 - \frac{d + \eta_1 + m}{2} (I_1 - I_1^*)^2 + \frac{\sigma_3^2 A^2}{2d^2}, \\
& LV_{27} = (I_2 - I_2^*)(\mu_2 E - (b + d + r_2)I_2 + mI_1) + \frac{1}{2} \sigma_4^2 I_2^2 \leq \\
& \frac{\mu_2^2}{b + d + r_2} (E - E^*)^2 + \frac{m^2}{b + d + r_2} (I_1 - I_1^*)^2 - \frac{b + d + r_2}{2} (I_2 - I_2^*)^2 + \frac{\sigma_4^2 A^2}{2d^2}, \\
LV_2 \leq & C_1 \left[-(\beta_1 E^* + \beta_2 I_1^* + d) \frac{(S - S^*)^2}{S} - \beta_1 (S - S^*)(E - E^*) - \beta_2 (S - S^*)(I_1 - I_1^*) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^* \right] + \\
& C_2 \left[\beta_1 (S - S^*)(E - E^*) + \beta_2 (S - S^*)(I_1 - I_1^*) + \beta_2 I_1^* \frac{(S - S^*)^2}{S} + \right. \\
& \left. \beta_2 S^* I_1^* \left(\ln \frac{E}{E^*} - \frac{E}{E^*} - \ln \frac{I_1}{I_1^*} + \frac{I_1}{I_1^*} \right) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 E^* \right] + C_3 \left[\frac{E}{E^*} - \frac{I_1}{I_1^*} + \ln \frac{I_1}{I_1^*} - \ln \frac{E}{E^*} + \frac{I_1^*}{2\mu_1 E^*} \sigma_3^2 \right] + \\
& C_4 \left[-d(S - S^*)^2 - \beta_1 S^*(S - S^*)(E - E^*) - \beta_2 S^*(S - S^*)(I_1 - I_1^*) + \frac{\sigma_1^2 A^2}{2d^2} \right] + \\
& C_5 \left[-\left(d - \frac{(2d + \mu_1 + \mu_2)^2}{2(d + \mu_1 + \mu_2)} \right) (S - S^*)^2 - \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{2} (E - E^*)^2 + \frac{\sigma_1^2 A^2}{2d^2} + \frac{\sigma_2^2 A^2}{2d^2} \right] + \\
& C_6 \left[\frac{\mu_1^2}{2(d + \eta_1 + m)} (E - E^*)^2 - \frac{d + \eta_1 + m}{2} (I_1 - I_1^*)^2 + \frac{\sigma_3^2 A^2}{2d^2} \right] + \\
& C_7 \left[\frac{\mu_2^2}{b + d + r_2} (E - E^*)^2 + \frac{m^2}{b + d + r_2} (I_1 - I_1^*)^2 - \frac{b + d + r_2}{2} (I_2 - I_2^*)^2 + \frac{\sigma_4^2 A^2}{2d^2} \right].
\end{aligned}$$

选取

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\beta_2 I_1^*}{\beta_1 E^* + \beta_2 I_1^* + d}, C_2 = 1, C_3 = \beta_2 S^* I_1^*, C_4 = \frac{\beta_1 E^* + d}{A}, C_5 = \frac{(d + \mu_1 + \mu_2)d}{(d + \mu_1 + \mu_2)^2 + d^2} C_4, \\
C_6 &= \frac{m^2(d + \eta_1 + m)(d + \mu_1 + \mu_2)}{2m^2\mu_1^2 + (d + \eta_1 + m)^2\mu_2^2} C_5, C_7 = \frac{(b + d + r_2)(d + \eta_1 + m)}{4m^2} C_6,
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
LV_2 &\leq -\frac{d}{2} C_4 (S - S^*)^2 - \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{4} C_5 (E - E^*)^2 - \frac{d + \eta_1 + m}{4} C_6 (I_1 - I_1^*)^2 - \\
& \quad \frac{b + d + r_2}{2} C_7 (I_2 - I_2^*)^2 + \delta, \\
dV_2 &\leq \left[-\frac{d}{2} C_4 (S - S^*)^2 - \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{4} C_5 (E - E^*)^2 - \frac{d + \eta_1 + m}{4} C_6 (I_1 - I_1^*)^2 - \right. \\
& \quad \left. \frac{b + d + r_2}{2} C_7 (I_2 - I_2^*)^2 + \delta \right] dt + C_1 (S - S^*) \sigma_1 dB_1 + C_2 (E - E^*) \sigma_2 dB_2 + \\
& \quad C_3 \frac{\sigma_3}{\mu_1 E^*} (I_1 - I_1^*) dB_3 + C_4 S (S - S^*) \sigma_1 dB_1 + C_5 S (S - S^* + E - E^*) \sigma_1 dB_1 + \\
& \quad C_5 E (S - S^* + E - E^*) \sigma_2 dB_2 + C_6 I_1 (I_1 - I_1^*) \sigma_3 dB_3 + C_7 I_2 (I_2 - I_2^*) \sigma_4 dB_4.
\end{aligned}$$

对上式两边从0到t积分,并取期望得

$$EV_2(t) \leq EV_2(0) - E \int_0^t \frac{d}{2} C_4 (S - S^*)^2 + \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{4} C_5 (E - E^*)^2 + \frac{d + \eta_1 + m}{4} C_6 (I_1 - I_1^*)^2 + \frac{b + d + r_2}{2} C_7 (I_2 - I_2^*)^2 d\xi + E(\delta t) + E(q_1 M_1 + q_2 M_2 + q_3 M_3 + q_4 M_4),$$

其中

$$M_i = \int_0^t dB_i,$$

$$q_1 = \left(C_1 + C_4 \frac{A}{d} + C_5 \frac{2A}{d} \right) \sigma_1 \frac{A}{d} + \left(C_1 + C_4 \frac{A}{d} + C_5 \frac{A}{d} \right) \sigma_1 S^* + C_5 \frac{A}{d} \sigma_1 E^*,$$

$$q_2 = \left(C_2 + C_5 \frac{2A}{d} \right) \sigma_2 \frac{A}{d} + \left(C_2 + C_5 \frac{A}{d} \right) \sigma_2 E^* + C_5 \frac{A}{d} \sigma_2 S^*,$$

$$q_3 = \left(\frac{C_3}{\mu_1 E^*} + C_6 \frac{A}{d} \right) \sigma_3 \frac{A}{d} + \left(\frac{C_3}{\mu_1 E^*} + C_6 \frac{A}{d} \right) \sigma_3 I_1^*, \quad q_4 = C_7 \sigma_4 \frac{A^2}{d^2} + C_7 \sigma_4 \frac{A}{d} I_2^*.$$

取 $m_2 = \min \left\{ C_4 \frac{d}{2}, C_5 \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{4}, C_6 \frac{d + \eta_1 + m}{4}, C_7 \frac{b + d + r_2}{2} \right\}$ 。由 $m_2 > 0$, 对上述不等式两边同时除以 $m_2 t$ 并令 $t \rightarrow \infty$, 注意到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M_i, M_i \rangle_t}{t} \leq 1 < \infty$, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i}{t} = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 在 $[0, \infty)$ 上几乎处处成立, 所以

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t (S(\xi) - S^*)^2 + (E(\xi) - E^*)^2 + (I_1(\xi) - I_1^*)^2 + (I_2(\xi) - I_2^*)^2 d\xi \leq \frac{\delta}{m_2}.$$

注2 由定理3知, 若 $R_0 > 1$, 则随机模型(2)的解在 P^* 附近波动, 且波动幅度与干扰强度 $\sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 成正相关。

5 疾病的平均持续性与灭绝性

在传染病的研究中, 持续性与灭绝性是两个最值得关注的问题, 一旦疾病持续, 将会给人类造成极大灾难, 这种情况下, 我们将通过调控疾病的控制措施从而使疾病灭绝。因此, 下面的结果给出疾病持续与灭绝性的充分条件。首先分析疾病的持续性。

定理4 $R_0 > 1$, 且当 $\left(C_4 \frac{d}{2} \wedge C_5 \frac{d + \mu_1 + \mu_2}{4} \wedge C_6 \frac{d + \eta_1 + m}{4} \wedge C_7 \frac{b + d + r_2}{2} \right) (S^{*2} \wedge E^{*2} \wedge I_1^{*2} \wedge I_2^{*2}) > \delta$, 则随机模型(2)的解平均持续, 即随机模型的解满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi) d\xi > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(\xi) d\xi > 0,$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_1(\xi) d\xi > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_2(\xi) d\xi > 0.$$

证明 因为 $R_0 > 1$, 由定理3得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (S(\xi) - S^*)^2 d\xi \leq \frac{\delta}{m_2}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (E(\xi) - E^*)^2 d\xi \leq \frac{\delta}{m_2},$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (I_1(\xi) - I_1^*)^2 d\xi \leq \frac{\delta}{m_2}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (I_2(\xi) - I_2^*)^2 d\xi \leq \frac{\delta}{m_2}.$$

注意到 $2S^{*2} - 2SS^* = 2S^*(S^* - S) \leq S^{*2} + (S - S^*)^2$, 即 $S \geq \frac{S^*}{2} - \frac{(S - S^*)^2}{2S^*}$, 因此有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi) d\xi = \frac{S^*}{2} - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{(S - S^*)^2}{2S^*} d\xi \geq \frac{S^*}{2} - \frac{\delta}{2S^* m_2} = \frac{S^{*2} m_2 - \delta}{2S^* m_2} > 0,$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(\xi) d\xi > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_1(\xi) d\xi > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_2(\xi) d\xi > 0.$$

所以, 随机模型(2)的解平均持续。

由定理4可知, 在一定条件下, 疾病会持续, 一旦持续, 将给人类带来极大灾难, 下面将通过调

控疾病的控制措施使疾病灭绝。首先,参考文献[26]中引理2.1和2.2的证明方法,得到如下引理:

引理1 设随机模型(2)的解满足初始条件 $(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0)) \in R_+^4$, 则有以下结论

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_1(t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_2(t)}{t} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t S(\xi) dB_1(\xi)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t E(\xi) dB_2(\xi)}{t} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t I_1(\xi) dB_3(\xi)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t I_2(\xi) dB_3(\xi)}{t} = 0. \end{aligned}$$

定义

$$R_0^s = \frac{3\beta A}{d \left[\left(d + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \wedge \left(d + \eta_1 + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) \wedge \left(d + b + r_2 + \frac{\sigma_4^2}{2} \right) \right]}$$

定理5 若 $R_0^s < 1$, 则疾病灭绝, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0$, 且随机模型(2)的解满足

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle S \rangle_t = \frac{A}{d}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [E(t) + I_1(t) + I_2(t)] \leq \frac{\beta A}{d} - \frac{1}{3} \left[\left(d + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \wedge \left(d + \eta_1 + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) \wedge \left(d + b + r_2 + \frac{\sigma_4^2}{2} \right) \right] < 0. \end{aligned}$$

证明 令 $W(t) = E(t) + I_1(t) + I_2(t)$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$,

由Itô公式得

$$d \ln W(t) = L \ln W(t) + \frac{1}{E + I_1 + I_2} (\sigma_2 E dB_2 + \sigma_3 I_1 dB_3 + \sigma_4 I_2 dB_4),$$

其中

$$\begin{aligned} L \ln W(t) = \frac{\beta_1 S E + \beta_2 S I_1 - d E - (d + \eta_1) I_1 - (d + b + r_2) I_2 - \frac{\sigma_2^2 E^2 + \sigma_3^2 I_1^2 + \sigma_4^2 I_2^2}{2(E + I_1 + I_2)^2}}{E + I_1 + I_2} \leq \\ \beta S - \frac{1}{(E + I_1 + I_2)^2} \left[\left(d + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) E^2 + \left(d + \eta_1 + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) I_1^2 + \left(d + b + r_2 + \frac{\sigma_4^2}{2} \right) I_2^2 \right] \leq \\ \beta \frac{A}{d} - \frac{1}{3} \left[\left(d + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \wedge \left(d + \eta_1 + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) \wedge \left(d + b + r_2 + \frac{\sigma_4^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

对上式两边从0到 t 积分, 得到

$$\begin{aligned} \ln W(t) - \ln W(0) = \left[\beta \frac{A}{d} - \frac{1}{3} \left[\left(d + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \wedge \left(d + \eta_1 + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) \wedge \left(d + b + r_2 + \frac{\sigma_4^2}{2} \right) \right] \right] t + \\ \int_0^t \frac{\sigma_2 E dB_2 + \sigma_3 I_1 dB_3 + \sigma_4 I_2 dB_4}{E + I_1 + I_2}. \end{aligned}$$

再结合 $R_0^s < 1$ 得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln W(t)}{t} < \beta \frac{A}{d} - \frac{1}{3} \left[\left(d + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \wedge \left(d + \eta_1 + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) \wedge \left(d + b + r_2 + \frac{\sigma_4^2}{2} \right) \right] < 0.$$

进一步得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0.$$

另一方面, 由随机模型(2)可以得到

$$\begin{aligned} d(S + E + I_1 + I_2) = (A - dS - dE - (d + \eta_1) I_1 - (b + d + r) I_2) dt + \\ \sigma_1 S dB_1 + \sigma_2 E dB_2 + \sigma_3 I_1 dB_3 + \sigma_4 I_2 dB_4, \end{aligned}$$

则

$$\frac{S(t)-S(0)}{t} + \frac{E(t)-E(0)}{t} + \frac{I_1(t)-I_1(0)}{t} + \frac{I_2(t)-I_2(0)}{t} =$$

$$A - d\langle S \rangle_t - d\langle E \rangle_t - (d + \eta_1)\langle I_1 \rangle_t - (b + d + r)\langle I_2 \rangle_t + \frac{\sigma_1}{t} \int_0^t S(\xi) dB_1(\xi) +$$

$$\frac{\sigma_2}{t} \int_0^t E(\xi) dB_2(\xi) + \frac{\sigma_3}{t} \int_0^t I_1(\xi) dB_3(\xi) + \frac{\sigma_4}{t} \int_0^t I_2(\xi) dB_4(\xi),$$

相当于 $\langle S \rangle_t = \frac{A}{d} - \langle E \rangle_t - \frac{d + \eta_1}{d} \langle I_1 \rangle_t - \frac{b + d + r}{d} \langle I_2 \rangle_t + \psi(t)$, 其中

$$\psi(t) = \frac{1}{d} \left[\frac{\sigma_1}{t} \int_0^t S(\xi) dB_1(\xi) + \frac{\sigma_2}{t} \int_0^t E(\xi) dB_2(\xi) + \frac{\sigma_3}{t} \int_0^t I_1(\xi) dB_3(\xi) + \frac{\sigma_4}{t} \int_0^t I_2(\xi) dB_4(\xi) - \right.$$

$$\left. \frac{S(t)-S(0)}{t} - \frac{E(t)-E(0)}{t} - \frac{I_1(t)-I_1(0)}{t} - \frac{I_2(t)-I_2(0)}{t} \right].$$

由引理1知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$, 从而进一步得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle S \rangle_t = \frac{A}{d}$.

注3 确定性系统的基本再生数决定着疾病的持续存在与灭绝, 由定理5知, $R_0 < 1$ 是疾病灭绝的一个充分条件。

6 数值模拟

本节受文献[14]的启发, 利用 Matlab 模拟确定模型(1)和随机模型(2)的解曲线, 通过比较两者解的渐近行为之间的差异, 说明随机扰动因素对潜伏期有传染性的传染病传播的影响。取初值 $(S(0), E(0), I_1(0), I_2(0)) = (1.5, 0.9, 0.5, 0.5)$ 。

(1) 取参数 $A = 2, \beta_1 = 0.059, \beta_2 = 0.03, b = 0.3, d = 0.6, m = 0.9, \eta_1 = 0.8, \mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6, r_2 = 0.8, \sigma_1 = 0.001, \sigma_2 = 0.001, \sigma_3 = 0.001, \sigma_4 = 0.001$ 计算得到 $R_0 < 1$, 且这些参数满足定理2的限制条件, 利用 Matlab 得到模拟结果, 如图1前四幅子图所示; 取 $\sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = 0.01, \sigma_3 = 0.01, \sigma_4 = 0.01$, 其他参数值不变时, 得到的模拟结果如图1后四幅图所示。

通过比较发现: 当基本再生数 $R_0 < 1$ 时, 确定模型(1)和随机模型(2)的解均收敛于无病平衡点 P^0 , 且随机干扰使模型的解在 P^0 附近波动, 波动强度与干扰强度成正相关, 这与定理2的结论一致。

(2) 取参数 $A = 4, \beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.09, b = 0.3, d = 0.1, m = 0.9, \eta_1 = 0.8, \mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6, r_2 =$

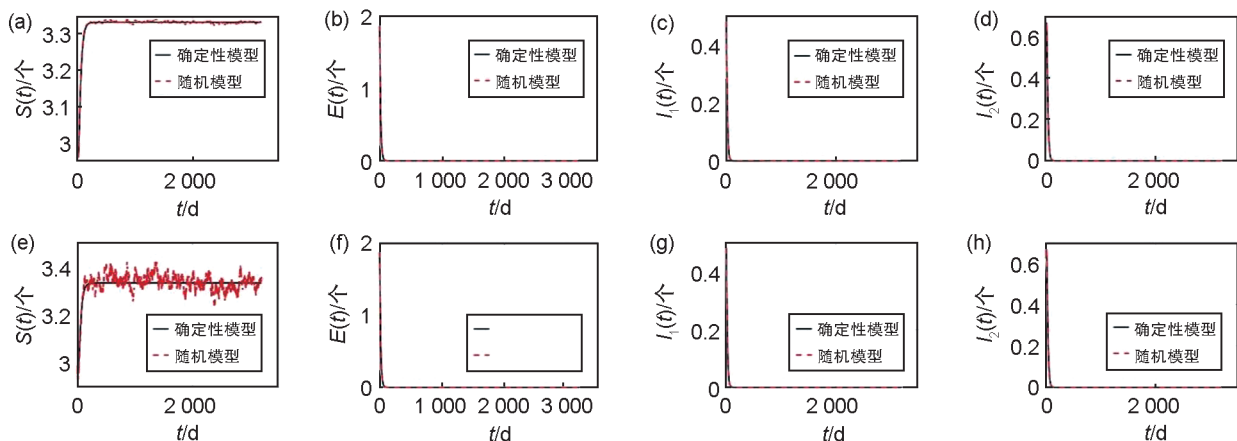


图1 $R_0 < 1$ 时确定性模型与随机模型解的渐近行为对比

(a)—(d)表示在较小的干扰强度下, 确定性模型和随机模型解 $(S(t), E(t), I_1(t), I_2(t))$ 的轨线图; (e)—(h)表示在较大的干扰强度下, 确定性模型和随机模型解 $(S(t), E(t), I_1(t), I_2(t))$ 的轨线图

Fig. 1 Comparison of the asymptotic behavior of the solutions between the deterministic model and the stochastic model when $R_0 < 1$

(a)—(d) represent trajectory plots of deterministic and stochastic model solutions $(S(t), E(t), I_1(t), I_2(t))$ at small interference intensity; (e)—(h) represent trajectory plots of deterministic and stochastic model solutions at large interference intensity

0.8, $\sigma_1 = 0.008, \sigma_2 = 0.007, \sigma_3 = 0.008, \sigma_4 = 0.006$, 计算得到 $R_0 > 1$, 模拟结果如图 2 前四幅子图所示; 取 $\sigma_1 = 0.02, \sigma_2 = 0.03, \sigma_3 = 0.02, \sigma_4 = 0.03$, 其他参数值不变时, 模拟结果如图 2 后四幅子图所示。

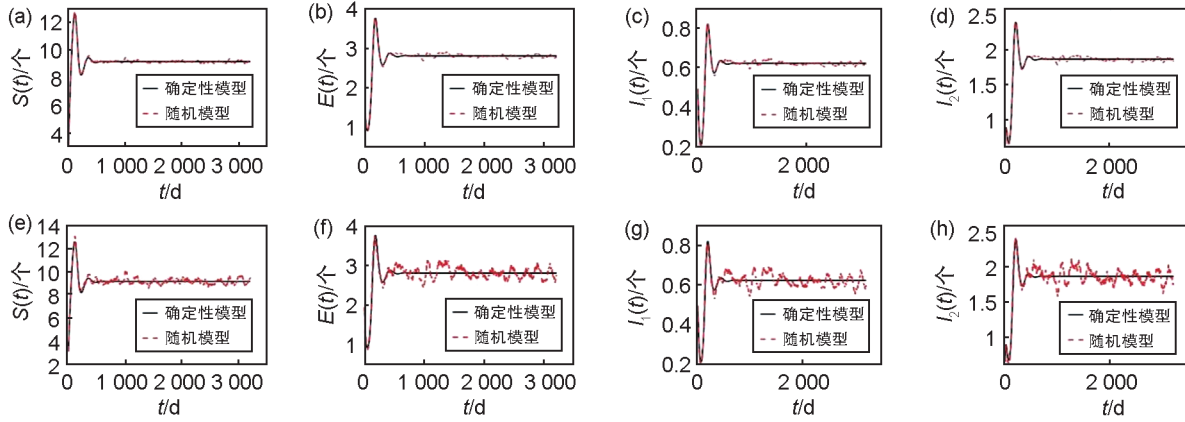


图2 $R_0 > 1$ 时确定性模型与随机模型的解的渐近行为对比

(a)—(d)表示在较小的干扰强度下,确定性模型和随机模型解($S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)$)的轨线图;(e)—(h)表示在较大的干扰强度下,确定性模型和随机模型解($S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)$)的轨线图

Fig. 2 Comparison of the asymptotic behavior between the solutions of the deterministic model and the stochastic model when $R_0 > 1$

(a)—(d) represent trajectory plots of deterministic and stochastic model solutions ($S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)$) at small interference intensity;(e)—(h) represent trajectory plots of deterministic and stochastic model solutions at large interference intensity

通过比较发现:当基本再生数 $R_0 > 1$ 时,确定模型(1)和随机模型(2)的解均收敛于地方病平衡点 P^* ,且随机干扰使模型的解在 P^* 附近波动,波动强度与干扰强度成正相关,这与定理3的结论一致。

(3) 取参数 $A = 8, \beta_1 = 0.03, \beta_2 = 0.02, b = 0.3, d = 0.1, m = 0.9, \eta_1 = 0.8, \mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.6, r_2 = 0.8, \sigma_1 = 0.005, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 2, \sigma_4 = 2$, 计算得到 $R_0 > 1$ 且 $R_0^s < 1$, 模拟结果如图 3 所示。从图 3 可看出,虽然确定性模型(1)的解仍在地方病平衡点处稳定,但随机模型(2)的传染病已经灭绝,由此得出当干扰强度足够大时,疾病将灭绝。

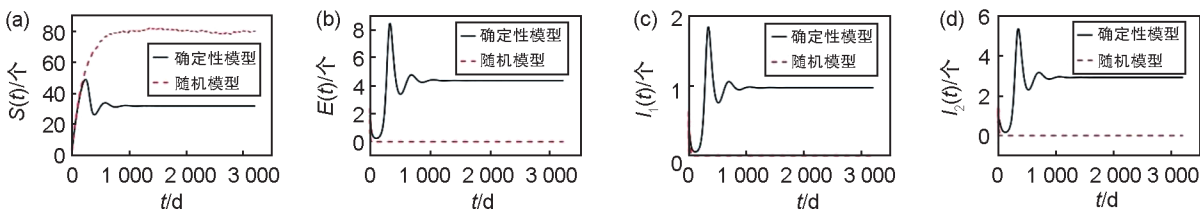


图3 $R_0 > 1$ 且 $R_0^s < 1$ 时确定性模型与随机模型的解的渐近行为对比

(a)—(d)表示在强干扰强度下,确定性模型和随机模型解($S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)$)的轨线图

Fig. 3 Comparison of the asymptotic behavior between the solutions of the deterministic model and the stochastic model when $R_0 > 1$ and $R_0^s < 1$

(a)—(d) represent that trajectory plots of deterministic model and stochastic model solution at strong interference intensity

从图中可以看出,虽然确定性模型的解仍在地方病平衡点处稳定,但随机模型的传染病已经灭绝,由此得出当干扰强度足够大时,疾病将灭绝,这与定理5的结论一致。

7 结论与展望

为了更加准确地研究传染病的传播机制,本文讨论了一类具有随机扰动的且潜伏期具备传染性的传染病传播模型,得到如下结论:

(1)为了解决模型解的适定性,我们通过构造 Lyapunov 函数并结合 Itô 公式等方法,得到了随

机模型全局正解的存在唯一性,这表明了建立模型的正确性;

(2)当基本再生数 $R_0 < 1$ 时,确定性模型趋向于无病平衡点 P^0 ,而随机模型的解在 P^0 附近波动,这表明,不管是否有随机干扰,疾病均会灭绝;

(3)当 $R_0 > 1$ 且参数满足 $\left(C_4 \frac{d}{2} \wedge C_5 \frac{d+\mu_1+\mu_2}{4} \wedge C_6 \frac{d+\eta_1+m}{4} \wedge C_7 \frac{b+d+r_2}{2}\right) (S^{*2} \wedge E^{*2} \wedge I_1^{*2} \wedge I_2^{*2}) > \delta$ 时,

确定性模型趋向于地方病平衡点 P^* ,而随机模型的解在 P^* 附近波动,这意味着传染病持续存在,一旦持续,会给人类社会带来极大灾难,因此本文给出了疾病灭绝的阈值 R_0^* ,当 $R_0^* < 1$ 时,传染病灭绝,这意味着在疾病持续存在时,足够大的干扰强度能使传染病灭绝,此结果为人类控制疾病提供一种方法:为了减少疾病传播,可以通过增强人类防护意识、政府积极出台相应的政策等方法来增加随机干扰强度,从而使阈值 $R_0^* < 1$,以此来达到有效控制疾病传播的目的;

(4)为更好地显示模型的动力学行为,我们进行了数值模拟,数值模拟显示当随机干扰强度足够大时,传染病会灭绝,这与理论结果是一致的。

本文相比于确定性模型,考虑环境中随机因素的影响,所得的理论结果具有一定的现实意义,但是,研究内容有待进一步深入与完善。一方面,模型中假设治愈者不再被感染,而在现实中,治愈者也存在复发情况,因而建立一类复发和潜伏期传染的传染病模型也是非常必要的;另一方面,现实中,各种状态之间的转化不是立刻完成的,存在时间差,由此可见,在现实生活中,时滞现象普遍存在,且在传染病的动力学分析中考虑时滞因素能够更真实地反映传染病的传播规律,因而建立具有时滞的传染病动力学模型具有其合理性。下一步的工作可以构建更贴切实际的传染病模型,并分析其动力学性质。

参考文献:

- [1] 邢伟,颜七笙,杨志辉,等.具有潜伏期的寨卡传染病模型的稳定性分析[J].河北师范大学学报(自然科学版),2017,41(1):5-10. DOI: 10.13763/j.cnki.jhebnu.nse.2017.01.002.
- [2] 徐凯,周宗放,钱茜.考虑潜伏期的关联信用风险传染机理研究[J].运筹与管理,2020,29(3):190-197. DOI: 10.12005/orms.2020.0078
- [3] AZMAN A S, RUDOLPH K E, CUMMINGS D A T, et al. The Incubation Period of Cholera: a Systematic Review[J]. *J Infect*, 2013, 66(5): 432-438. DOI: 10.1016/j.jinf.2012.11.013.
- [4] JACOBS SLIFKA K M, BLACKSTOCK A, NGUYEN V, et al. Estimating the Incubation Period of *Salmonella* Urinary Tract Infections Using Foodborne Outbreak Data [J]. *Foodborne Pathog Dis*, 2020, 17(10): 628-630. DOI: 10.1089/fpd.2019.2787.
- [5] WANG W, WANG X N, GUO K, et al. Global Analysis of a Diffusive Viral Model with Cell-to-cell Infection and Incubation Period[J]. *Math Meth Appl Sci*, 2020, 43(9): 5963-5978. DOI: 10.1002/mma.6339.
- [6] WAN S Y, LIU J, LIU M. Progress on the Incubation Period of COVID-19[J]. *Chin Sci Bull*, 2021, 66(15): 1802-1811. DOI: 10.1360/tb-2020-0698.
- [7] ABID A L, MUHAMMAD O, GUL Z, et al. 潜伏期和染病期均具有传染性的媒介传染病模型的全局稳定性分析[J].应用泛函分析学报,2012,14(4):321-329.
- [8] 王晓静,梁宇,郭松柏,等.一类具有隔离措施的COVID-19传染病模型的动力学分析[J].安徽大学学报(自然科学版),2022,46(6):12-20.
- [9] WANG X J, LIANG Y, GUO S B, et al. Dynamic Analysis of a COVID-19 Infectious Disease Model with Isolation Measures[J]. *J Anhui Univ Nat Sci Ed*, 2022, 46(6): 12-20.
- [10] 王冲,郭新茹,刘佳文,等.具有潜伏期的传染病模型的稳定性分析[J].大庆师范学院学报,2021,41(6):111-116. DOI: 10.13356/j.cnki.jdnu.2095-0063.2021.06.014
- [11] WANG C, GUO X R, LIU J W, et al. Stability Analysis of Infectious Disease Model with Latent Period[J]. *J Daqing Norm Univ*, 2021, 41(6): 111-116. DOI: 10.13356/j.cnki.jdnu.2095-0063.2021.06.014
- [12] 李文智,薛亚奎.一类埃博拉病毒的传染病模型分析[J].重庆理工大学学报(自然科学版),2020,34(2):245-251. DOI: 10.3969/j.issn.1674-8425(z).2020.02.034.
- [13] LI W Z, XUE Y K. Analysis of an Epidemic Model with

- Ebola Virus[J]. *J Chongqing Inst Technol*, 2020, **34**(2): 245–251. DOI: 10.3969/j.issn.1674-8425(z).2020.02.034.
- [11] 张丽娟, 王福昌, 万永革, 等. 一类潜伏期有传染性的传染病模型动力学分析[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(8): 866–873. DOI: 10.21656/1000-0887.410251.
- ZHANG L J, WANG F C, WAN Y G, *et al.* Dynamic Analysis of an Epidemic Model with Infectivity in the Incubation Period[J]. *Appl Math Mech*, 2021, **42**(8): 866–873. DOI: 10.21656/1000-0887.410251.
- [12] GAO Y M, SHI C, CHEN Y J, *et al.* A Cluster of the Corona Virus Disease 2019 Caused by Incubation Period Transmission in Wuxi, China[J]. *J Infect*, 2020, **80**(6): 666–670. DOI: 10.1016/j.jinf.2020.03.042.
- [13] 邱理杨, 季巧英, 夏永玲, 等. 丽水市新型冠状病毒肺炎聚集性病例潜伏期传染性分析[J]. *海南医学*, 2021, **32**(13): 1720–1722. DOI: 10.3969/j.issn.1003-6350.2021.13.025.
- QIU L Y, JI Q Y, XIA Y L, *et al.* Analysis on the Infectivity of Clustered Cases of Coronavirus Disease 2019 During Incubation Period in Lishui City[J]. *Hainan Med J*, 2021, **32**(13): 1720–1722. DOI: 10.3969/j.issn.1003-6350.2021.13.025.
- [14] 高建忠, 张太雷. 一类具有随机效应的SIRI传染病模型的定性分析[J]. *山东大学学报*, 2019, **54**(7): 89–99.
- GAO J S, ZHANG T L. Qualitative Analysis of a SIRI Infectious Disease Model with Random Effects[J]. *J Shandong Univ*, 2019, **54**(7): 89–99.
- [15] 刘世杰, 刘茂省. 带Lévy跳的随机SIQR模型的分析研究[J]. *重庆理工大学学报(自然科学)*, 2021(7): 242–250.
- LIU S J, LIU M X. Analysis of Stochastic SIQR Epidemic Model with Lévy Jumps[J]. *J Chongqing Univ Technol Nat Sci*, 2021(7): 242–250.
- [16] YUAN H J, ZHANG Z T, HE X F, *et al.* Stochastic Model Assessment of Low-Cost Devices Considering the Impacts of Multipath Effects and Atmospheric Delays[J]. *Measurement*. 2022, **188**: 1–15. DOI: 10.1016/J.MEASUREMENT.2021.110619.
- [17] BARDINA X, FERRANTE M, ROVIRA C. A Stochastic Epidemic Model of COVID-19 Disease[J]. *AIMS Math*, 2020, **5**(6): 7661–7677. DOI: 10.3934/math.2020490.
- [18] LIU Q, JIANG D Q, HAYAT T, *et al.* Stationary Distribution and Extinction of a Stochastic SIRI Epidemic Model with Relapse[J]. *Stoch Anal Appl*, 2018, **36**(1): 138–151. DOI: 10.1080/07362994.2017.1378897.
- [19] 胡瑞, 黄立冬, 李荣庭, 等. 一类潜伏期与染病期均具有传染性的随机传染病模型[J]. *云南民族大学学报(自然科学版)*, 2022, **31**(2): 213–220.
- HU R, HUANG L D, LI R T, *et al.* A Stochastic Epidemic Model with Infectivity in both Incubation Period and Infection Period[J]. *J Yunnan Minzu Univ Nat Sci Ed*, 2022, **31**(2): 213–220.
- [20] 杜金姬, 秦闯亮, 陈海波, 等. 一类具有病毒变异的随机SEIR传染病模型的灭绝性与平稳分布[J]. *应用数学*, 2021, **34**(3): 768–778. DOI: 10.3770/j.issn: 2095-2651.2019.03.005.
- DU J J, QIN C L, CHEN H B, *et al.* Extinction and Stationary Distribution of a Stochastic SEIR Epidemic Model with Virus Mutation[J]. *Math Appl*, 2021, **34**(3): 768–778. DOI: 10.3770/j.issn: 2095-2651.2019.03.005.
- [21] ZHANG X B, ZHANG X H. The Threshold of a Deterministic and a Stochastic SIQS Epidemic Model with Varying Total Population Size[J]. *Appl Math Model*, 2021, **91**: 749–767. DOI: 10.1016/j.apm.2020.09.050.
- [22] HOU T F, LAN G J, YUAN S L, *et al.* Threshold Dynamics of a Stochastic SIHR Epidemic Model of COVID-19 with General Population-size Dependent Contact Rate[J]. *Math Biosci Eng*, 2022, **19**(4): 4217–4236. DOI: 10.3934/mbe.2022195.
- [23] EL FATINI M, EL KHALIFI M, GERLACH R, *et al.* Stationary Distribution and Threshold Dynamics of a Stochastic SIRS Model with a General Incidence[J]. *Phys A Stat Mech Appl*, 2019, **534**: 120696. DOI: 10.1016/j.physa.2019.03.061.
- [24] 李录苹, 孔丽丽, 陈慧琴, 等. 一类随机埃博拉传染病模型的动力学行为分析[J]. *系统科学与数学*, 2021, **41**(11): 3008–3028. DOI: 10.3969/j.issn.1674-8425(z).2020.02.034.
- LI L P, KONG L L, CHEN H Q, *et al.* Dynamic Behavior Analysis of a Stochastic Ebola Epidemic Model[J]. *J Syst Sci Math Sci*, 2021, **41**(11): 3008–3028. DOI: 10.3969/j.issn.1674-8425(z).2020.02.034.
- [25] 秦闯亮, 杜金姬, 慧远先. 具隔离和潜伏期传染性的随机SEIR模型的稳定性和灭绝性[J]. *工程数学学报*, 2023, **40**(2): 295–309.
- QIN C L, DU J J, HUI Y X. Stabilization and Extinction of a Stochastic SEIR Model with Infectivity in Incubation Period and Homestead-isolation on the Susceptible[J]. *Chin J Eng Math*, 2023, **40**(2): 295–309.
- [26] ZHAO Y N, JIANG D Q. The Threshold of a Stochastic SIS Epidemic Model with Vaccination[J]. *Appl Math Comput*, 2014, **243**: 718–727. DOI: 10.1016/j.amc.2014.05.124.