

图的混合边邻域粘连度

闫伟*,魏宗田

(西安建筑科技大学 理学院,陕西 西安 710055)

摘要:为了定量刻画边失效情形下的网络抗毁性,提出图的混合边邻域粘连度概念。给出了几类图的参数计算公式和最好可能的上、下界,用组合优化方法研究了该参数的极值问题。通过比较几类边邻域抗毁性参数的区分度,指出混合边邻域粘连度刻画某些网络的抗毁性更为精确。

关键词:图;网络抗毁性;混合边邻域粘连度;界;极值图

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2024)05-0923-12

Mixed Edge Neighbor Tenacity of Graphs

YAN Wei*, WEI Zongtian

(School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In order to quantitatively characterize the network invulnerability in the case of edge failure, the concept of mixed edge neighbor tenacity was proposed. The parameter calculation formulas of several types of graphs and the best possible upper and lower bounds were given, and the extreme value problem of this parameter was studied by combinatorial optimization method. By comparing the discrimination degrees of several types of edge neighbor invulnerability parameters, it is shown that the mixed edge neighbor tenacity is more accurate to characterize the invulnerability of some networks.

Key words: graph; network invulnerability; mixed edge neighbor tenacity; bound; extreme graph

0 引言

间谍网络的概念是由 Gunther 和 Hartnell 提出的^[1],他们通过一个图来模拟间谍网络,其中图的顶点代表间谍或站点,边代表通讯方式。间谍网络最重要的特性是:如果间谍被捕,与他们直接接触的间谍是不可靠的。当交通、输电等网络中的某一条线路被破坏或失效后,会影响其周围站点和线路;当新冠感染等高危病毒传播网络中的某一条传播途径得到控制时,其周边感染的风险也会降低。基于上述背景的抗毁性参数,称为邻域抗毁性参数。

在网络邻域抗毁性分析中,主要考虑三个因素^[2]:(1)破坏网络的难易程度;(2)网络被破坏的严重程度;(3)有多少顶点仍然保持连通。因此,邻域连通度^[3]、边邻域连通度^[4-5]、邻域完整度^[6]、边邻域完整度^[7]、邻域离散数^[8]、边邻域离散数^[9-10]、邻域坚韧度^[11]、边邻域坚韧度^[12-13]、邻域毁裂度^[14]、边邻域毁裂度^[15-16]等参数被引入,以衡量网络在“邻域”情形下的抗毁性。

设 $G=(V,E)$ 是一个简单图,分别称 $N(e)=\{f|f\in E(G),\text{且}e\text{和}f\text{相邻}\}$ 和 $N[e]=N(e)\cup\{e\}$ 为 e 的开邻域和闭邻域。

收稿日期:2023-04-27;接受日期:2023-07-24

基金项目:国家自然科学基金(61902304)

* 通信作者:闫伟(1998-),男,陕西宝鸡人,硕士研究生,研究方向为图论、组合优化及其应用。E-mail:3251546605@qq.com

引文格式:闫伟,魏宗田.图的混合边邻域粘连度[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(5):923-934. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023130

若 $X \subseteq E(G)$, 则分别称 $N(X) = \{f | X \in E(G), f \in E/X \text{ 且存在 } e \in X, \text{ 使得 } e \text{ 和 } f \text{ 相邻}\}$ 和 $N[X] = N(X) \cup X$ 为 X 的开邻域和闭邻域。若将 $N[X]$ 中的边和与 X 中的边关联的点均从 G 中删除, 则称 X 为 G 的一个边颠覆策略, 记剩余子图为 G/X 。对连通图 G , 设 $X \subseteq E(G)$, 若 G/X 不连通, 或孤立点或空集 \emptyset , 则称 X 为 G 的一个邻域边割集。

定义 1^[4] 设 G 是连通图, 其边邻域连通度的定义为: $\Lambda(G) = \min\{|X|: X \subseteq E(G)\}$, 其中 X 为 G 的邻域边割集。

边邻域连通度是基于因素(1)考虑的。

定义 2^[7] 设 G 是连通图, 其边邻域完整度的定义为: $ENI(G) = \min\{|X| + m(G/X): X \subseteq E(G)\}$, 其中 $m(G/X)$ 为 G/X 的最大连通分支的阶。

边邻域完整度是基于因素(1)和因素(3)考虑的。

定义 3^[9] 设 G 是连通图, 其边邻域离散数的定义为: $ENS(G) = \min\{\omega(G/X) - |X|: X \subseteq E(G)\}$, 其中 X 为 G 的邻域边割集, $\omega(G/X)$ 为 G/X 的连通分支数。

定义 4^[12] 设 G 是连通图, 其边邻域坚韧度的定义为:

$$t_{EN}(G) = \min\left\{\frac{|X|}{\omega(G/X)}: X \subseteq E(G)\right\},$$

其中 X 为 G 的邻域边割集, $\omega(G/X)$ 为 G/X 的连通分支数。

边邻域离散数和边邻域坚韧度是基于因素(1)和因素(2)考虑的。边邻域坚韧度是边邻域离散数的除法形式, 尽管这两个参数在定义上有一些相似之处, 但在衡量网络的抗毁性方面作用不同。

定义 5^[15] 设 G 是连通图, 其边邻域毁裂度的定义为:

$$ENR(G) = \min\{\omega(G/X) - |X| - m(G/X): X \subseteq E(G)\},$$

其中 X 为 G 的邻域边割集, $m(G/X)$ 和 $\omega(G/X)$ 分别为 G/X 的最大连通分支的阶和连通分支数。

边邻域毁裂度是基于因素(1)、(2)和(3)考虑的。是视角较为全面的抗毁性参数。

为了更好地刻画边失效情形下的网络抗毁性, 本文提出图的混合边邻域粘力度概念。

定义 6 设 G 是连通图, 其混合边邻域粘力度定义为

$$MENT(G) = \min\left\{\frac{|X| + m(G/X)}{\omega(G/X)}: X \subseteq E(G)\right\},$$

其中 X 为 G 的邻域边割集, $m(G/X)$ 和 $\omega(G/X)$ 分别为 G/X 的最大连通分支的阶和连通分支数。若有 X^* , 使得 $MENT(G) = \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)}$, 则称 X^* 为 G 的一个混合边邻域粘连集, 简记为 $MENT$ -集。

显然, 混合边邻域粘力度越大, 网络抗毁性越好。

混合边邻域粘力度和边邻域毁裂度在衡量网络的抗毁性方面作用不同。

例 1 设 $K_{8,7}, P_{15}$ 表示同阶的完全二部分图和路, 则它们的边邻域毁裂度均为 1, 而 $MENT(K_{8,7}) = \frac{8}{7}, MENT(P_{15}) = \frac{6}{5}$, 混合边邻域粘力度不相等。

下文主要研究几类图的混合边邻域粘力度计算公式、一般图的参数上、下界和该参数的极值问题。

本文所讨论的图, 均是简单无向图, 未定义的概念和术语参见文献[17-18]。

1 几类基本图的混合边邻域粘力度

本节讨论并给出几类基本图的混合边邻域粘力度计算公式。

定理1 设 P_n 是 $n(\geq 3)$ 阶路, 则

$$MENT(P_n) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{n}, & \text{若 } n \equiv 0(\text{mod } 3); \\ 1, & \text{若 } n \equiv 1(\text{mod } 3); \\ 1 + \frac{3}{n+1}, & \text{若 } n \equiv 2(\text{mod } 3)。 \end{cases}$$

证明 当 $n = 3$ 时, 结论显然成立。当 $n \geq 4$ 时, 设 X 是 P_n 的一个邻域边割集且 $|X| = x(\geq 1)$, 则 P_n/X 至少有 $n - 2x$ 个顶点且 $\omega(P_n/X) \leq x + 1$, 所以 $m(P_n/X) \geq \left\lceil \frac{n - 2x}{x + 1} \right\rceil$ 。因 $\left\lceil \frac{n - 2x}{x + 1} \right\rceil \geq 1$, 故

有 $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor$ 。由混合边邻域粘连度的定义, $MENT(P_n) = \min_{\substack{1 \leq x \leq \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor \\ x \in \mathbb{Z}^+}} \frac{x + \left\lceil \frac{n - 2x}{x + 1} \right\rceil}{x + 1}$ 。

设 $f(x) = \frac{x + \frac{n - 2x}{x + 1}}{x + 1}$, $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor$, 则 $f'(x) = \frac{3x - 2n - 1}{(x + 1)^3}$ 。令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{2n + 1}{3}$, 当 $x < \frac{2n + 1}{3}$ 时, $f'(x) < 0$ 。由于 $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor < \frac{2n + 1}{3}$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor$ 上单调递减且在 $x^* = \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor$ 处取得最小值。根据 n 被 3 除的余数, 分以下三种情形讨论:

- (1) $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 时, $x^* = \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor = \frac{n}{3} - 1$, 则 $MENT(P_n) = f\left(\frac{n}{3} - 1\right) = 1 + \frac{3}{n}$;
- (2) $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ 时, $x^* = \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor = \frac{n - 1}{3}$, 则 $MENT(P_n) = f\left(\frac{n - 1}{3}\right) = 1$;
- (3) $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ 时, $x^* = \left\lfloor \frac{n - 1}{3} \right\rfloor = \frac{n - 2}{3}$, 则 $MENT(P_n) = f\left(\frac{n - 2}{3}\right) = 1 + \frac{3}{n + 1}$ 。

综上所述, 定理得证。

定理2 设 C_n 是 $n(\geq 3)$ 阶圈, 则

$$MENT(C_n) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{n}, & \text{若 } n \equiv 0(\text{mod } 3); \\ 1 + \frac{6}{n - 1}, & \text{若 } n \equiv 1(\text{mod } 3); \\ 1 + \frac{6}{n - 2}, & \text{若 } n \equiv 2(\text{mod } 3)。 \end{cases}$$

证明 当 $n = 3, 4, 5$ 时, 分别有 $MENT(C_3) = 2, MENT(C_4) = 3, MENT(C_5) = 3$, 结论成立。

下设 $n \geq 6$, 圈 C_n 的 $MENT$ -集为 X^* 。当删去 C_n 中任一条边 e 以及与 e 关联的边和点时, $C_n/\{e\}$ 为 $n - 2(\geq 4)$ 阶路。设路 P_{n-2} 的 $MENT$ -集为 X 且 $|X| = x(\geq 1)$, 易知 $\omega(C_n/X^*) = \omega(P_{n-2}/X) \leq x + 1$, 则 $m(C_n/X^*) \geq \left\lceil \frac{n - 2 - 2x}{x + 1} \right\rceil$ 。又因 $\left\lceil \frac{n - 2 - 2x}{x + 1} \right\rceil \geq 1$, 则 $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1$ 。显然, $X^* =$

$X \cup \{e\}$, 那么 $MENT(C_n) = \min_{\substack{1 \leq x \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 \\ x \in \mathbb{Z}^+}} \frac{x + 1 + \left\lceil \frac{n - 2 - 2x}{x + 1} \right\rceil}{x + 1}$ 。

设 $f(x) = \frac{x+1 + \frac{n-2-2x}{x+1}}{x+1}$, $1 \leq x \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$, 则 $f'(x) = \frac{2x-2n+2}{(x+1)^3}$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = n-1$, 当 $x < n-1$ 时, $f'(x) < 0$. 由于 $1 \leq x \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 < n-1$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $1 \leq x \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ 上单调递减且在 $x^* = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ 处取得最小值, 根据 n 被 3 除的余数, 分以下三种情形讨论:

- (1) $n \equiv 0 \pmod{3}$ 时, $x^* = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 = \frac{n}{3} - 1$, 则 $MENT(C_n) = f(\frac{n}{3} - 1) = 1 + \frac{3}{n}$;
- (2) $n \equiv 1 \pmod{3}$ 时, $x^* = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 = \frac{n-4}{3}$, 则 $MENT(C_n) = f(\frac{n-4}{3}) = 1 + \frac{6}{n-1}$;
- (3) $n \equiv 2 \pmod{3}$ 时, $x^* = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 = \frac{n-5}{3}$, 则 $MENT(C_n) = f(\frac{n-5}{3}) = 1 + \frac{6}{n-2}$.

综上所述, 定理得证。

定义 7^[18] 将 $n-k$ 阶路 P_{n-k} 的一个端点和星图 $S_{1,k}$ 的中心点重合而成的 $n (\geq 4)$ 阶图称为彗星图, 记作 $T_{n,k} (2 \leq k \leq n-3)$, 如图 1 所示。

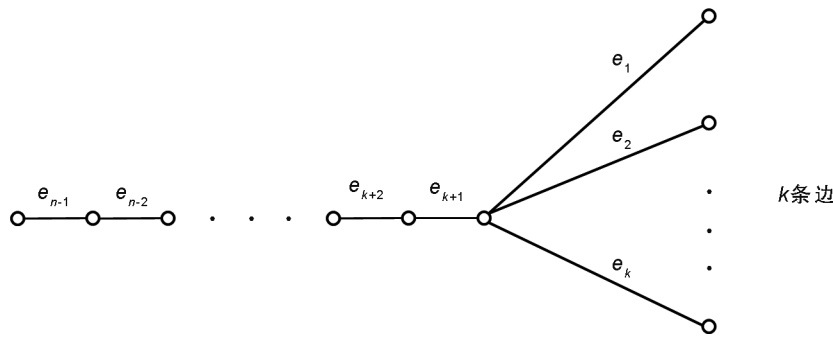


图 1 彗星图 $T_{n,k}$
Fig. 1 Comet $T_{n,k}$

定理 3 设 $T_{n,k} (2 \leq k \leq n-3)$ 是 $n (\geq 4)$ 阶彗星图, 则

$$MENT(T_{n,k}) = \begin{cases} \frac{n-k+3}{n+2k}, & \text{若 } n-k \equiv 0 \pmod{3}; \\ \frac{n-k+5}{n+2k-1}, & \text{若 } n-k \equiv 1 \pmod{3}; \\ \frac{n-k+4}{n+2k-2}, & \text{若 } n-k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

证明 当 $n-k = 2, 3, 4, 5$ 时, 分别有 $MENT(T_{n,n-k}) = \frac{2}{n-2}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \frac{3}{n-4}$, 结论成立。

下设 $n-k \geq 6 (n \geq 8)$. 设 $E(S_{1,k}) = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}$, $E(P_{n-k}) = \{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{n-1}\}$, X^* 为 $T_{n,k}$ 的一个 $MENT$ -集。由彗星图的结构可知, 必有 $e_{k+1} \in X^*$ 或 X^* 中含有 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 中的某一条边 (见图 1), 故分以下两种情形讨论:

情形 1 当 $e_{k+1} \in X^*$ 时, $T_{n,k} / \{e_{k+1}\}$ 为 k 个孤立点和路 P_{n-k-2} , 其中 $n-k-2 \geq 4$. 设路 P_{n-k-2} 的 $MENT$ -集为 X 且 $|X| = x (\geq 1)$, 则 $|X^*| = x+1$, $m(T_{n,k}/X^*) = m(T_{n,k}/X)$, $\omega(T_{n,k}/X^*) = x+1+k$. 结合定理 1 的证明过程, 有

- (1) $n-k \equiv 0 \pmod{3}$ 时, $x = \frac{n-k-2-1}{3}$, $m(P_{n-k-2}/X) = 1$, 则 $|X^*| = \frac{n-k}{3}$, $m(T_{n,k}/X^*) = 1$,

$\omega(T_{n,k}/X^*) = \frac{n+2k}{3}$ 。则 $MENT_1(T_{n,k}) = \frac{n-k+3}{n+2k}$;

(2) $n-k \equiv 1 \pmod{3}$ 时, $x = \frac{n-k-2-2}{3}$, $m(P_{n-k-2}/X) = 2$, 则 $|X^*| = \frac{n-k-1}{3}$, $m(T_{n,k}/X^*) = 2$, $\omega(T_{n,k}/X^*) = \frac{n+2k-1}{3}$ 。则 $MENT_1(T_{n,k}) = \frac{n-k+5}{n+2k-1}$;

(3) $n-k \equiv 2 \pmod{3}$ 时, $x = \frac{n-k-2}{3} - 1$, $m(P_{n-k-2}/X) = 2$, 则 $|X^*| = \frac{n-k-2}{3}$, $m(T_{n,k}/X^*) = 2$, $\omega(T_{n,k}/X^*) = \frac{n+2k-2}{3}$ 。则 $MENT_1(T_{n,k}) = \frac{n-k+4}{n+2k-2}$ 。

情形2 当 X^* 中含有 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 中的某一条边时, 不失一般性, 假设 $e_1 \in X^*$, 此时 $T_{n,k}/\{e_1\}$ 为 $k-1$ 个孤立点和路 P_{n-k-1} , 其中 $n-k-1 \geq 5$ 。设路 P_{n-k-1} 的 $MENT$ -集为 X 且 $|X| = x (\geq 1)$, 则 $|X^*| = x+1$, $m(T_{n,k}/X^*) = m(T_{n,k}/X)$, $\omega(T_{n,k}/X^*) = x+k$ 。结合定理1的证明过程, 有

(1) $n-k \equiv 0 \pmod{3}$ 时, $x = \frac{n-k-1-2}{3}$, $m(P_{n-k-1}/X) = 2$, 则 $|X^*| = \frac{n-k}{3}$, $m(T_{n,k}/X^*) = 2$, $\omega(T_{n,k}/X^*) = \frac{n+2k-3}{3}$ 。则 $MENT_2(T_{n,k}) = \frac{n-k+6}{n+2k-3}$;

(2) $n-k \equiv 1 \pmod{3}$ 时, $x = \frac{n-k-1}{3} - 1$, $m(P_{n-k-1}/X) = 2$, 则 $|X^*| = \frac{n-k-1}{3}$, $m(T_{n,k}/X^*) = 2$, $\omega(T_{n,k}/X^*) = \frac{n+2k-4}{3}$ 。则 $MENT_2(T_{n,k}) = \frac{n-k+5}{n+2k-4}$;

(3) $n-k \equiv 2 \pmod{3}$ 时, $x = \frac{n-k-1-1}{3}$, $m(P_{n-k-1}/X) = 1$, 则 $|X^*| = \frac{n-k+1}{3}$, $m(T_{n,k}/X^*) = 1$, $\omega(T_{n,k}/X^*) = \frac{n+2k-2}{3}$ 。则 $MENT_2(T_{n,k}) = \frac{n-k+4}{n+2k-2}$ 。

综上比较得, 当 $n-k \equiv 0 \pmod{3}$, $n-k \equiv 1 \pmod{3}$ 时, $MENT_1(T_{n,k}) < MENT_2(T_{n,k})$; 当 $n-k \equiv 2 \pmod{3}$ 时, $MENT_1(T_{n,k}) = MENT_2(T_{n,k})$, 则 $MENT(T_{n,k}) = MENT_1(T_{n,k})$ 。

推论1 设 $S_{1,n-1}$ 是 $n (\geq 4)$ 阶星图, 则 $MENT(S_{1,n-1}) = \frac{2}{n-2}$ 。

定理4 设 $DS(m, n)$ 是 $m+n+2$ 阶双星图, 则 $MENT(DS(m, n)) = \frac{2}{m+n}$ 。

证明 当 $m=n=1$ 时, 结论显然成立。当 $m \geq 2$ 或 $n \geq 2$ 时, 设双星图 $DS(m, n)$ 的两个中心顶点分别为 u 和 v , 由双星图的结构可知, 混合边邻域粘连度的 $MENT$ -集为 $\{uv\}$, $\omega(DS(m, n)/\{uv\}) = m+n$ 且 $m(DS(m, n)/\{uv\}) = 1$, 则 $MENT(DS(m, n)) = \frac{2}{m+n}$ 。

定理5 设 K_n 是 $n (\geq 3)$ 阶完全图, 则 $MENT(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ 。

证明 显然, 对于 $\forall e \in E(K_n)$ 都有 $K_n/\{e\} = K_{n-2}$ 。Cozzens 等^[4]证明了 $\Lambda(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 。因此, 对于 K_n 的任意邻域边割集 X , 都有 $|X| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 且 $\omega(K_n/X) \leq 1$, $m(K_n/X) \geq 1$, 则 $MENT(K_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ 。

另一方面, 当 n 为偶数时, 设 $M = \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_{n/2}v_{n/2}\}$ 是 K_n 的一个最大匹配。令 $M' = \{M - u_1v_1\} \cup u_1v_2$, 那么 $K_n/M' = v_1$ 是一个孤立点。则 $MENT(K_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ 。当 n 为奇数时, K_n 必存在一个最大匹配 M , 使得 $|M| = \frac{n-1}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 且 K_n/M 是一个孤立点。我们依然可得 $MENT(K_n) \leq$

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1。$$

综上所述,定理得证。

定理6 设 $K_{m,n}$ 是完全二部分图,其中 $m, n \geq 2$ 且 $m \leq n$, 则 $MENT(K_{m,n}) = \frac{m+1}{n-1}$ 。

证明 设 $K_{m,n}$ 的顶点二部划分为 (M, N) , 其中 $|M|=m, |N|=n$ 。由 $K_{m,n}$ 的结构易知, 对于 K_n 的任意一个邻域边割集 X , 都有 $|X| \geq m, \omega(K_{m,n}/X) \leq n-1$ 且 $m(K_{m,n}/X) \geq 1$, 则 $MENT(K_{m,n}) \geq \frac{m+1}{n-1}$ 。

另一方面, 设 $X = N[e], e \in E(K_{m,n})$, 则存在 X , 满足 $|X|=m, \omega(K_{m,n}/X) = n-1, m(K_{m,n}/X) = 1$ 。由混合边邻域粘连度的定义可知, $MENT(K_{m,n}) \leq \frac{m+1}{n-1}$ 。

综上所述,定理得证。

定理7 设 $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ 是完全 p 部分图, 各部为 $N_1, N_2, \dots, N_p, |N_i|=n_i, i=1, 2, \dots, p, n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$, 则 $MENT(G) = \frac{1}{n_p} (\sum_{i=1}^{p-1} n_i - |M^*| + 1)$, 其中 M^* 为 G 的一个最大匹配。

证明 显然, 对 G 的任意一个邻域边割集 X , 有 G/X 中的点仅属于 G 某一划分。设 X^* 是 G 的一个 $MENT$ -集, 则 $\omega(G/X^*) = n_p, X^*$ 必定取自 $G - N_p$ 中的边, 且使 $(G - N_p)/X^* = \emptyset$, 否则 $\omega(G/X^*) = 1$ 。

假设 $G - N_p$ 有完美匹配 M , 则 $|X^*| = |M|$ 。否则, 设 M^* 为 $G - N_p$ 的一个最大匹配, 则 M^* 同时也是 G 的一个最大匹配, 设 U 为 $G - N_p$ 在 M^* 下的非饱和点集, 则以 U 中每个点为一个端点, 以 $G - N_p$ 中的点为另一个端点, 选择其中的 $|U|$ 条边且这 $|U|$ 条边中的每一条都关联了 U 中不同的点组成的边集, 连同 M^* 构成 X^* , 则 $|X^*| = |U| + |M^*|$ 。又因 $|U| = \sum_{i=1}^{p-1} n_i - 2|M^*|$, 因此

$$MENT(G) = \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)} = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} n_i - 2|M^*| + |M^*| + 1}{n_p} = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} n_i - |M^*| + 1}{n_p}。$$

例2 设 $G = K_{1,3,3,4}$ 是完全 4 部分图, 则 $MENT(G) = \frac{7-3+1}{4} = \frac{5}{4}$ 。

当 p 比较大时, 完全 p 部分图的最大匹配需通过算法解决。毛华等^[19]于 2013 年解决了多部图的最大匹配算法问题, 给出一个复杂度为 $O[n_p^2(p-1)]$ 的多项式时间算法。而完全 p 部分图是特殊的多部图, 所以完全 p 部分图的混合边邻域粘连度计算问题就完全解决了。

2 图的混合边邻域粘连度的界

本节讨论并给出混合边邻域粘连度的若干上、下界, 这些界同时给出混合边邻域粘连度与图的其他重要参数之间的关系, 而且都是最好可能的。

定理8 对任何 $n(\geq 3)$ 阶连通图 G , 都有 $MENT(G) \geq \frac{2}{n-2}$ 。

证明 设 X^* 是 G 的一个 $MENT$ -集, 则必有 $m(G/X^*) \geq 1$ 。由于 G 是连通的, 故有 $|X^*| \geq 1$, 又因为 G 不含环, 则 $\omega(G/X^*) \leq n-2$ 。由混合边邻域粘连度的定义, $MENT(G) \geq \frac{2}{n-2}$ 。

注1 该下界可由星图或双星图达到, 因此是最好可能的。

定理9 对任何 $n(\geq 3)$ 阶连通图 G , 都有 $MENT(G) \geq \frac{\Lambda(G)+1}{\alpha(G)}$, 其中 $\alpha(G)$ 和 $\Lambda(G)$ 分别表示

G 的独立数和边邻域连通度。

证明 设 X^* 是 G 的一个 $MENT$ -集, 则显然有 $|X^*| \geq \Lambda(G)$, $\omega(G/X^*) \leq \alpha(G)$ 且 $m(G/X^*) \geq 1$ 。由混合边邻域粘连度的定义, $MENT(G) \geq \frac{\Lambda(G)+1}{\alpha(G)}$ 。

定理 10 对任何 $n(\geq 3)$ 阶连通图 G , 都有 $MENT(G) \geq \frac{ENI(G)}{\alpha(G)}$, 其中 $\alpha(G)$ 表示 G 的独立数。

证明 设 X^* 是 G 的一个 $MENT$ -集, 则 X^* 也是 G 的一个邻域边割集。由边邻域完整度和混合边邻域粘连度的定义, 有 $\omega(G/X^*) \leq \alpha(G)$, $|X^*| + m(G/X^*) \geq ENI(G)$ 。所以 $MENT(G) \geq \frac{ENI(G)}{\alpha(G)}$ 。

注 2 定理 9 和定理 10 的下界可由双星图或 $n-k=3$ 时的彗星图 $T_{n,k}$ 达到, 因此是最好可能的。

定理 11 对任何 $n(\geq 3)$ 阶连通图 G , 都有 $MENT(G) \geq \frac{\Lambda(G)+1}{n-\Lambda(G)-1}$, 其中 $\Lambda(G)$ 表示 G 的边邻域连通度。

证明 设 X 是 G 的一个邻域边割集, 则显然有 $|X| \geq \Lambda(G)$ 且 $m(G/X) \geq 1$ 。 G 的边导出子图 $G[X]$ 至多有 $|X|+1$ 个顶点, 则 $\omega(G/X) \leq n-|X|-1 \leq n-\Lambda(G)-1$ 。由混合边邻域粘连度的定义, $MENT(G) \geq \frac{\Lambda(G)+1}{n-\Lambda(G)-1}$ 。

注 3 该下界可由星图或双星图达到, 因此是最好可能的。

定理 12 对任何 $n(\geq 3)$ 阶连通图 G , 都有 $MENT(G) \leq \alpha'(G)+1$, 其中 $\alpha'(G)$ 表示 G 的匹配数。

证明 设 M 是 G 的一个最大匹配, 则显然 M 是 G 的一个邻域边割集且 $|M| = \alpha'(G)$ 。下面分两种情形讨论:

情形 1 若 M 不是完美匹配, 则 G/M 是每个分支都是孤立点的子图, 且 $\omega(G/M) = n - 2\alpha'(G) \geq 1$, $m(G/M) = 1$ 。由混合边邻域粘连度的定义, $MENT(G) \leq \frac{|M| + m(G/M)}{\omega(G/M)} = \frac{\alpha'(G)+1}{n-2\alpha'(G)}$;

情形 2 若 M 是完美匹配, 这时 $V(G)$ 中的每个点必定和 M 中的某一条边关联。设 $uv \in M$, 则除了边 uv , u 和 v 不与 M 中其他任何边关联。因 $n \geq 3$, 则必定存在边 $e \in M$ 使得 $N(e) \cap (E(G) - M) \neq \emptyset$ 。设 $M^* = \{f\} \cup (M - \{e\})$, 其中 f 是 $N(e) \cap (E(G) - M)$ 中的任意一条边, 则 $|M^*| = \alpha'(G)$, G/M^* 为一个孤立点。由混合边邻域粘连度的定义, $MENT(G) \leq \frac{|M^*| + m(G/M^*)}{\omega(G/M^*)} = \alpha'(G) + 1$ 。

又因 $\frac{\alpha'(G)+1}{n-2\alpha'(G)} \leq \alpha'(G)+1$, 则 $MENT(G) \leq \alpha'(G)+1$ 。

注 4 该上界可由完全图 K_n (n 为偶数) 达到。因此是最好可能的。

定理 13 对任何 $n(\geq 3)$ 阶连通图 G , 都有 $MENT(G) \geq t_{EN}(G) + \frac{1}{\alpha(G)}$, 其中 $t_{EN}(G)$ 和 $\alpha(G)$ 分别表示 G 的边邻域坚韧度和独立数。

证明 设 X^* 是 G 的一个 $MENT$ -集, 则必有 $m(G/X^*) \geq 1$, $\omega(G/X^*) \leq \alpha(G)$ 。若 X^{**} 是 G 的一个 t_{EN} -集, 即 $t_{EN}(G) = \frac{|X^{**}|}{\omega(G/X^{**})}$, 则

$$MENT(G) = \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)} \geq \frac{|X^*|}{\omega(G/X^*)} + \frac{1}{\omega(G/X^*)} \geq \frac{|X^{**}|}{\omega(G/X^{**})} + \frac{1}{\alpha(G)} = t_{EN}(G) + \frac{1}{\alpha(G)}。$$

注5 该下界可由双星图达到,因此是最好可能的。

定理 14 对任何 $n(\geq 3)$ 阶连通图 G , 都有 $MENT(G) \leq \frac{nt_{EN}(G)}{\Lambda(G)} - 1$, 其中 $t_{EN}(G)$ 和 $\Lambda(G)$ 分别表示 G 的边邻域坚韧度和边邻域连通度。

证明 设 X 是 G 的一个邻域边割集, 显然有 $|X| + m(G/X) \leq n - \omega(G/X)$ 。由混合边邻域粘连度的定义, $MENT(G) \leq \frac{|X| + m(G/X)}{\omega(G/X)} \leq \frac{n - \omega(G/X)}{\omega(G/X)}$, 表明 $1 \leq \omega(G/X) \leq \frac{n}{MENT(G) + 1}$ 。

另一方面, 因 $|X| \geq \Lambda(G)$, 所以 $\frac{|X|}{\omega(G/X)} \geq \frac{\Lambda(G)}{\omega(G/X)} \geq \frac{1}{n} [MENT(G) + 1] \Lambda(G)$ 。由边邻域坚韧度的定义以及 X 的任意性, $t_{EN}(G) \geq \frac{1}{n} [MENT(G) + 1] \Lambda(G)$, 即 $MENT(G) \leq \frac{nt_{EN}(G)}{\Lambda(G)} - 1$ 。

注6 该上界可由 $n = 3, 4, 5$ 阶路、星图或双星图达到,因此是最好可能的。

3 混合边邻域粘连度的极值问题

本节在顶点数和边数给定的条件下, 讨论并给出混合边邻域粘连度的极小值和极大值。

定理 15 设 $k, m, n \in Z^+$, $G_{n,m}$ 表示所有 $n(\geq 3)$ 个顶点 m 条边的非完全连通图的集合, 则

$$\min_{G \in G_{n,m}} MENT(G) = \begin{cases} \frac{k+2}{2(n-k)}, & k \text{ 为偶数,} \\ \frac{k+3}{2(n-k)}, & k \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

其中 k 满足 $\binom{k}{2} + (n-k)(k-1) < m \leq \binom{k}{2} + (n-k)k$ 且尽可能地小。

证明 设 G 是 $G_{n,m}$ 中混合边邻域粘连度最小的连通图, 令 X^* 是 G 的一个 $MENT$ -集, 则 X^* 是 G 的邻域边割集且 $MENT(G) = \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)}$ 。假设我们选择的 X^* 满足上述条件且使 X^* 尽可能大, 记 G/X^* 中至少含有两个顶点的分支为 G_1, G_2, \dots, G_p 。若 $p \geq 2$, 从 G_i 中选取一点 u_i , 使得 u_i 至少与 $V(G[X^*])$ 中的一点相邻, 其中 $i = 1, 2, \dots, p, G[X^*]$ 为 X^* 在 G 中的边导出子图。将 G_i 中的每条边 $u_i v_{ij}$ 都用新边 $u_p v_{ij}$ 替换, 记 $X_1 = \{u_p v_{ij} : v_{ij} \in V(G_i), i = 1, 2, \dots, p-1, j \geq 1\}$, 所得到的图为 G' , 则 G' 仍然是 n 个顶点 m 条边的连通图。不失一般性, 令 $X' = X^* \cup \{u_p v_{11}\}$, 其中 $u_p v_{11} \in X_1$, 则 X' 是 G' 的一个邻域边割集, 且 $m(G'/X') \leq m(G/X^*) - 1, \omega(G'/X') \geq \omega(G/X^*) + p - 2 \geq \omega(G/X^*)$, 这意味着

$$MENT(G') \leq \frac{|X'| + m(G'/X')}{\omega(G'/X')} \leq \frac{|X^*| + 1 + m(G/X^*) - 1}{\omega(G/X^*)} = \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)} = MENT(G)。$$

当 $MENT(G') = MENT(G)$ 时, 与 X^* 尽可能大矛盾, 当 $MENT(G') < MENT(G)$ 时, 与 G 的选取矛盾。因此, 设 $p = 1$ 并分以下两种情形讨论:

情形 1 G_1 是团。令 $|V(G_1)| = n_1$ 。当 $n_1 = 2$ 时, 设 $V(G_1) = \{u_1, u_2\}$, 从 $V(G_1)$ 中选取一点 u_i , 使得 u_i 至少与 $V(G[X^*])$ 中的一点相邻, $i = 1, 2$ 。不妨设 u_1 与 $V(G[X^*])$ 中的 v 相邻, 令 $X_1^{**} = X^* \cup \{u_1 v\}$, 则 X_1^{**} 是 G 的一个邻域边割集, 且有 $|X_1^{**}| = |X^*| + 1, m(G/X_1^{**}) = 1$, 以及 $\omega(G/X_1^{**}) = \omega(G/X^*)$, 这意味着 $\frac{|X_1^{**}| + m(G/X_1^{**})}{\omega(G/X_1^{**})} = \frac{|X^*| + 1 + 1}{\omega(G/X_1^*)} = \frac{|X^*| + 2}{\omega(G/X^*)} = MENT(G)$, 与 X^* 尽可能大矛盾。

当 $n_1 \geq 3$ 且为奇数时, G_1 必存在一个最大匹配 M , 使得 $|M| = \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$ 且 G_1/M 是一个孤立点。令 $X_2^{**} = X^* \cup M$, 则 X_2^{**} 是 G 的一个邻域边割集, 且有 $|X_2^{**}| = |X^*| + |M|$, $m(G/X_2^{**}) = 1$, 以及 $\omega(G/X_2^{**}) = \omega(G/X^*)$, 这意味着

$$\frac{|X_2^{**}| + m(G/X_2^{**})}{\omega(G/X_2^{**})} = \frac{|X^*| + \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + 1}{\omega(G/X^*)} < \frac{|X^*| + n_1}{\omega(G/X^*)} = MENT(G),$$

与混合边邻域粘速度的定义矛盾。

当 $n_1 \geq 3$ 且为偶数时, 设 $M = \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_{n_1/2}v_{n_1/2}\}$ 是 G_1 的一个完美匹配。令 $M' = \{M - u_1v_1\} \cup u_1v_2$, 则 $|M'| = \frac{n_1}{2}$ 且 $G_1/M' = v_1$ 是一个孤立点。令 $X_3^{**} = X^* \cup M'$, 则 X_3^{**} 是 G 的一个邻域边割集, 且有 $|X_3^{**}| = |X^*| + |M'|$, $m(G/X_3^{**}) = 1$, 以及 $\omega(G/X_3^{**}) = \omega(G/X^*)$, 这意味着

$$\frac{|X_3^{**}| + m(G/X_3^{**})}{\omega(G/X_3^{**})} = \frac{|X^*| + \frac{n_1}{2} + 1}{\omega(G/X^*)} < \frac{|X^*| + n_1}{\omega(G/X^*)} = MENT(G),$$

与混合边邻域粘速度的定义矛盾。

情形2 G_1 不是团。设 X_2 是 G_1 的一个邻域边割集, 则 $X_4^{**} = X^* \cup X_2$ 是 G 的一个邻域边割集, 且有 $|X_4^{**}| = |X^*| + |X_2|$, $m(G/X_4^{**}) \leq m(G/X^*) - |X_2| - 1$, 以及 $\omega(G/X_4^{**}) \geq \omega(G/X^*) + 1$, 这意味着

$$\frac{|X_4^{**}| + m(G/X_4^{**})}{\omega(G/X_4^{**})} \leq \frac{|X^*| + |X_2| + m(G/X^*) - |X_2| - 1}{\omega(G/X^*) + 1} < \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)} = MENT(G),$$

与混合边邻域粘速度的定义矛盾。

由以上讨论可知, $p = 0$, 即 $m(G/X^*) = 1$ 。由题设中 m 的取值范围可知, $G[X^*]$ 中仅可能存在 P_2 和 P_3 , 且 $G[X^*]$ 中的 P_3 尽可能少, 否则, 与 X^* 是 G 的一个 $MENT$ -集矛盾。

因此, 设 $x, r \in Z^+$, $|V(G[X^*])| = x$, $G[X^*]$ 中 P_3 的个数为 r 且 r 尽可能小, 则

$$\omega(G/X^*) = n - x, |X^*| = 2r + \frac{x - 3r}{2} = \frac{x + r}{2} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ 为偶数}; \\ \frac{x + 1}{2}, & x \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

由混合边邻域粘速度的定义, 就有

$$MENT(G) = \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)} = \frac{\frac{x + r}{2} + 1}{n - x} = \frac{x + r + 2}{2(n - x)} = \begin{cases} \frac{x + 2}{2(n - x)}, & x \text{ 为偶数}; \\ \frac{x + 3}{2(n - x)}, & x \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

可以断言 $x \geq k$, 否则,

$$m = |E(G)| \leq \binom{x}{2} + (n - x)x \leq \binom{k - 1}{2} + (n - k + 1)(k - 1) = \binom{k}{2} + (n - k)(k - 1),$$

与题设中的 m 矛盾, 于是就有

$$MENT(G) = \frac{x + r + 2}{2(n - x)} \geq \frac{k + r + 2}{2(n - k)} = \begin{cases} \frac{k + 2}{2(n - k)}, & k \text{ 为偶数}; \\ \frac{k + 3}{2(n - k)}, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

另一方面, 因 $\binom{k}{2} + (n - k)(k - 1) < m \leq \binom{k}{2} + (n - k)k$, 很容易构造出混合边邻域粘速度等

于 $\frac{k+2}{2(n-k)}$ 和 $\frac{k+3}{2(n-k)}$ 的图。所以定理得证。

定理 15 的证明同时给出了混合边邻域粘连度最小图的构造。

推论 2 设 $k, m, n \in Z^+$ 且 $n-1 \leq m \leq \binom{n}{2} - 1$, $F_{n,m}$ 表示 $n(\geq 3)$ 个顶点 m 条边的非完全连通图中混合边邻域粘连度最小的图, 则 $F_{n,m}$ 的构造如下:

(1) 构造完全图 K_k 和空图 \bar{K}_{n-k} ;

(2) 在 K_k 和 \bar{K}_{n-k} 之间任意添加 $m - \binom{k}{2}$ 条边, 且使 $F_{n,m}$ 为非完全连通图, 其中 k 满足 $\binom{k}{2} + (n-k)(k-1) < m \leq \binom{k}{2} + (n-k)k$ 且尽可能地小。

例 3 当 $n=8, m=14$ 时, $k=3$, 则 $MENT(F_{8,14}) = \frac{3+1+2}{2(8-3)} = \frac{3}{5}$ 。当 $n=8, m=19$ 时, $k=4$, 则 $MENT(F_{8,19}) = \frac{4+2}{2(8-4)} = \frac{3}{4}$ 。上述两个图见图 2, 其中黑点和粗边表示 K_k 。

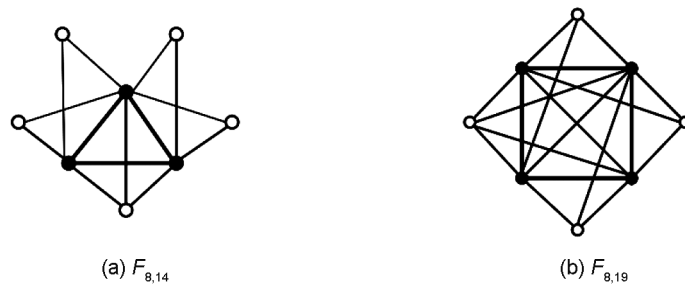


图 2 $F_{n,m}$ 的两个例子

Fig. 2 Two examples of graph $F_{n,m}$

显然, $F_{n,m}$ 一般是不唯一的。

而在顶点数和边数给定的条件下, 求混合边邻域粘连度的极大值很困难, 下面给出了一类特殊图-树的结果。

引理 1^[18] 设 T 是 n 阶树, 正整数 x 满足 $0 \leq x \leq n-1$, 则存在 $X \subseteq E(T), |X|=x$, 使得 $m(T/X) \leq \left\lceil \frac{n-2x}{x+1} \right\rceil$ 。

定理 16 设 T_n 为所有 $n(\geq 3)$ 阶树的集合, 则 $\max_{T \in T_n} MENT(T) = MENT(P_n)$ 。

证明 设 $T \in T_n$, 由引理 1, 对任意的正整数 $x(\leq n-2)$, 都存在 T 的一个邻域边割集 X , 满足 $|X|=x, m(T/X) \leq \left\lceil \frac{n-2x}{x+1} \right\rceil$ 。由混合边邻域粘连度的定义, 为使 $MENT(T)$ 达到最大, 只需考虑满足 $m(T/X) = \left\lceil \frac{n-2x}{x+1} \right\rceil, \omega(T/X) = x+1$ 的 X 。当 $m(T/X) \geq 1, x \geq 1$ 时, 有 $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$, 由定理 1 的证明, 就有

$$MENT(T) = \min_{\substack{1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \\ x \in Z^+}} \frac{x + \left\lceil \frac{n-2x}{x+1} \right\rceil}{x+1} = MENT(P_n),$$

即 $\max_{T \in T_n} MENT(T) = MENT(P_n)$ 。

4 结论

从混合边邻域粘力度的计算公式可以看出,对于路、圈、星图、双星图等,其顶点数越大,参数值越小,抗毁性越弱;对于完全图,其顶点数越大,参数值越大,抗毁性越强;对于彗星图,其 P_{n-k} 的顶点数越大, $S_{1,k}$ 的顶点数越小,参数值越大,抗毁性越强;对于完全二部分图,二部划分的顶点数相差越大,参数值越大,抗毁性越强;对于完全 p 部分图,最大划分与其余划分的顶点数相差越大,参数值越大,抗毁性越强。

关于图的边邻域抗毁性参数研究,目前已有边邻域连通度(Λ)、边邻域离散数(ENS)、边邻域坚韧度(t_{EN})、边邻域完整度(ENI)、边邻域毁裂度(ENR)。表1是对7类11阶图的边邻域抗毁性参数值的比较。

表1 几类同阶图的边邻域抗毁性参数值比较

Table 1 Comparison of the values of edge neighbor invulnerability parameters of several graphs with same order

图的参数	P_{11}	C_{11}	$T_{11,6}$	$S_{1,10}$	K_{11}	$K_{5,6}$	$K_{4,3,3,1}$
Λ	1	2	1	1	5	5	4
ENS	1	0	6	8	-4	0	0
t_{EN}	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	5	1	1
ENI	5	5	3	2	6	6	5
ENR	-1	-2	4	7	-5	-1	-1
$MENT$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{9}$	6	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$

由表中的参数值可知:

$$\begin{aligned} &\Lambda(S_{1,10}) = \Lambda(T_{11,6}) = \Lambda(P_{11}) < \Lambda(C_{11}) < \Lambda(K_{4,3,3,1}) < \Lambda(K_{11}) = \Lambda(K_{5,6}); \\ &ENS(K_{11}) < ENS(C_{11}) = ENS(K_{5,6}) = ENS(K_{4,3,3,1}) < ENS(P_{11}) < ENS(T_{11,6}) < ENS(S_{1,10}); \\ &t_{EN}(S_{1,10}) < t_{EN}(T_{11,6}) < t_{EN}(P_{11}) < t_{EN}(C_{11}) = t_{EN}(K_{4,3,3,1}) = t_{EN}(K_{5,6}) < t_{EN}(K_{11}); \\ &ENI(S_{1,10}) < ENI(T_{11,6}) < ENI(P_{11}) = ENI(K_{4,3,3,1}) = ENI(C_{11}) < ENI(K_{5,6}) = ENI(K_{11}); \\ &ENR(K_{11}) < ENR(C_{11}) < ENR(P_{11}) = ENR(K_{4,3,3,1}) = ENR(K_{5,6}) < ENR(T_{11,6}) < ENR(S_{1,10}); \\ &MENT(S_{1,10}) < MENT(T_{11,6}) < MENT(K_{5,6}) < MENT(P_{11}) < MENT(C_{11}) < MENT(K_{11}). \end{aligned}$$

因此有以下结论(对表中所举实例而言):

(1)区分度最好的是 $MENT$,其余依次是 $t_{EN}, ENS, ENR, ENI, \Lambda$;

(2)边邻域抗毁性最强的是 K_{11} ,最弱的是 $S_{1,10}$ 。

上述研究表明,混合边邻域粘力度的区分度较好,刻画某些网络的抗毁性更为精确。

一般图的混合边邻域粘力度计算是比较复杂的,但介于特殊与一般之间的图,如树,区间图等混合边邻域粘力度算法是一个值得研究的问题。

参考文献:

[1] GUNTHER G, HARTNELL B. On Minimizing the Effects of Betrayals in A Resistancemovement[C]//Proceedings of the Eighth Manitoba Conference on Numericalmathematics and Computing. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publishing Inc. VI, 1978: 285-306.

[2] 陈忠,李银奎.完全 k 叉树的粘力度[J].纯粹数学与应用数学,2013,29(5):484-488. DOI: 10.3969/j.issn.1008-5513.2013.05.007.

[3] CHEN Z, LI Y K. The Tenacity and Rupture Degree of the Complete K -ary Tree[J]. Pure Appl Math, 2013, 29(5): 484-488. DOI: 10.3969/j.issn.1008-5513.2013.05.007.

[4] GU M M, PAI K J, CHANG J M. Subversion Analyses of Hierarchical Networks Based on (Edge) Neighbor Connectivity[J]. J Parallel Distributed Comput, 2023, 171: 54-65. DOI: 10.1016/j.jpdc.2022.09.010.

[5] COZZENS M B, WU S S Y. Extreme Values of Edge-neighbor-Connectivity[J]. Ars Combinatoria, 1995, 39: 199-210.

[6] ZHAO X B, ZHANG Z, REN Q. Edge Neighbor Connectivity of Cartesian Product Graph $G \times K_2$ [J]. Appl Math Comput, 2011, 217(12): 5508-5511. DOI: 10.1016/j.amc.2011.05.007.

- amc.2010.12.022.
- [6] BACAK-TURAN G, KIRLANGIC A. Neighbor Integrity of Transformation Graphs[J]. *Int J Found Comput Sci*, 2013, **24**(3): 303–317. DOI: 10.1142/s0129054113500056.
- [7] COZZENS M B, WU S S Y. Bounds of Edge-neighbor-integrity of Graphs[J]. *Australas J Comb*, 1997, **15**(15): 71–80.
- [8] WEI Z T, QI N N, YUE X K. Vertex-neighbor-scattering Number of Bipartite Graphs[J]. *Int J Found Comput Sci*, 2016, **27**(4): 501–509. DOI: 10.1142/s012905411650012x.
- [9] WEI Z T, QI N N, YUE X K. Computing the Edge-neighbour-scattering Number of Graphs[J]. *Zeitschrift Für Naturforschung A*, 2013, **68**(10/11): 599–604. DOI: 10.5560/zna.2013-0059.
- [10] LIU Y, WEI Z T, SHI J R, *et al.* A Polynomial Algorithm of Edge-neighbor-scattering Number of Trees[J]. *Appl Math Comput*, 2016, **283**: 1–5. DOI: 10.1016/j.amc.2016.02.021.
- [11] 杨静婷. 图的邻域坚韧度研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2017.
YANG J T. Study on neighborhood toughness of graphs [D]. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 2017.
- [12] 杨玉成. 图的边邻域坚韧度研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2019.
YANG Y C. Study on Edge Neighborhood Toughness of Graphs[D]. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 2019.
- [13] FENG X, WEI Z T, YANG Y C. Edge Neighbor Toughness of Graphs[J]. *Axioms*, 2022, **11**(6): 248. DOI: 10.3390/axioms11060248.
- [14] BACAK-TURAN G, OZ E. Neighbor Rupture Degree of Transformation Graphs G^{op} [J]. *Int J Found Comput Sci*, 2017, **28**(4): 335–355. DOI: 10.1142/s0129054117500216.
- [15] ASLAN E. Edge-neighbor-rupture Degree of Graphs[J]. *J Appl Math*, 2013, **2013**: 1–5. DOI: 10.1155/2013/783610.
- [16] KÜRKÇÜ Ö K, ASLAN E. A Comparison between Edge Neighbor Rupture Degree and Edge Scattering Number in Graphs[J]. *Int J Found Comput Sci*, 2018, **29**(7): 1119–1142. DOI: 10.1142/s0129054118500247.
- [17] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. New York: Springer, 2008.
- [18] 魏宗田, 刘勇, 杨威. 网络抗毁性[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2015.
WEI Z T, LIU Y, YANG W. Network invulnerability [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2015.
- [19] 毛华, 赵小娜, 史田敏, 等. 多部图的最大匹配算法[J]. 郑州大学学报(理学版), 2013, **45**(1): 27–29. DOI: 10.3969/j.issn/1671-6841.2013.01.007
MAO H, ZHAO X N, SHI T M, *et al.* An Algorithm on Maximum Matching of Multipartite Graph[J]. *J Zhengzhou Univ Nat Sci Ed*, 2013, **45**(1): 27–29. DOI: 10.3969/j.issn/1671-6841.2013.01.007.