山西大学学报(自然科学版)47(3):564－570,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023132

对称周期Jacobi矩阵加箭型矩阵的广义逆谱问题

苏然,雷英杰*,李繁华
(中北大学 数学学院,山西 太原 030051)

摘　要:研究了一类对称周期Jacobi矩阵加箭型矩阵的广义逆谱问题,利用几何学上圆锥曲线,对称周期Jacobi矩阵及箭型矩阵的相关性质,将该矩阵所有主子阵的极端特征值作为其特征数据,来重构此类箭状矩阵。最后得出该问题的解以及问题构造的算法与实例,验证了结果的准确性。

关键词:逆特征值问题;圆锥曲线;顺序主子阵;极端特征值;箭状矩阵
中图分类号:O157　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)03-0564-07

Generalized Inverse Eigenvalue Problem of Symmetric Periodic Jacobi Matrix Plus Arrow Matrix

SU Ran, LEI Yingjie*, LI Fanhua
(*School of Mathematics, North University of China, Taiyuan* 030051, *China*)

Abstract: In this paper, we study the generalized inverse spectrum problem for a class of symmetric periodic Jacobi matrices plus arrow matrices. By using the geometric properties of conic curve, symmetric periodic Jacobi matrix and arrow matrix, the extreme eigenvalues of all the principal submatrixes of the matrix are taken as their characteristic data to reconstruct this kind of arrow banded matrix. Finally, the solution of the problem is derived as well as the algorithm and examples of the problem construction, and the accuracy of the results is verified.

Key words: inverse eigenvalue problems; conic; sequential principal submatrices; extreme eigenvalues; arrow banded matrix

0　引言

本文讨论了具有形式(1)的矩阵$\boldsymbol{A}$,其中,$a_i(i=1,\cdots,n)$为实数,$b_i>0(i=1,\cdots,n)$,$1\leqslant m\leqslant n$。当$m=1$时,矩阵$\boldsymbol{A}$为对称的箭型矩阵[1-3],当$m=n$时,矩阵$\boldsymbol{A}$为周期Jacobi矩阵[4-8],当$m=n,b_m=0$时,矩阵$\boldsymbol{A}$就变成了Jacobi矩阵[9-12]。

箭型带状的逆谱问题起源于Peng等关于Jacobi矩阵和箭型矩阵的讨论[13-14],其主要的方法是利用所有主子阵的极端特征值来重构所求矩阵。2011年,Nazari用这种方法解决了一类对称拟反双对角矩阵的逆谱问题[15];2017年,徐伟孺等也用这种方法解决了两类特殊箭型带状矩阵的逆谱问题[16];2020年,雷英杰等采用特征对和一个正定对角矩阵解决了对称箭头矩阵加三对角矩阵的广义逆特征值问题[17];同年,Heydari等利用矩阵的特征值和一组特征向量解决了周期Jacobi矩阵的逆谱问题[6];2023年,Babaei和Bardhan分别重构了特殊对称矩阵和图为树的矩阵,这些矩阵的实

收稿日期:2023-04-08;**接受日期**:2023-09-04
基金项目:山西省自然科学基金(201801D121153);山西省基础研究计划资助项目(202203021211088)
作者简介:苏然(1993-),女,山西太原人,硕士研究生,主要研究方向为组合矩阵理论与图论。E-mail:suran_zbdx@139.com
* **通信作者**:雷英杰(LEI Yingjie),E-mail:leiyingjie@nuc.edu.cn
引文格式:苏然,雷英杰,李繁华.对称周期Jacobi矩阵加箭型矩阵的广义逆谱问题[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(3):564-570. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023132

质都与Jacobi矩阵和箭型矩阵有关[18-19]。

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & b_m & & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & & & & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & b_{m-1} & & & & & \\ b_m & & & b_{m-1} & a_m & b_{m+1} & b_{m+2} & b_{m+3} & \cdots & b_n \\ & & & & b_{m+1} & a_{m+1} & & & & \\ & & & & b_{m+2} & & a_{m+2} & & & \\ & & & & b_{m+3} & & & a_{m+3} & & \\ & & & & \vdots & & & & \ddots & \\ & & & & b_n & & & & & a_n \end{bmatrix}。\tag{1}$$

本文基于这些文献的研究,讨论了对称周期Jacobi矩阵加箭型矩阵的广义逆谱问题。给定所有主子阵的极端特征值,利用顺序主子阵间的递推关系来构造此类箭状矩阵明显存在困难。为了解决这个不足,通过考虑在求解该问题时产生的一个圆锥曲线的存在性来重构周期Jacobi矩阵加箭型矩阵,得到了问题有解时的充分条件和解的表达式,并用MatlabR2021b验证了其结果的准确性。

此外,需要考虑形如(2)式矩阵

$$\widetilde{J}_j=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & & & \\ b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & b_3 & a_4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{j-1} \\ & & & b_{j-1} & a_j \end{bmatrix},j=2,\cdots,m-1,\tag{2}$$

$\widetilde{J}_j$是通过删除j阶Jacobi矩阵第一行和第一列得到$j-1$阶子矩阵,其对应的特征多项式为$Q_j(\lambda)=\det(\lambda I_{j-1}-\widetilde{J}_j),j=2,\cdots,m-1$[6]。

1 预备知识

这部分主要给出本文将用到矩阵A的相关结论和简化计算定义的记号。

引理1 给定形如(1)式的对称矩阵A,其各阶顺序主子阵的特征多项式序列满足下列递推关系:

$$\begin{gathered} P_1(\lambda)=(\lambda-a_1), \\ P_j(\lambda)=(\lambda-a_j)P_{j-1}(\lambda)-b_{j-1}^2P_{j-2}(\lambda),j=2,3,\cdots,m-1, \\ P_m(\lambda)=(\lambda-a_m)P_{m-1}(\lambda)-b_{m-1}^2P_{m-2}(\lambda)-2\prod_{i=1}^{m}b_i-b_m^2Q_{m-1}(\lambda), \\ P_{m+1}(\lambda)=(\lambda-a_{m+1})P_m(\lambda)-b_{m+1}^2P_{m-1}(\lambda), \\ P_j(\lambda)=(\lambda-a_j)P_{j-1}(\lambda)-b_j^2\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda-a_i)P_{m-1}(\lambda),j=m+2,\cdots,n, \end{gathered}$$

其中$P_0(\lambda)=1$。

引理2[2] 给定形如(1)式的对称矩阵A的特征多项式$P(\lambda)$,若λ_1,λ_n分别是$P(\lambda)$的最小、最大特征值,则

(1)如果$\mu<\lambda_1$,则$(-1)^nP(\mu)>0$。

(2)如果$\mu>\lambda_n$,则$P(\mu)>0$。

引理3[16] 给定形如(1)式的对称矩阵A,$\lambda_j^{(1)},\lambda_j^{(j)}$分别是其对应顺序主子阵的最小、最大特征值的充要条件为

$$\begin{gathered} \lambda_j^{(1)}<\lambda_{j-1}^{(1)}<\cdots<\lambda_{m+1}^{(1)}<\lambda_m^{(1)}<\lambda_m^{(m)}<\lambda_{m+1}^{(m+1)}<\cdots<\lambda_{j-1}^{(j-1)}<\lambda_j^{(j)}, \\ \lambda_j^{(1)}<a_i<\lambda_j^{(j)},i=m+1,\cdots,j;j=m+1,\cdots,n。 \end{gathered}$$

推论1　如果形如(1)式的对称矩阵A的顺序主子阵A_j的最小,最大特征值分别为$\lambda_j^{(1)},\lambda_j^{(j)}$,$a_i,m+1\leqslant i\leqslant n-1$为矩阵$A$的对角元,那么

(1) $(-1)^{j-m-1}\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda_j^{(1)}-a_i)>0$,

(2) $\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda_j^{(j)}-a_i)>0,j=m+2,\cdots,n$,

$$
\begin{gathered}
R_j=P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})P_{j-2}(\lambda_j^{(1)})-P_{j-2}(\lambda_j^{(j)})P_{j-1}(\lambda_j^{(1)}),\\
S_m=P_{m-1}(\lambda_m^{(m)})-Q_{m-1}(\lambda_m^{(1)}),\\
T_j=(\lambda_j^{(j)}-\lambda_j^{(1)})P_{j-1}(\lambda_j^{(1)})P_{j-1}(\lambda_j^{(j)}),\\
U_m=Q_{m-1}(\lambda_m^{(1)})P_{m-1}(\lambda_m^{(m)})-Q_{m-1}(\lambda_m^{(m)})P_{m-1}(\lambda_m^{(1)}),\\
Z_j=\lambda_j^{(j)}P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})P_{j-2}(\lambda_j^{(1)})-\lambda_j^{(1)}P_{j-2}(\lambda_j^{(j)})P_{j-1}(\lambda_j^{(1)}),\\
F_j=P_{j-1}(\lambda_j^{(1)})P_{m-1}(\lambda_j^{(j)})\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda_j^{(j)}-a_i)-P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})P_{m-1}(\lambda_j^{(1)})\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda_j^{(1)}-a_i),\\
G_j=\lambda_j^{(1)}P_{j-1}(\lambda_j^{(1)})P_{m-1}(\lambda_j^{(j)})\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda_j^{(j)}-a_i)-\lambda_j^{(j)}P_{j-1}(\lambda_j^{(j)})P_{m-1}(\lambda_j^{(1)})\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda_j^{(1)}-a_i),\\
\beta_j=\prod_{i=1}^{j}b_i,c=\beta_{m-2},j=2,\cdots,n。
\end{gathered}\tag{3}
$$

2　IEP有解的充分条件

这部分主要研究了一个箭状矩阵的逆特征值问题(简称IEP)。

IEP:给定实数$\left\{\lambda_j^{(1)},\lambda_j^{(j)}\right\}_{j=1}^{n}$和实数$d>0$,讨论在什么条件下可以构造出具有形如(1)式的$n$阶对称矩阵$A$,使得$\lambda_j^{(1)},\lambda_j^{(j)}$分别是矩阵$A$的$j$阶顺序主子阵$A_j$的最小,最大特征值,其中$b_m=d$。

定理1　给定实数$\left\{\lambda_j^{(1)},\lambda_j^{(j)}\right\}_{j=1}^{n}$和实数$d>0$且$b_m=d$,存在一个$n$阶实矩阵$A$,使得$\lambda_j^{(1)},\lambda_j^{(j)}$是矩阵$A$的$j$阶顺序主子阵的最小,最大特征值的充分条件为

$$\lambda_n^{(1)}<\cdots<\lambda_j^{(1)}\cdots<\lambda_2^{(1)}<\lambda_1^{(1)}<\lambda_2^{(2)}<\cdots<\lambda_j^{(j)}<\cdots<\lambda_n^{(n)}\tag{4}$$

和

$$U_mR_m-c^2S_m^2>0,\tag{5}$$

$$d^2(c^2S_m^2-R_mU_m)>R_mT_m,R_m(U_md^2+T_m)<0。\tag{6}$$

证明　充分性 假设式(4),式(5)和式(6)条件成立,矩阵A存在等价于方程组(7)有实数解。

$$P_j(\lambda_j^{(i)})=0,j=1,\cdots,n,i=1,j。\tag{7}$$

当$j=1$时,由引理1和式(7)得,

$$a_1=\lambda_1^{(1)}。$$

当$j=2,\cdots,m-1$时,由引理1和式(7)得,

$$P_j(\lambda_j^{(i)})=(\lambda_j^{(i)}-a_j)P_{j-1}(\lambda_j^{(i)})-b_{j-1}^2P_{j-2}(\lambda_j^{(i)})=0,j=2,3,\cdots,m-1,i=1,j。\tag{8}$$

由式(3),式(4)和引理2知,

$$a_j=\frac{Z_j}{R_j},b_{j-1}^2=\frac{-T_j}{R_j}>0,j=2,\cdots,m-1。\tag{9}$$

当$j=m$时,由引理1和式(7)得,

$$\begin{cases}P_m(\lambda_m^{(1)})=(\lambda_m^{(1)}-a_m)P_{m-1}(\lambda_m^{(1)})-b_{m-1}^2P_{m-2}(\lambda_m^{(1)})-b_m^2Q_{m-1}(\lambda_m^{(1)})-2\prod_{i=1}^{m}b_i=0,\\P_m(\lambda_m^{(m)})=(\lambda_m^{(m)}-a_m)P_{m-1}(\lambda_m^{(m)})-b_{m-1}^2P_{m-2}(\lambda_m^{(m)})-b_m^2Q_{m-1}(\lambda_m^{(m)})-2\prod_{i=1}^{m}b_i=0。\end{cases}\tag{10}$$

上式(10)可以写为

$$\begin{cases}P_{m-2}(\lambda_m^{(1)})b_{m-1}^2+2\beta_{m-2}b_{m-1}b_m+Q_{m-1}(\lambda_m^{(1)})b_m^2=\lambda_m^{(1)}P_{m-1}(\lambda_m^{(1)})-a_mP_{m-1}(\lambda_m^{(1)}),\\ P_{m-2}(\lambda_m^{(m)})b_{m-1}^2+2\beta_{m-2}b_{m-1}b_m+Q_{m-1}(\lambda_m^{(m)})b_m^2=\lambda_m^{(m)}P_{m-1}(\lambda_m^{(m)})-a_mP_{m-1}(\lambda_m^{(m)})。\end{cases} \tag{11}$$

为了求解式(11),由式(3)得,

$$R_mb_{m-1}^2+2cS_mb_{m-1}b_m+U_mb_m^2+T_m=0, \tag{12}$$

其中

$$c=\beta_{m-2}。$$

点$(X,Y)=(b_{m-1},b_m)$一定属于集合C。

$$C=\{(X,Y)\in R_+^2:R_mX^2+2cS_mXY+U_mY^2+T_m=0\}。$$

集合C包含在一个圆锥曲线中。不管它是否退化,圆锥曲线始终存在。

等式(12)可以写为

$$LML^{\mathrm{T}}=0,$$

其中

$$L=[X\quad Y\quad 1],M=\begin{bmatrix}N & 0\\ 0^{\mathrm{T}} & T_m\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}R_m & cS_m\\ cS_m & U_m\end{bmatrix}。$$

如果$\det M=0$,圆锥曲线是退化的。

如果$\det N>0$和$(R_m+U_m)\det M>0$,圆锥曲线是虚椭圆,且不存在。

由条件(4)和引理2得

$$-(R_m+U_m)T_m>0。 \tag{13}$$

因定理1中的条件(5)知,$\det N>0$,$(R_m+U_m)\det M=(R_m+U_m)T_m\det N<0$,此时,圆锥曲线是椭圆,且圆锥曲线$C$始终存在,所以$b_m,b_{m-1}$存在且满足式(11)。

当$b_m=d,X=b_{m-1}$,由式(12)得

$$R_mX^2+2cS_mdX+U_md^2+T_m=0。 \tag{14}$$

由式(13)和条件(6)中$d^2(c^2S_m^2-R_mU_m)>R_mT_m$,解得

$$b_{m-1}=\frac{-cdS_m\pm\sqrt{d^2(c^2S_m^2-R_mU_m)-R_mT_m}}{R_m}。 \tag{15}$$

由条件(6)中$R_m(U_md^2+T_m)<0$知,b_{m-1}有2个解,选$b_{m-1}>0$。

由式(11)和引理2得

$$a_m=\frac{\lambda_m^{(i)}P_{m-1}(\lambda_m^{(i)})-P_{m-2}(\lambda_m^{(i)})b_{m-1}^2-2\beta_m-Q_{m-1}(\lambda_m^{(i)})d^2}{P_{m-1}(\lambda_m^{(i)})},i=1,m。 \tag{16}$$

当$b_{m-1}=d,Y=b_m$时,类似上述证明,解得

$$b_m=\frac{-cdS_m\pm\sqrt{d^2(c^2S_m^2-U_mR_m)-U_mT_m}}{U_m},\text{选}b_m>0。$$

$$a_m=\frac{\lambda_m^{(i)}P_{m-1}(\lambda_m^{(i)})-d^2P_{m-2}(\lambda_m^{(i)})-b_m^2Q_{m-1}(\lambda_m^{(i)})-2\beta_m}{P_{m-1}(\lambda_m^{(i)})},i=1,m。$$

当$j=m+1$时,由引理1和引理2得

$$P_{m+1}(\lambda_{m+1}^{(i)})=(\lambda_{m+1}^{(i)}-a_{m+1})P_m(\lambda_{m+1}^{(i)})-b_{m+1}^2P_{m-1}(\lambda_{m+1}^{(i)})=0,i=1,m+1。$$

解得

$$a_{m+1}=\frac{Z_{m+1}}{R_{m+1}},b_{m+1}^2=\frac{-T_{m+1}}{R_{m+1}}>0。 \tag{17}$$

当$j=m+2,\cdots,n$时,由引理1知,

$$P_j(\lambda_j^{(i)})=(\lambda_j^{(i)}-a_j)P_{j-1}(\lambda_j^{(i)})-b_j^2\prod_{i=m+1}^{j-1}(\lambda_j^{(i)}-a_i)P_{m-1}(\lambda_j^{(i)})=0,j=m+2,\cdots,n,i=1,j。$$

由引理2、3和推论1得，

$$a_j = \frac{G_j}{F_j}, b_j^2 = \frac{T_j}{F_j} > 0, j = m+2, \cdots, n。 \tag{18}$$

证毕。

注1 (1)在定理1重构对称矩阵A的顺序主子阵A_m时，主子阵A_m的所有项都是唯一的，除了a_m。

(2)定理1保证了圆锥曲线C总是存在的，不管它是否退化。设$b_m = d$，相当于在平面上考虑直线$X = d$，这条直线可能与圆锥曲线C相交，也可能不相交。定理1中的条件(6)$d^2(c^2S_m^2 - R_mU_m) > R_mT_m$保证了直线$X = d$与圆锥曲线$C$至少有一个交点。

推论2 基于定理1的相同假设和表示下，如果

$$d \in \left(0, \sqrt{\frac{R_mT_m}{c^2S_m^2 - R_mU_m}}\right],$$

则存在主子阵A_m，其形式如式(1)，使得$\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(j)} (j = 1, \cdots, m)$是矩阵$A$的$j$阶顺序主子阵的最小，最大特征值，且$\left\{\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(j)}\right\}_{j=1}^{m}$满足条件(4)和$b_m = d$。

推论3 基于定理1的相同假设和表示下，如果$c^2S_m^2 - R_mU_m \geqslant 0$和$d > 0$，则存在形如(1)式的主子阵$A_m$，使得$\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(j)} (j = 1, \cdots, m)$是矩阵$A$的$j$阶顺序主子矩阵的最小，最大特征值，且$\left\{\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(j)}\right\}_{j=1}^{m}$满足条件(4)和$b_m = d$。

注2 几何学上，推论2和推论3的建立可能得出不同类型的圆锥曲线，以下有2种情况：

(1)如果$\det N > 0$，$(R_m + U_m)\det M < 0$，意味着C是椭圆的一部分。由于椭圆以原点为中心，任何直线$X = d(d > 0)$在适当区间都与C相交。

(2)如果$\det M = \det N = 0$，圆锥曲线是退化的，当$T_m(R_m + U_m) < 0$时，圆锥曲线由两条平行线组成，在这种情况下，任何直线$X = d$与圆锥曲线C相交于一点。如果$\det M \neq 0, \det N < 0$，意味着圆锥曲线是一个以原点为中心的双曲线，同样，在这种情况下，任何直线$X = d$与圆锥曲线C相交于的一个点。

3 数值算法与实例

3.1 数值算法

步骤1 输入实数$\left\{\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(j)}\right\}_{j=1}^{n}$和实数$d > 0$且$b_m = d$；

步骤2 若$\left\{\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(j)}\right\}_{j=1}^{n}$满足定理1中的条件(4)—(6)则继续；否则算法结束；

步骤3 当$j = 1$时，$a_1 = \lambda_1^{(1)}$；

步骤4 当$j = 2, \cdots, m-1$时，由(9)式计算a_j, b_{j-1}；

步骤5 当$j = m$时，由(15)和(16)式计算a_m, b_{m-1}, b_m；

步骤6 当$j = m+1$时，由(17)式计算a_{m+1}, b_{m+1}；

步骤7 当$j = m+2, \cdots, n$时，由(18)式计算a_j, b_j；

步骤8 输出矩阵A。

3.2 数值实例

设定$m = 4, n = 6$，给定初始特征数据如表1所示。

解 根据定理1，存在一个形如(1)式的主子阵A_4，通过3.1的数值算法和MatlabR2021b计算

表1 初始特征数据

Table 1 Initial characteristic data

j	1	2	3	4	5	6
$\lambda_j^{(j)}$	0.500 0	1.000 0	2.000 0	3.000 0	4.000 0	5.000 0
$\lambda_j^{(1)}$	0.500 0	−0.500 0	−1.000 0	−2.000 0	−3.000 0	−4.000 0

得到 $S_4=20$,$R_4=\dfrac{815}{7}$,$U_4=\dfrac{4\,390}{49}$,$T_4=\dfrac{-24\,420}{49}$,$c=0.845\,2$,如果 $d=1$ 时,$d^2(c^2S_4^2-R_4U_4)-R_4T_4=\dfrac{16\,422\,450}{343}$,满足定理1的条件(4),(5)和(6),计算得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主子阵 $\boldsymbol{A}_4$ 为

$$\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0.500\,0 & 0.707\,1 & 0 & 1.000\,0\\ 0.707\,1 & 0 & 1.195\,2 & 0\\ 0 & 1.195\,2 & 1.142\,8 & 1.734\,1\\ 1.000\,0 & 0 & 1.734\,1 & 0.016\,9\end{bmatrix}。$$

如果 $d=3$ 时,$d^2(c^2S_4^2-R_4U_4)-R_4T_4=-332\,84$,意味着不存在主子阵 $\boldsymbol{A}_4$。根据推论1得,$d\in\left(0,\sqrt{\dfrac{R_4T_4}{c^2S_4^2-R_4U_4}}\right)=(0,2.391\,5)$存在主子阵 $\boldsymbol{A}_4$ 且 $b_4=d$。

通过3.1的数值算法和MatlabR2021b计算得到形如(1)式的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_6=\begin{bmatrix}0.500\,0 & 0.707\,1 & 0 & 1.000\,0 & 0 & 0\\ 0.707\,1 & 0 & 1.195\,2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1.195\,2 & 1.142\,8 & 1.734\,1 & 0 & 0\\ 1.000\,0 & 0 & 1.734\,1 & 0.016\,9 & 2.684\,3 & 2.890\,8\\ 0 & 0 & 0 & 2.684\,3 & 0.983\,3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2.890\,8 & 0 & 0.983\,1\end{bmatrix}。$$

再通过MatlabR2021b计算 $\boldsymbol{A}_6$ 的顺序主子矩阵的特征值如下

$$\Lambda(\boldsymbol{A}_1)=\{\underline{0.500\,0}\},$$
$$\Lambda(\boldsymbol{A}_2)=\{\underline{-0.500\,0},\ \underline{1.000\,0}\},$$
$$\Lambda(\boldsymbol{A}_3)=\{\underline{-1.000\,0},0.642\,8,\ \underline{2.000\,0}\},$$
$$\Lambda(\boldsymbol{A}_4)=\{\underline{-2.000\,0},0.005\,3,0.654\,4,\ \underline{3.000\,0}\},$$
$$\Lambda(\boldsymbol{A}_5)=\{\underline{-3.000\,0},-0.702\,9,0.643\,7,1.702\,5,\ \underline{4.000\,0}\},$$
$$\Lambda(\boldsymbol{A}_6)=\{\underline{-4.000\,0},-0.843\,1,0.643\,3,0.983\,2,1.842\,8,\ \underline{5.000\,0}\}。$$

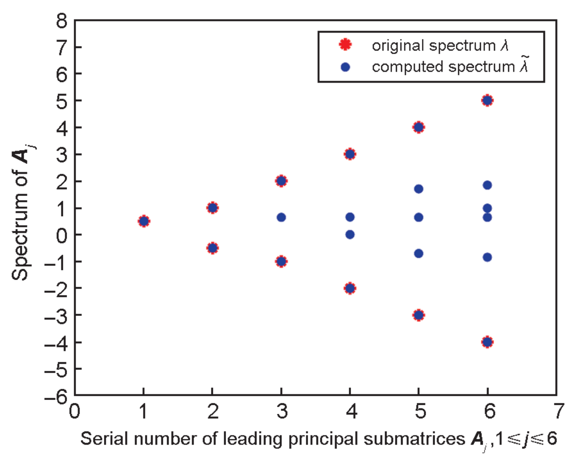

图1 定理1中低阶 A_j 特征值的分布

Fig. 1 The distribution of the eigenvalues of A_j with low order in Theorem 1

演示结果如图1所示。

3 结论

本文基于周期Jacobi矩阵和箭型矩阵的研究,讨论了对称周期Jacobi矩阵加箭型矩阵的广义逆谱问题。给定各主子阵的极端特征值,通过顺序主子阵间的递推关系来构造此类箭状矩阵明

显存在困难。本研究结合几何学上圆锥曲线的相关性质,将矩阵的逆谱问题转换为求解圆锥曲线方程的问题,进而实现了这一类箭状矩阵的重构。这对研究其他矩阵的逆谱问题有一定的借鉴意义。

参考文献:

[1] SHARMA D, SEN M. Inverse Eigenvalue Problems for Two Special Acyclic Matrices[J]. *Mathematics*, 2016, **4**(1): 12. DOI: 10.3390/math4010012.

[2] BABAEI Z M, SHAHZADEH F S A, KARBASSI S M. Inverse Eigenvalue Problem for Constructing a Kind of Acyclic Matrices with Two Eigenpairs[J]. *Appl Math*, 2020, **65**(1): 89−103. DOI: 10.21136/am.2020.0103-19.

[3] PICKMANN H, EGAÑA J, SOTO R L. Extremal Inverse Eigenvalue Problem for Bordered Diagonal Matrices[J]. *Linear Algebra Appl*, 2007, **427**(2/3): 256−271. DOI: 10.1016/j.laa.2007.07.020.

[4] XU Y H. The Reconstruction of a Special Kind of Periodic Jacobi Matrices[J]. *Linear Algebra Appl*, 2012, **436**(9): 3618−3633. DOI: 10.1016/j.laa.2011.12.034.

[5] XU Y H, JIANG E X. An Inverse Eigenvalue Problem for Periodic Jacobi Matrices[J]. *Inverse Probl*, 2007, **23**(1): 165−181. DOI: 10.1088/0266-5611/23/1/008.

[6] HEYDARI M, SHAHZADEH F S A, KARBASSI S M, *et al*. On the Inverse Eigenvalue Problem for Periodic Jacobi Matrices[J]. *Inverse Probl Sci Eng*, 2020, **28**(9): 1253−1264. DOI: 10.1080/17415977.2019.1705803.

[7] ARELA-PÉREZ S, LOZANO C, NINA H, *et al*. The New Inverse Eigenvalue Problems for Periodic and Generalized Periodic Jacobi Matrices from Their Extremal Spectral Data[J]. *Linear Algebra Appl*, 2023, **659**: 55−72. DOI: 10.1016/j.laa.2022.11.014.

[8] FERGUSON W E. The Construction of Jacobi and Periodic Jacobi Matrices with Prescribed Spectra[J]. *Math Comp*, 1980, **35**(152): 1203−1220. DOI: 10.1090/s0025-5718-1980-0583498-3.

[9] VAN M P. The Spectrum of Jacobi Matrices[J]. *Invent Math*, 1976, **37**(1): 45−81. DOI: 10.1007/BF01418827.

[10] WEI Y, DAI H. An Inverse Eigenvalue Problem for Jacobi Matrix[J]. *Appl Math Comput*, 2015, **251**: 633−642. DOI: 10.1016/j.amc.2014.11.101.

[11] HALD O H. Inverse Eigenvalue Problems for Jacobi Matrices[J]. *Linear Algebra Appl*, 1976, **14**(1): 63−85. DOI: 10.1016/0024-3795(76)90064-1.

[12] XU W R, BEBIANO N, CHEN G L. An Inverse Eigenvalue Problem for Pseudo-Jacobi Matrices[J]. *Appl Math Comput*, 2019, **346**: 423−435. DOI: 10.1016/j.amc.2018.10.051.

[13] PENG J, HU X Y, ZHANG L. A Kind of Inverse Eigenvalue Problems of Jacobi Matrix[J]. *Appl Math Comput*, 2006, **175**(2): 1543−1555. DOI: 10.1016/j.amc.2005.09.003.

[14] PENG J, HU X Y, ZHANG L. Two Inverse Eigenvalue Problems for a Special Kind of Matrices[J]. *Linear Algebra Appl*, 2006, **416**(2/3): 336−347. DOI: 10.1016/j.laa.2005.11.017.

[15] NAZARI A M, BEIRANVAND Z. The Inverse Eigenvalue Problem for Symmetric Quasi Anti-bidiagonal Matrices[J]. *Appl Math Comput*, 2011, **217**(23): 9526−9531. DOI: 10.1016/j.amc.2011.03.031.

[16] XU W R, CHEN G L. On Inverse Eigenvalue Problems for Two Kinds of Special Banded Matrices[J]. *Filomat*, 2017, **31**(2): 371−385. DOI: 10.2298/fil1702371x.

[17] 雷英杰, 郑志勇. 对称箭头矩阵加三对角矩阵的广义逆特征值问题[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2020, **44**(1): 14−19. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2162.2020.01.003.
LEI Y J, ZHENG Z Y. Generalized Inverse Eigenvalue Problem of Symmetric Arrow Matrix Plus Tridiagonal Matrices[J]. *J Anhui Univ Nat Sci*, 2020, **44**(1): 14−19. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2162.2020.01.003.

[18] BABAEI ZARCH M. On the Inverse Eigenvalue Problem of a Specific Symmetric Matrix[J]. *J Math Model*, 2023, **11**(3): 479−489. DOI: 10.22124/JMM.2023.24068.2151.

[19] BARDHAN B, SEN M, SHARMA D. Two Inverse Eigenvalue Problems for Matrices Whose Graphs are Trees[J]. *AKCE Int J Graphs Comb*, 2023, **20**(2): 120−124. DOI: 10.1080/09728600.2023.2234011.