山西大学学报(自然科学版)47(4):691－698,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023145

基于复合非线性算子不动点定理的分数阶多点边值问题研究

张楠,张玲玲*,刘宏伟,王慧
(太原理工大学 数学学院,山西 太原 030024)

摘　要:本文研究了一类分数阶多点边值问题解的存在唯一性。首先考虑了一类复合型非线性算子,根据算子不同的性质,给出相应的算子不动点定理,由此获得了该方程存在唯一解的若干充分条件。作为应用,通过具体例子做了进一步的阐述。

关键词:不动点;锥与半序;混合单调算子;分数阶微分方程边值问题;解的存在唯一性
中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)04-0691-08

Research on Fractional Multipoint Boundary Value Problems Based on the Fixed Point Theorem of Composition Nonlinear Operators

ZHANG Nan, ZHANG Lingling*, LIU Hongwei, WANG Hui
(*Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan* 030024*, China*)

Abstract: This article investigates the existence and uniqueness of solutions to a class of fractional multipoint boundary value problems. Firstly, we consider a class of composition nonlinear operator and provide corresponding fixed point theorems based on different properties of the operators. Then, several sufficient conditions for existence and uniqueness of solutions to the equation are obtained. As an application, an example is presented to illustrate the main results.

Key words: fixed point; cone and partial order; mixed monotone operator; boundary value problem for fractional differential equation; existence and uniqueness of solution

0　引言

非线性算子理论作为非线性分析的常用工具之一,在过去几十年中取得了很大的进展,它为解决非线性微分、积分、差分方程初边值问题解的存在性、唯一性及唯一解的迭代逼近问题等提供了强大的理论保障和基本工具[1-8]。由于经典的算子不动点定理依赖于算子具有的某种紧性条件,这在一般的拓扑空间中往往难以满足,人们的研究方向已由要求非线性算子具有连续性和紧性条件转化为非紧,非连续条件,并得到了很多新的理论和结果[9-15]。

在应用算子不动点定理处理微分方程的过程中,需要将微分方程的等价积分方程转换为相应算子方程,其中等价积分方程一般形式为:$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$, 这里的 $G(t,s)$ 是 Green 函

收稿日期:2023-04-27;**接受日期**:2023-09-18
基金项目:山西省回国留学人员科研资助项目(2021-030);山西省青年科学研究项目(202103021223060)
作者简介:张楠(1994-),女,山西长治人,博士研究生,研究方向为非线性泛函分析及微分方程。E-mail: zhangnan1357@163.com
* **通信作者**:张玲玲(ZHANG Lingling),E-mail: tyutzll@126.com
引文格式:张楠,张玲玲,刘宏伟,等.基于复合非线性算子不动点定理的分数阶多点边值问题研究[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):691-698. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023145

数,$f(s,x)$是方程的非线性项。由于各个学科及交叉学科领域中涌现出越来越多的非线性问题,抽象出的分数阶微分模型也越来越复杂,当微分方程的等价积分方程为:

$$x(t)=\int_0^1 G_1(t,s)\int_0^1 G_2(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s,\tag{1}$$

这时现有的算子不动点定理可以对其进行整体求解,却不能很好地展现方程中的全部特征。鉴于上述积分方程的形式,考虑利用两个算子的复合来研究。因此,本文给出了一类非紧、非连续的复合型算子方程

$$\big(T(C+D)\big)(x,x)=T\big((C+D)(x,x)\big)=x,$$

获得了相应的不动点定理,并应用于如下分数阶多点边值问题。

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}\big(D_{0^+}^{\beta}x(t)\big)=\mu\big(t,x(t),x(t)\big)+\nu\big(t,x(t),x(t)\big),\ \ l-1<\beta\leqslant l,\ 2l-1<2\beta\leqslant 2l(l\geqslant 2),\\ x^{(k)}(0)=0\ (k=0,1,\cdots,l-2),\ \ D_{0^+}^{\gamma}x(1)=\sum\limits_{k=1}^{m-2}\xi_k D_{0^+}^{\gamma}x(\eta_k),\ \ \beta-\gamma-1>0,\\ \big(D_{0^+}^{\beta}x(t)\big)^{(k)}|_{t=0}=0,\ \ D_{0^+}^{\gamma}\big(D_{0^+}^{\beta}x(t)\big)|_{t=1}=\sum\limits_{k=1}^{m-2}\xi_k D_{0^+}^{\gamma}\big(D_{0^+}^{\beta}x(t)\big)|_{t=\eta_k},\ 0<\xi_k,\eta_k<1, \end{cases}\tag{2}$$

其中$D_{0^+}^{\beta}$,$D_{0^+}^{\gamma}$表示Riemann-Liouville分数阶导数,$0<\sum\limits_{k=1}^{m-2}\xi_k\eta_k^{\beta-\gamma-1}<1$。

研究了一类复合型非线性算子不动点理论,为等价积分方程为形式(1)的微分方程提供一种新的解决方案,丰富了非线性算子理论的相关研究;根据方程中参数的设置可简化为文献[12],文献[13]中方程,表明方程具有较一般的形式,这是对已有工作的扩展和改进,也表明了算子不动点定理应用的有效性和广泛性。

本文结构如下:第1部分列出相关引理,第2部分给出一类复合算子的性质及其相应结论,第3部分利用所得结论研究方程(2)解的存在唯一性,第4部分,通过实例做了进一步的阐述。

1 预备知识

引理1 令$\mu,\nu\in C([0,1]\times R_+\times R_+)$, $M=1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\beta-\gamma-1}$, 那么方程(2)的等价积分方程为

$$x(t)=\int_0^1 K(t,s)\int_0^1 K(s,\tau)\big[\mu\big(\tau,x(\tau),x(\tau)\big)+\nu\big(\tau,x(\tau),x(\tau)\big)\big]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\tag{3}$$

其中

$$K(t,s)=g_1(t,s)+g_2(t,s),$$

$$g_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ \dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

$$g_2(t,s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\sum_{0\leqslant s\leqslant\eta_i}\xi_i\big[\eta_i^{\beta-\gamma-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}-(\eta_i-s)^{\beta-\gamma-1}\big], & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ \dfrac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\sum_{\eta_i\leqslant s\leqslant 1}\xi_i\eta_i^{\beta-\gamma-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}, & 0\leqslant t\leqslant 1。\end{cases}$$

证明 令$D_{0^+}^{\beta}x(t)=u(t)$, $g(t)=-\big[\mu\big(t,x(t),x(t)\big)+\nu\big(t,x(t),x(t)\big)\big]$, 由方程(2)的相应部分,可得

$$D_{0^+}^{\beta}u(t)=-g(t),\ \ u^{(k)}(0)=0\ (k=0,1,\cdots,l-2),\ \ D_{0^+}^{\gamma}u(1)=\sum_{k=1}^{m-2}\xi_k D_{0^+}^{\gamma}u(\eta_k)。\tag{4}$$

对方程(4)第一个式子两边进行积分,可得$u(t)=-I_{0^+}^{\beta}g(t)+c_1t^{\beta-1}+c_2t^{\beta-2}+\cdots+c_lt^{\beta-l}$。根据条件

$u^{(k)}(0)=0\ (k=0,1,\cdots,l-2)$, 可推出 $c_l=c_{l-1}=\cdots=c_2=0$。利用 $D_{0^+}^{\gamma}t^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma)}t^{\beta-\gamma-1}$ 及方程(4)剩余条件 $D_{0^+}^{\gamma}u(1)=\sum_{k=1}^{m-2}\xi_k D_{0^+}^{\gamma}u(\eta_k)$, 计算可得

$$c_1=\frac{1}{M\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{M\Gamma(\beta)}\sum_{k=1}^{m-2}\xi_k\int_0^{\eta_k}(\eta_k-s)^{\beta-\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s。$$

将 c_1 代入方程,再根据 M 的定义,可推出

$$\begin{aligned}u(t)=&-\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}g(s)\mathrm{d}s+\int_0^1\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta)}g(s)\mathrm{d}s+\frac{t^{\beta-1}\sum_{k=1}^{m-2}\xi_k\eta_k^{\beta-\gamma-1}}{M\Gamma(\beta)}\times\\&\int_0^1(1-s)^{\beta-\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s-\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\int_0^1\sum_{s<\eta_k}\xi_k(\eta_k-s)^{\beta-\gamma-1}g(s)\mathrm{d}s=\\&\int_0^1(g_1(t,s)+g_2(t,s))g(s)\mathrm{d}s=\int_0^1K(t,s)g(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

那么,$D_{0^+}^{\beta}x(t)=\int_0^1K(t,s)g(s)\mathrm{d}s$。分析问题(2)的剩余条件,可以发现其结构与方程(4)相同。因此,利用相同的方法,可获得结论(3)。

引理2 令 $0<M<1$, 则有如下性质

(i) 对于任意的 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, $K(t,s)$ 是连续的;

(ii) $0\leqslant\frac{t^{\beta-1}m(s)}{\Gamma(\beta)}\leqslant K(t,s)\leqslant\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}$, $\forall t,s\in[0,1]$, 其中 $m(s)=(1-s)^{\beta-\gamma-1}(1-(1-s)^{\gamma})$。

证明 根据 $K(t,s)$ 定义,可知(i)成立。当 $0\leqslant s\leqslant t<1$, 有

$$\begin{aligned}0\leqslant\frac{t^{\beta-1}m(s)}{\Gamma(\beta)}=&\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}-t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\leqslant g_1(t,s)=\\&\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\leqslant\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta)}。\end{aligned}$$

当 $0\leqslant t\leqslant s<1$, 可得 $0\leqslant\frac{t^{\beta-1}m(s)}{\Gamma(\beta)}\leqslant g_1(t,s)=\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta)}$。

当 $0\leqslant s\leqslant\eta_i$, 下列式子成立:$g_2(t,s)\geqslant\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\sum_{0\leqslant s\leqslant\eta_i}\xi_i[\eta_i^{\beta-\gamma-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}-\eta_i^{\beta-\gamma-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}]=0$ 及 $g_2(t,s)\leqslant\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\beta-\gamma-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}$。

当 $\eta_i\leqslant s\leqslant 1$, 可得 $0\leqslant g_2(t,s)\leqslant\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\beta-\gamma-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}$。

由 $K(t,s)$ 的定义及 $M=1-\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\beta-\gamma-1}$, 可推得 $K(t,s)=g_1(t,s)+g_2(t,s)\geqslant g_1(t,s)\geqslant\frac{t^{\beta-1}m(s)}{\Gamma(\beta)}\geqslant 0$ 及 $K(t,s)\leqslant\frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta)}+\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\beta-\gamma-1}(1-s)^{\beta-\gamma-1}\leqslant\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}$, 即(ii)成立。

2 复合算子不动点定理

令 E 是实 Banach 空间,P 是 E 中的非空闭凸子集,若 P 满足:$x\in P,\lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda x\in P$;$x\in P,-x\in P\Rightarrow x=\theta$, θ 为 E 中零元,那么称 P 是 E 中的锥。由 P 引出 E 中半序关系:$x,y\in E$, $x\leqslant y$ 当且仅当 $y-x\in P$。若 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$, 则记作 $x<y$ 或 $y>x$。锥 P 称为正规的,若存在常数 $M>0$, 使

得 $\forall x,y\in E$, $\theta\leqslant x\leqslant y$, 都有 $\|x\|\leqslant M\|y\|$, 其中 M 为正规常数。给定 $h>\theta$, 记

$$P_h=\{x\in E|\exists\lambda_1(x),\lambda_2(x)>0,\ 使得\ \lambda_1(x)h\leqslant x\leqslant\lambda_2(x)h\}。$$

定理1 令 P 是 E 上的正规锥,算子 $T:P\to P$, $C,D:P\times P\to P$。T 是增算子,C,D 是混合单调算子。假设

(l_1) 对于任意的 $\tau\in(0,1)$, $u,v\in P$, 存在 $\eta(\tau)\in(\tau,1]$, 有

$$T(\tau u)\geqslant\tau Tu,\quad C(\tau u,\tau^{-1}v)\geqslant\eta(\tau)C(u,v),\quad D(\tau u,\tau^{-1}v)\geqslant\tau D(u,v);$$

(l_2) 对于任意的 $u,v\in P_h$, 存在 $\omega>0$, 有 $D(u,v)\leqslant\omega C(u,v)$;

(l_3) 存在 $h_1\in P_h$, 有 $Th_1,C(h_1,h_1),D(h_1,h_1)\in P_h$。

则下列结论成立:

(L1) $T((C+D)(h,h))\in P_h$;

(L2) $\exists x_0,y_0\in P_h$, $r\in(0,1)$, 有 $ry_0\leqslant x_0<y_0$, $x_0\leqslant T\big((C+D)(x_0,y_0)\big)\leqslant T\big((C+D)(y_0,x_0)\big)\leqslant y_0$;

(L3) $T\big((C+D)(z,z)\big)=z$ 有唯一解 $z^*\in P_h$;

(L4) 对于任意初值 $u_0,v_0\in P_h$, 构造如下两个迭代序列:$u_n=T\big((C+D)(u_{n-1},v_{n-1})\big)$, $v_n=T\big((C+D)(v_{n-1},u_{n-1})\big)$, 其中 $n=1,2,\cdots$。当 $n\to\infty$, 有 $u_n\to z^*$, $v_n\to z^*$。

证明 第一步:证明 $T(C+D)$ 是混合单调算子。取任意的 $x_1,x_2,y_1,y_2\in P$, 令 $x_1\leqslant x_2$, $y_1\geqslant y_2$, 根据 C,D 是混合单调算子,可得 $(C+D)(x_1,y_1)\leqslant(C+D)(x_2,y_2)$, 进一步由 T 的单调性,可得

$$\big(T(C+D)\big)(x_1,y_1)=T\big((C+D)(x_1,y_1)\big)\leqslant T\big((C+D)(x_2,y_2)\big)=\big(T(C+D)\big)(x_2,y_2),$$

因此 $T(C+D)$ 是混合单调算子。

第二步:证明 $\big(T(C+D)\big)(h,h)\in P_h$。

(i) 利用给出的条件(l_1),有

$$T(\tau^{-1}u)\leqslant\tau^{-1}Tu,\quad C(\tau^{-1}u,\tau v)\leqslant\eta(\tau)^{-1}C(u,v),\quad D(\tau^{-1}u,\tau v)\leqslant\tau^{-1}D(u,v)。\tag{5}$$

利用条件(l_3)中 $Th_1,C(h_1,h_1),D(h_1,h_1)\in P_h$, 可知:存在足够小的常数 $a_1,b_1,c_1\in(0,1)$ 及 $0<b_1+c_1<1$, 有

$$a_1h\leqslant Th_1\leqslant a_1{}^{-1}h,\quad b_1h\leqslant C(h_1,h_1)\leqslant b_1{}^{-1}h,\quad c_1h\leqslant D(h_1,h_1)\leqslant c_1{}^{-1}h。\tag{6}$$

由于 $h_1\in P_h$, 存在足够小的数 $d_1\in(0,1)$, 有 $d_1h\leqslant h_1\leqslant d_1{}^{-1}h$。进一步,可证明

$$Th\leqslant T(d_1{}^{-1}h_1)\leqslant d_1{}^{-1}Th_1\leqslant d_1{}^{-1}a_1{}^{-1}h,\quad Th\geqslant T(d_1h_1)\geqslant d_1Th_1\geqslant d_1a_1h。\tag{7}$$

同理可得

$$\eta(d_1)b_1h\leqslant C(h,h)\leqslant\eta(d_1)^{-1}b_1{}^{-1}h,\quad d_1c_1h\leqslant D(h,h)\leqslant d_1{}^{-1}c_1{}^{-1}h。\tag{8}$$

由此推断,$C(h,h),D(h,h)\in P_h$。

(ii) 对于任意的 $u,v\in P_h$, 存在常数 $m_1,m_2\in(0,1)$ 使得 $m_1h\leqslant u\leqslant m_1{}^{-1}h$, $m_2h\leqslant v\leqslant m_2{}^{-1}h$。令 $m=\min\{m_1,m_2\}$, 再利用算子 C 的混合单调性,条件(l_1)及公式(5),公式(8),可得

$$\eta(m)\eta(d_1)b_1h\leqslant C(m_1h,m_2{}^{-1}h)\leqslant C(u,v)\leqslant C(m_1{}^{-1}h,m_2h)\leqslant\eta(m)^{-1}\eta(d_1)^{-1}b_1{}^{-1}h,$$

因此, $C:P_h\times P_h\to P_h$。同理有 $D:P_h\times P_h\to P_h$, 那么 $C(u,v)$ 等价于 $D(u,v)$。定义 $F\{u/v\}=\inf\{k\in R|u\leqslant kv\}$, 令 $J_{u,v}=F\left(\dfrac{D(u,v)}{C(u,v)}\right)$。根据条件($l_2$),有 $J_{u,v}\leqslant\omega$。考虑函数 $\bar{h}(s)=\dfrac{\eta(t)+J_{u,v}t}{(J_{u,v}+1)s}$, $s\in[t,\eta(t)]$, 可知 $\bar{h}$ 关于 s 递减。根据 $s<\eta(s)\leqslant1$ 及 $\bar{h}$,有 $\bar{h}\left(\dfrac{\omega t+\eta(t)}{\omega+1}\right)>1$, $\bar{h}(\eta(t))<1$ 及 $\dfrac{\omega t+\eta(t)}{\omega+1}>t$。根据 $\bar{h}$ 的单调性,$\exists\phi_1(t)\in\left(\dfrac{\omega t+\eta(t)}{\omega+1},\eta(t)\right)\subset(t,1]$ 使得 $\bar{h}(\phi_1(t))=\dfrac{\eta(t)+J_{u,v}t}{(J_{u,v}+1)\phi_1(t)}=1$, 表明 $J_{u,v}=\dfrac{\eta(t)-\phi_1(t)}{\phi_1(t)-t}$。事实上,根据 $J_{u,v}$ 定义,可得

$$D(u,v)\leqslant\frac{\eta(t)-\phi_1(t)}{\phi_1(t)-t}C(u,v),\quad \forall t\in(0,1),u,v\in P_h。\tag{9}$$

基于条件(l_1)及不等式(9),可推出:对于任意的 $s\in(0,1)$, $u,v\in P_h$, $\exists\phi_1(s)\in(s,1]$, 使得

$$\begin{aligned}&(C+D)(su,s^{-1}v)\geqslant\phi_1(s)C(u,v)+\big(\eta(s)-\phi_1(s)\big)C(u,v)+sD(u,v)\geqslant\\&\phi_1(s)C(u,v)+\big(\eta(s)-\phi_1(s)\big)\frac{\phi_1(s)-s}{\eta(s)-\phi_1(s)}D(u,v)+sD(u,v)\ =\phi_1(s)(C+D)(u,v)。\end{aligned}\tag{10}$$

(iii) 利用式(10),可推出 $(C+D)(s^{-1}u,sv)\leqslant\phi_1(s)^{-1}(C+D)(u,v)$。进一步根据算子 $T(C+D)$的单调性,条件(l_1)及公式(5)—公式(7),下列不等式成立

$$\begin{aligned}&\big(T(C+D)\big)(h,h)=T\big((C+D)(h,h)\big)\leqslant T\big((C+D)(d_1{}^{-1}h_1,d_1h_1)\big)\leqslant\\&T\big(\phi_1(d_1)^{-1}(C+D)(h_1,h_1)\big)\leqslant\phi_1(d_1)^{-1}T\big((C+D)(h_1,h_1)\big)\leqslant\\&\phi_1(d_1)^{-1}T\left(\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}\right)h\right)\leqslant\phi_1(d_1)^{-1}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}\right)Th\leqslant\phi_1(d_1)^{-1}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}\right)\frac{1}{d_1}\frac{1}{a_1}h,\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&\big(T(C+D)\big)(h,h)\geqslant T\big((C+D)(d_1h_1,d_1{}^{-1}h_1)\big)\geqslant\phi_1(d_1)T\big((C+D)(h_1,h_1)\big)\geqslant\\&\phi_1(d_1)T\big((b_1+c_1)h\big)\geqslant\phi_1(d_1)(b_1+c_1)Th\geqslant\phi_1(d_1)(b_1+c_1)d_1a_1h,\end{aligned}$$

表明$\big(T(C+D)\big)(h,h)\in P_h$。

第三步:由公式(10)可知,$\exists\phi_1(s)\in(s,1]$有

$$\begin{aligned}&\big(T(C+D)\big)(su,s^{-1}v)=T\big((C+D)(su,s^{-1}v)\big)\geqslant T\big(\phi_1(s)(C+D)(u,v)\big)\geqslant\\&\phi_1(s)\big((C+D)(u,v)\big)=\phi_1(s)\big(T(C+D)\big)(u,v)。\end{aligned}$$

根据文献[4]中定理条件,可得结论(L1)—(L4)成立。

注1 当算子 D 的性质由 $D(\tau u,\tau^{-1}v)\geqslant\tau D(u,v)$变为 $\exists\eta_1(\tau)\in(\tau,1]$, $D(\tau u,\tau^{-1}v)\geqslant\eta_1(\tau)D(u,v)$, 为了得到公式(10),只需取 $\phi_1(s)=\min\{\eta(s),\eta_1(s)\}$, 这时我们不再需要条件($\mathrm{l}_2$),定理结论(L1)—(L4)依旧成立。

定理2 令 P 是 E 上的正规锥,假设算子 $T:P\to P$ 是增算子,$C,D:P\times P\to P$ 是混合单调算子,条件(l_2)—(l_3)成立且

(l_4) 对于任意的 $\tau\in(0,1),u,v\in P$, 存在 $\eta(\tau)\in(\tau,1]$ 有 $T(\tau u)\geqslant\tau Tu$, $C(\tau u,\tau^{-1}v)\geqslant\eta(\tau)C(u,v)$, 及对于固定的 $v\in P$,$D(\cdot,v)$是凹的,对于固定的 $u\in P$, $D(u,\cdot)$是凸的;

(l_5) $\exists\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant1$, 有 $D(\theta,bh)\geqslant aD(bh,\theta)$, $b\geqslant1$。则结论(L1)—(L4)成立。

证明 利用条件(l_4),有 $D(u,v)=D(u,\tau\tau^{-1}v+(1-\tau)\theta)\leqslant\tau D(u,\tau^{-1}v)+(1-\tau)D(u,\theta)$, 表明 $\tau D(u,\tau^{-1}v)\geqslant D(u,v)-(1-\tau)D(u,\theta)$。利用条件($\mathrm{l}_5$)中 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant1$, 可得 $(2-a^{-1})+(a^{-1}-1)\tau\geqslant(2-a^{-1})\tau+(a^{-1}-1)\tau=\tau$。由于可以找到一个足够大的数 b,有 $u,v,\tau^{-1}v\leqslant bh$。进一步利用条件($\mathrm{l}_4$)—($\mathrm{l}_5$),可推出

$$\begin{aligned}&D(\tau u,\tau^{-1}v)=D(\tau u+(1-\tau)\theta,\tau^{-1}v)\geqslant D(u,v)-(1-\tau)D(u,\theta)+(1-\tau)D(\theta,\tau^{-1}v)\geqslant\\&D(u,v)+(1-\tau)\big(D(\theta,bh)-D(bh,\theta)\big)\geqslant D(u,v)+(1-\tau)[D(\theta,bh)-a^{-1}D(\theta,bh)]\geqslant\\&[1+(1-\tau)(1-a^{-1})]D(u,v)=[(2-a^{-1})+(a^{-1}-1)\tau]D(u,v)\geqslant\tau D(u,v),\end{aligned}$$

表明 $D(\tau u,\tau^{-1}v)\geqslant\tau D(u,v),\tau\in(0,1)$。这时可以发现条件($\mathrm{l}_4$)—($\mathrm{l}_5$)可推出条件($\mathrm{l}_1$)。因此,根据定理1的证明,可得结论 (L1)—(L4) 成立。

3 分数阶多点边值问题解的存在唯一性

令 $E=C[0,1]$, 范数为 $\|x\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant1}|x(t)|$, $P=\{x\in E:x(t)\geqslant0,t\in[0,1]\}$。显然,$(E,\|\cdot\|)$是

Banach空间,P是正规锥,正规常数为1。

定理 3 对于任意的 $t\in[0,1],x,y\in[0,+\infty)$, $\mu(t,x,y),\nu(t,x,y)$ 是连续的且 $\mu(t,0,1)$, $\nu(t,0,1)\not\equiv 0$。假设

(H_1) $\mu(t,x,y),\nu(t,x,y)$关于x是递增的,关于y是递减的;

(H_2) 对于任意的 $\tau\in(0,1),\exists\eta(\tau)\in(\tau,1]$, 有 $\mu(t,\tau x,\tau^{-1}y)\geqslant\eta(\tau)\mu(t,x,y)$, $\nu(t,\tau x,\tau^{-1}y)\geqslant\tau\nu(t,x,y)$;

(H_3) $\exists\omega>0$, 有 $v(t,x,y)\leqslant\omega\mu(t,x,y)$。

那么问题(2)在P_h上有唯一解 x^*,其中 $h(t)=t^{\beta-1}$。

证明 定义三个算子$T:P\rightarrow E,C,D:P\times P\rightarrow E$为

$$(Tx)(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\ \ C(x,y)(t)=\int_0^1 K(t,s)\mu(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s,$$

$$D(x,y)(t)=\int_0^1 K(t,s)\nu(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s,$$

有

$$(T(C+D))(x,y)(t)=\int_0^1 K(t,s)(\int_0^1 K(s,\tau)[\mu(\tau,x(\tau),y(\tau))+\nu(\tau,x(\tau),y(\tau))]\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s。$$

因此,由引理1可知:x是方程(2)的解当且仅当 $x=(T(C+D))(x,x)$。接下来分三步证明。

第一步:考虑到 μ,ν的定义,条件(H_1)及引理2,可推出:$T:P\rightarrow P$是增算子,$C,D:P\times P\rightarrow P$是混合单调算子。由条件($H_2$),可得对于任意的$\tau\in(0,1)$, 存在$\eta(\tau)\in(\tau,1]$, 有

$$T(\tau x)(t)=\int_0^1 K(t,s)\tau x(s)\mathrm{d}s\geqslant\tau\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s=\tau Tx(t),$$

$$C(\tau x,\tau^{-1}y)(t)=\int_0^1 K(t,s)\mu(s,\tau x(s),\tau^{-1}y(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_0^1 K(t,s)\eta(\tau)\mu(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s=\eta(\tau)C(x,y)(t),$$

$$D(\tau x,\tau^{-1}y)(t)=\int_0^1 K(t,s)\nu(s,\tau x(s),\tau^{-1}y(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_0^1 K(t,s)\tau\nu(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s=\tau D(x,y)(t)。$$

即验证了定理1条件(l_1)的成立。

第二步:令 $h_1(t)=h(t)=t^{\beta-1}$, 运用引理2,可得

$$Th_1(t)=\int_0^1 K(t,s)s^{\beta-1}\mathrm{d}s\leqslant\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\int_0^1 s^{\beta-1}\mathrm{d}s=\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta+1)}=\frac{1}{M\Gamma(\beta+1)}h(t),$$

$$Th_1(t)\geqslant\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 m(s)s^{\beta-1}\mathrm{d}s=(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 m(s)s^{\beta-1}\mathrm{d}s)h(t)。$$

因此可得 $Th_1\in P_h$成立。此外,根据非线性项μ的单调性及引理2,可推出

$$C(h_1,h_1)(t)=\int_0^1 K(t,s)\mu(s,s^{\beta-1},s^{\beta-1})\mathrm{d}s\leqslant\frac{t^{\beta-1}}{M\Gamma(\beta)}\int_0^1\mu(s,s^{\beta-1},s^{\beta-1})\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{M\Gamma(\beta)}\int_0^1\mu(s,1,0)\mathrm{d}s\cdot h(t),$$

$$C(h_1,h_1)(t)\geqslant\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 m(s)\mu(s,s^{\beta-1},s^{\beta-1})\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 m(s)\mu(s,0,1)\mathrm{d}s\cdot h(t)。$$

由$\mu(s,0,1)\not\equiv 0$及$\mu(s,1,0)\geqslant\mu(s,0,1)\geqslant 0$, 可得$C(h_1,h_1)\in P_h$。同理可知$D(h_1,h_1)\in P_h$。

第三步: 运用给出的条件(H_3),可推得

$$D(x,y)(t)=\int_0^1 K(t,s)\nu(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 K(t,s)\omega\mu(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s=\omega C(x,y)(t),\tag{11}$$

即定理1条件(l_2)成立。根据定理1,可推出问题(2)在P_h上有唯一解 x^*,其中 $h(t)=t^{\beta-1}$。

定理 4 对于任意的 $t\in[0,1],x,y\in[0,+\infty)$, $\mu(t,x,y),\nu(t,x,y)$ 是连续的且 $\mu(t,0,1)$, $\nu(t,0,1)\not\equiv 0$。假设(H_1),(H_3)成立且

(H_4)对于任意的 $\tau\in(0,1),\exists\eta(\tau)\in(\tau,1]$, 有$\mu(t,\tau x,\tau^{-1}y)\geqslant\eta(\tau)\mu(t,x,y)$;对于任意$\tau\in(0,1)$, x_1,x_2,

$y_1,y_2\in[0,+\infty)$, 有 $\nu(t,\tau x_1+(1-\tau)x_2,y)\geqslant\tau\nu(t,x_1,y)+(1-\tau)\nu(t,x_2,y)$, $\nu(t,x,\tau y_1+(1-\tau)y_2)\leqslant\tau\nu(t,x,y_1)+(1-\tau)\nu(t,x,y_2)$;

(H_5) $\exists\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ 有 $\nu(s,\theta,bh)\geqslant a\nu(s,bh,\theta)$, $b\geqslant 1$。

那么问题(2)在 P_h 上有唯一解 x^*,其中 $h(t)=t^{\beta-1}$。

证明 定义与定理3相同的算子 T,C,D。

(i) 考虑到 μ,ν 的定义,单调性及引理2,可得 $C,D:P\times P\to P$ 是混合单调算子,$T:P\to P$ 是增算子。令 $h_1(t)=h(t)=t^{\beta-1}$, 根据定理3的第二步证明,可得 $Th_1,C(h_1,h_1),D(h_1,h_1)\in P_h$。此外根据给定的条件$(\mathrm{H}_3)$,由定理3的第三步证明可推出式子(11),即 $D(x,y)\leqslant\omega C(x,y)$ 成立。

(ii) 验证定理2的条件(l_4)。根据条件(H_4),可知 $T(\tau x)\geqslant\tau Tx$, $C(\tau x,\tau^{-1}y)\geqslant\eta(\tau)C(x,y)$。因此只需验证算子 D 满足凹凸性。根据条件(H_4),可知:对于任意的 $\tau\in(0,1)$, $x_1,x_2\in P$, 可得

$$D\big(\tau x_1+(1-\tau)x_2,y\big)(t)\geqslant\int_0^1K(t,s)\Big[\tau\nu\big(s,x_1(s),y(s)\big)+(1-\tau)\nu\big(s,x_2(s),y(s)\big)\Big]\mathrm{d}s=$$

$$\tau\int_0^1K(t,s)\nu\big(s,x_1(s),y(s)\big)\mathrm{d}s+(1-\tau)\int_0^1K(t,s)\nu\big(s,x_2(s),y(s)\big)\mathrm{d}s=\tau D(x_1,y)(t)+(1-\tau)D(x_2,y)(t)。$$

相似地,对于任意的 $\tau\in(0,1)$, $y_1,y_2\in P$, 可知

$$D\big(x,\tau y_1+(1-\tau)y_2\big)(t)\leqslant\int_0^1K(t,s)\Big[\tau\nu\big(s,x(s),y_1(s)\big)+(1-\tau)\nu\big(s,x(s),y_2(s)\big)\Big]\mathrm{d}s=$$
$$\tau D(x,y_1)(t)+(1-\tau)D(x,y_2)(t)。$$

由上可知:对于任意的 $v\in P$, $D(\cdot,v)$ 是凹的;对于任意的 $u\in P$, $D(u,\cdot)$ 是凸的。

(iii) 验证定理2的条件(l_5)。根据已知条件(H_5), $\exists\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$, 有

$$D\big(\theta,bh(t)\big)=\int_0^1K(t,s)\nu\big(s,\theta,bh(s)\big)\mathrm{d}s\geqslant a\int_0^1K(t,s)\nu\big(s,bh(s),\theta\big)\mathrm{d}s=aD\big(bh(t),\theta\big)。$$

因此,由定理2可得问题(2)在 P_h 上有唯一解 x^*,其中 $h(t)=t^{\beta-1}$。

4 应用举例

例1 考虑如下分数阶边值问题

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\frac{19}{4}}\left(D_{0^+}^{\frac{19}{4}}x(t)\right)=(x+1)^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{3}}+3(x+1)^{\frac{1}{6}}+3+t+5t^2,\\ x^{(k)}(0)=0(k=0,1,2,3),D_{0^+}^{\frac{1}{2}}x(1)=\frac{1}{5}D_{0^+}^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}D_{0^+}^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{2}\right),\\ \left(D_{0^+}^{\frac{19}{4}}x(t)\right)^{(k)}\Big|_{t=0}=0,\quad D_{0^+}^{\frac{1}{2}}\left(D_{0^+}^{\frac{19}{4}}x(t)\right)\Big|_{t=1}=\frac{1}{5}D_{0^+}^{\frac{1}{2}}\left(D_{0^+}^{\frac{19}{4}}x(t)\right)\Big|_{t=\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}D_{0^+}^{\frac{1}{2}}\left(D_{0^+}^{\frac{19}{4}}x(t)\right)\Big|_{t=\frac{1}{2}},\end{cases}\tag{12}$$

其中 $\mu(t,x,y)=(x+1)^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{3}}+3+t$, $\nu(t,x,y)=3(x+1)^{\frac{1}{6}}+4y^{-\frac{1}{3}}+5t^2$, $\beta=\frac{19}{4}\in(4,5)$, $\gamma=\frac{1}{2}\in(0,1)$, $\beta-\gamma-1=\frac{13}{4}>0$, $m=4$, $\xi_1=\frac{1}{5}$, $\xi_2=\frac{1}{4}$, $\eta_1=\frac{1}{3}$, $\eta_2=\frac{1}{2}$。

结论 问题(12)有唯一解 $x^*\in P_h$, 其中 $h(t)=t^{\frac{15}{4}}$。

证明 (i) 由上述参数,可得 $M=1-\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}^{\frac{13}{4}}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}^{\frac{13}{4}}\right)<1$, $\mu(t,0,1)=5+t\not\equiv 0$, $\nu(t,0,1)=7+5t^2\not\equiv 0$。此外,$\mu(t,x,y)$,$\nu(t,x,y)$ 关于 x 是递增的,关于 y 是递减的,即定理3中条件

(H_1)成立。

(ⅱ)验证定理3中条件(H_2)成立。令$\eta(\tau)=\tau^{\frac{1}{2}}$, $\tau\in(0,1)$, 可得 $\eta(\tau)>\tau$及

$$\mu(t,\tau x,\tau^{-1}y)\geqslant\tau^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}+\tau^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+3+t\geqslant\tau^{\frac{1}{2}}\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{3}}+3+t\right]=\eta(\tau)\mu(t,x,y),$$

$$\nu(t,\tau x,\tau^{-1}y)\geqslant3\tau^{\frac{1}{6}}(x+1)^{\frac{1}{6}}+4\tau^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+5t^2\geqslant\tau^{\frac{1}{3}}\left[3(x+1)^{\frac{1}{6}}+4y^{-\frac{1}{3}}+5t^2\right]\geqslant\tau\nu(t,x,y)。$$

(ⅲ)验证定理3中条件(H_3)成立。令 $\omega=4$, 可知

$$\nu(t,x,y)=3(x+1)^{\frac{1}{6}}+4y^{-\frac{1}{3}}+5t^2\leqslant4\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{3}}+3+t\right]=\omega\mu(t,x,y)。$$

由定理3,可知问题(12)有唯一解 $x^*\in P_h$, 其中 $h(t)=t^{\frac{15}{4}}$。

参考文献:

[1] XIANG T, GEORGIEV S G. Noncompact-type Krasnoselskii Fixed-point Theorems and Their Applications[J]. *Math Method Appl Sci*, 2016, **39**(4): 833-863. DOI: 10.1002/mma.3525.

[2] KARIMI L, FAGHIH-AHMADI M, HEDAYATAN K. Some Properties of Concave Operators[J]. *Turk J Math*, 2016, **40**: 1211-1220. DOI: 10.3906/mat-1501-41.

[3] ZHAI C B, WANG L. φ-(h,e) Concave Operators and Applications[J]. *J Math Anal Appl*, 2017, **454**(2): 571-584. DOI:10.1016/j.j maa.2017.05.010.

[4] GUO D J. Fixed Points of Mixed Monotone Operators with Applications[J]. *Appl Anal*, 1988, **31**(3): 215-224. DOI: 10.1080/00036818808839825.

[5] HOAN L V C, AKINLAR M A, INC M, *et al*. A New Fractional-order Compartmental Disease Model[J]. *Alex Eng J*, 2020, **59**(5): 3187-3196. DOI: 10.1016/j.aej.2020.07.040.

[6] SENE N. Mittag-Leffler Input Stability of Fractional Differential Equations and Its Applications[J]. *Discrete Cont Dyn-S*, 2020, **13**(3): 867-880. DOI:10.3934/dcdss.2020050.

[7] KHAN A, KHAN H, GOMEZ-AGUILAR J F, *et al*. Existence and Hyers-Ulam Stability for a Nonlinear Singular Fractional Differential Equations with Mittag-Leffler Kernel[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2019, **127**: 422-427. DOI:10.1016/j.chaos.2019.07.026.

[8] AHMAD B, NTOUYAS S K, ALSAEDI A. On a Coupled System of Fractional Differential Equations with Coupled Nonlocal and Integral Boundary Conditions [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2016, **83**: 234-241. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.014.

[9] WANG H, ZHANG L L. Uniqueness Methods for the Higher-order Coupled Fractional Differential Systems with Multi-point Boundary Conditions[J]. *Bull des Sci Math*, 2021, **166**: 102935. DOI:10.1016/j.bulsci.2020.102935.

[10] REN J, ZHAI C B. Some Properties of Sets, Fixed Point Theorems in Ordered Product Spaces and Applications to a Nonlinear System of Fractional Differential Equations[J]. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2017, **49**(2): 625-645. DOI: 10.12775/tmna.2016.095.

[11] ZHANG L L, TIAN H M. New Fixed Point Theorems for Sum Operators in the Set $P_{h,e}$ and Their Applications to Nonlinear Fractional Differential Problems[J]. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2022, **59**(2B): 719-735. DOI:10.12775/TMNA.2021.008.

[12] MARASI H R, AFSHARI H, DANESHBASTAM M, *et al*. Fixed Points of Mixed Monotone Operators for Existence and Uniqueness of Nonlinear Fractional Differential Equations[J]. *J Contemp Math Anal*, 2017, **52**(1): 8-13. DOI: 10.3103/S1068362317010022.

[13] LIU L S, ZHANG X Q, JIANG J, *et al*. The Unique Solution of a Class of Sum Mixed Monotone Operator Equations and Its Application to Fractional Boundary Value Problems[J]. *J Nonlinear Sci Appl*, 2016, **9**(5): 2943-2958. DOI:10.22436/jnsa.009.05.87.

[14] ZHAI C B, LI X. Properties of Positive Solutions to a Class of Four-point Boundary Value Problem of Caputo Fractional Differential Equations with a Parameter[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2014, **19**(8): 2820-2827. DOI:10.1016/j.cnsns.2014.01.

[15] FILIP A D. Fixed Point Theorems for Nonself Operators on a Large Kasahara Space[J]. Fixed Point Theory, 2023, **24**(2): 583-594. DOI: 10.24193/fpt-ro.2023.2.08.