山西大学学报(自然科学版)47(5):912-922,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023146

带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的上同调

腾文
(贵州财经大学 数学与统计学院,贵州 贵阳 550025)

摘 要:本文研究带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,首先给出带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的表示和上同调。作为上同调的应用,研究带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的单参数形式形变。
关键词:带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数;表示;上同调;形变
中图分类号:O152.5 **文献标志码**:A **文章编号**:0253-2395(2024)05-0912-11

Cohomology of Weighted Rota-Baxter Lie-Yamaguti Algebras

TENG Wen
(*School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang* 550025, *China*)

Abstract: In this paper, we consider weighted Rota-Baxter Lie-Yamaguti algebras. Firstly, we introduce a representations and cohomology of the weighted Rota-Baxter Lie-Yamaguti algebras. As the applications of cohomology, we study one parameter formal deformations of the weighted Rota-Baxter Lie-Yamaguti algebras.
Key words: weighted Rota-Baxter Lie-Yamaguti algebras; representations; cohomology; deformations

0 引言

Lie-Yamaguti 代数的概念由 Kinyon 和 Weinstein[1]在研究 Courant 代数体时提出。这种代数结构可追溯到 1954 年 Nomizu[2]对齐次空间上不变仿射连通的研究,以及 Yamaguti[3-4]对一般李三系和李三代数的工作。近年来,Lin 等[5]、Zhang 等[6]、Sheng 等[7-8]、Takahashi 等[9]学者研究了 Lie-Yamaguti 代数的拟导子、扩张、形变、复积结构、辛结构、quandle 模等内容。

结合代数上罗-巴算子的概念首次由 Baxter[10]在研究概率论中浮动问题时提出。在李代数中,一个权为 0 的罗-巴算子在 20 世纪 80 年代作为经典的杨-巴克斯特方程的算子形式被独立引入[11]。过去 20 年,罗-巴算子与洗牌积[12]、代数 operads 分裂[13]、无穷小双代数[14]、Hopf 代数[15]、Double 代数[16]和量子场论重整化[17]等数学物理众多分支的联系受到了广泛关注。最近,带权罗-巴结合代数[18]、带权罗-巴 Lie 代数[19]、带权罗-巴 pre-Lie 代数[20]、带权罗-巴 3-Lie 代数[21]等被广泛研究。受上述工作启发,本文引入带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的概念,并给出带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的表示和上同调。随后,利用所得上同调研究带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的形式形变。所得结论可认为是带权罗-巴 Lie 代数[19]相应结论的推广。特别地,当带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的 Lie 括积为平凡时,带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数自然成为带权罗-巴李三系。

收稿日期:2023-05-24;**接受日期**:2023-09-18
基金项目:国家自然科学基金(12161013);贵州省科技厅基金(黔科合基础-ZK[2023]一般 025);贵州省高等学校系统建模与数据挖掘重点实验室(2023013)
作者简介:腾文(1986-),男,贵州金沙人,博士,讲师,研究方向为代数学。E-mail:tengwen@mail.gufe.edu.cn
引文格式:腾文. 带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的上同调[J]. 山西大学学报(自然科学版),2024,47(5):912-922. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023146

本文中所有向量空间和线性映射均在特征为0的域K上。

1 罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的表示

定义1[1] 设L为向量空间,$[\cdot,\cdot]$和$\{\cdot,\cdot,\cdot\}$分别是L上的二元和三元线性运算,对任意的$a,b,c,u,v,w\in L$,满足下列等式:

$$[a,b]=-[b,a], \tag{1}$$

$$\{a,b,c\}=-\{b,a,c\}, \tag{2}$$

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]+\{a,b,c\}+\{b,c,a\}+\{c,a,b\}=0, \tag{3}$$

$$\{[a,b],c,u\}+\{[b,c],a,u\}+\{[c,a],b,u\}=0, \tag{4}$$

$$\{a,b,[u,v]\}=[\{a,b,u\},v]+[u,\{a,b,v\}], \tag{5}$$

$$\{a,b,\{u,v,w\}\}=\{\{a,b,u\},v,w\}+\{u,\{a,b,v\},w\}+\{u,v,\{a,b,w\}\}, \tag{6}$$

则称$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$为 Lie-Yamaguti 代数。

Lie-Yamaguti 代数的同态$\psi:(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})\to(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$是线性映射,且满足$\psi([a,b])=[\psi(a),\psi(b)]',\psi(\{a,b,c\})=\{\psi(a),\psi(b),\psi(c)\}',\forall a,b,c\in L$。

定义2[4] 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$为 Lie-Yamaguti 代数,$V$为线性空间,线性映射$\rho:L\to \mathrm{End}(V)$和双线性映射$D,\theta:L\times L\to \mathrm{End}(V)$,对任意的$a,b,c,u,v\in L$,满足下列等式:

$$D(a,b)-\theta(b,a)+\theta(a,b)+\rho([a,b])-\rho(a)\rho(b)+\rho(b)\rho(a)=0, \tag{7}$$

$$D([a,b],c)+D([b,c],a)+D([c,a],b)=0, \tag{8}$$

$$\theta([a,b],c)-\theta(a,c)\rho(b)+\theta(b,c)\rho(a)=0, \tag{9}$$

$$D(a,b)\rho(c)-\rho(c)D(a,b)-\rho(\{a,b,c\})=0, \tag{10}$$

$$\theta(a,[b,c])-\rho(b)\theta(a,c)+\rho(c)\theta(a,b)=0, \tag{11}$$

$$\theta(u,v)D(a,b)-D(a,b)\theta(u,v)+\theta(\{a,b,u\},v)+\theta(u,\{a,b,v\})=0, \tag{12}$$

$$\theta(a,\{b,c,u\})-\theta(c,u)\theta(a,b)+\theta(b,u)\theta(a,c)-D(b,c)\theta(a,u)=0, \tag{13}$$

则称$(V;\rho,D,\theta)$是L的一个表示。此时,V也称L-模。

设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$为 Lie-Yamaguti 代数,对于给定元$a_1,a_2\in L$,定义线性映射$\mathrm{ad}:L\to\mathrm{End}(L)$和双线性映射$\mathfrak{I},\mathfrak{R}:L\times L\to\mathrm{End}(L)$如下:

$$\mathrm{ad}(a_1)(a_3):=[a_1,a_3],\mathfrak{I}(a_1,a_2)(a_3):=\{a_1,a_2,a_3\},\mathfrak{R}(a_1,a_2)(a_3):=\{a_3,a_1,a_2\},\forall a_3\in L,$$

则$(L;\mathrm{ad},\mathfrak{I},\mathfrak{R})$为$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$的一个表示,称为伴随表示。

接下来我们引入带权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,并给出它的表示。

定义3 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$为 Lie-Yamaguti 代数,对任意$\lambda\in K$:

(i)如果线性算子$T:L\to L$,对任意$a,b,c\in L$满足下列等式:

$$[Ta,Tb]=T([Ta,b]+[a,Tb]+\lambda[a,b]), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\{Ta,Tb,Tc\}=T(&\{Ta,Tb,c\}+\{Ta,b,Tc\}+\{a,Tb,Tc\}+\\ &\lambda\{Ta,b,c\}+\lambda\{a,Tb,c\}+\lambda\{a,b,Tc\}+\lambda^2\{a,b,c\})。\end{aligned} \tag{15}$$

则称T是L上λ权罗-巴算子。进一步地,称$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$为$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。

(ii)如果线性算子$d_L:L\to L$,对任意$a,b,c\in L$满足下列等式:

$$d_L([a,b])=[a,d_L(b)]+[d_L(a),b]+\lambda[d_L(a),d_L(b)],$$

$$\begin{aligned}d_L(\{a,b,c\})=&\{d_L(a),b,c\}+\{a,d_L(b),c\}+\{a,b,d_L(c)\}+\lambda\{a,d_L(b),d_L(c)\}+\\ &\lambda\{d_L(a),b,d_L(c)\}+\lambda\{d_L(a),d_L(b),c\}+\lambda^2\{d_L(a),d_L(b),d_L(c)\}。\end{aligned}$$

则称d_L是L上λ权微分算子。进一步地,称$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},d_L)$为$\lambda$权微分 Lie-Yamaguti 代数。

命题1 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$为 Lie-Yamaguti 代数,一个可逆线性算子T是L上的λ权罗-巴算子当且仅当T^{-1}是L上的λ权微分算子。

证明 设 T 是 L 上的可逆 λ 权罗-巴算子,则对任意 $a,b,c\in L$, 记 $x=T^{-1}(a)$, $y=T^{-1}(b)$, $z=T^{-1}(c)$, 由等式(14)和(15)有

$$T^{-1}([a,b])=T^{-1}([Tx,Ty])=T^{-1}T([Tx,y]+[x,Ty]+\lambda[x,y])=$$
$$[a,T^{-1}(b)]+[T^{-1}(a),b]+\lambda[T^{-1}(a),T^{-1}(b)],$$
$$T^{-1}(\{a,b,c\})=T^{-1}(\{Tx,Ty,Tc\})=$$
$$T^{-1}T(\{Tx,Ty,z\}+\{Tx,y,Tz\}+\{x,Ty,Tz\}+$$
$$\lambda\{Tx,y,z\}+\lambda\{x,Ty,z\}+\lambda\{x,y,Tz\}+\lambda^2\{x,y,z\})=$$
$$\{a,b,T^{-1}(c)\}+\{a,T^{-1}(b),c\}+\{T^{-1}(a),b,c\}+\lambda\{a,T^{-1}(b),T^{-1}(c)\}+$$
$$\lambda\{T^{-1}(a),b,T^{-1}(c)\}+\lambda\{T^{-1}(a),T^{-1}(b),c\}+\lambda^2\{T^{-1}(a),T^{-1}(b),T^{-1}(c)\}。$$

因此,T^{-1} 是 L 上的 λ 权微分算子。反之,类似可得。证毕

例1 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,则

(i)$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},\mathrm{Id}_L)$为-1权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。

(ii)对任意 $\lambda'\in\mathbb{K}$,$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},\lambda'T)$为 $\lambda'\lambda$ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。

(iii)$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},-\lambda-T)$为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。

(iv)对任意 L 的自同构 $\psi\in\mathrm{Aut}(L)$,$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},\psi^{-1}\circ T\circ\psi)$ 为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。

定义4 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$和$(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}',T')$为两个 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。f: $L\to L'$ 为 Lie-Yamaguti 代数的同态,且满足 $f\circ T=T'\circ f$,则称 f 是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 L 到 L' 的同态。

定义5 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,$(V;\rho,D,\theta)$为 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$的一个表示,如果存在线性算子 T_V: $V\to V$,对任意 $a,b\in L$, $u\in V$ 满足下列等式:

$$\rho(Ta)(T_Vu)=T_V(\rho(Ta)u+\rho(a)(T_Vu)+\lambda\rho(a)u),$$
$$D(Ta,Tb)(T_Vu)=T_V(D(Ta,Tb)u+D(Ta,b)T_Vu+D(a,Tb)T_Vu+\lambda D(Ta,b)u+$$
$$\lambda D(a,Tb)u+\lambda D(a,b)T_Vu+\lambda^2D(a,b)u),$$
$$\theta(Ta,Tb)(T_Vu)=T_V(\theta(Ta,Tb)u+\theta(Ta,b)T_Vu+\theta(a,Tb)T_Vu+$$
$$\lambda\theta(Ta,b)u+\lambda\theta(a,Tb)u+\lambda\theta(a,b)T_Vu+\lambda^2\theta(a,b)u),$$

则称$(V;\rho,D,\theta)$是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$的一个表示。

显然,$(L;\mathrm{ad},\mathfrak{I},\mathfrak{R},T)$是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$的一个表示,称为伴随表示。

例2 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$为 Lie-Yamaguti 代数,$(V;\rho,D,\theta)$为它的一个表示,则$(V;\rho,D,\theta,\mathrm{Id}_V)$是-1权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},\mathrm{Id}_L)$的一个表示。

例3 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,$(V;\rho,D,\theta,T_V)$为它的一个表示,则对任意 $\lambda'\in\mathbb{K}$,$(V;\rho,D,\theta,\lambda'T_V)$是 $\lambda'\lambda$ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},\lambda'T)$的一个表示。

例4 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,$(V_i;\rho_i,D_i,\theta_i,T_{V_i})_{i\in I}$为它的一族表示,则$(\bigoplus_{i\in I}V_i;(\rho_i)_{i\in I},(D_i)_{i\in I},(\theta_i)_{i\in I},\bigoplus_{i\in I}T_{V_i})$是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$的一个表示。

命题2 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,$(V;\rho,D,\theta,T_V)$为它的一个表示,则$(L\oplus V,[\cdot,\cdot]_\rho,\{\cdot,\cdot,\cdot\}_\theta,T\oplus T_V)$是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,其中对任意 $a,b,c\in L$, $u,v,w\in V$,算子$[\cdot,\cdot]_\rho$, $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_\theta$, $T\oplus T_V$ 定义如下

$$[a+u,b+v]_\rho=[x,y]+\rho(a)v-\rho(b)u,$$
$$\{a+u,b+v,c+w\}_\theta:=\{a,b,c\}+D(a,b)w+\theta(b,c)u-\theta(a,c)v,$$
$$T\oplus T_V(a+u):=Ta+T_Vu。$$

$(L\oplus V, [\cdot,\cdot]_\rho, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\theta, T\oplus T_V)$称为半直积$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。

证明 对任意$a,b,c\in L, u,v,w\in V$,我们有

$$[T\oplus T_V(a+u), T\oplus T_V(b+v)]_\rho=[Ta,Tb]+\rho(Ta)T_Vv-\rho(Tb)T_Vu=$$
$$T[Ta,b]+T_V(\rho(Ta)v-\rho(b)T_Vu)+T[a,Tb]+$$
$$T_V(\rho(a)T_Vv-\rho(Tb)u)+\lambda(T[a,b]+T_V(\rho(a)v-\rho(b)u))=$$
$$T\oplus T_V([T\oplus T_V(a+u),b+v]_\rho+[a+u,T\oplus T_V(b+v)]_\rho+\lambda[a+u,b+v]_\rho),$$
$$\{T\oplus T_V(a+u), T\oplus T_V(b+v), T\oplus T_V(c+w)\}_\theta=$$
$$\{Ta,Tb,Tc\}+D(Ta,Tb)T_Vw+\theta(Tb,Tc)T_Vu-\theta(Ta,Tc)T_Vv=$$
$$T\{Ta,Tb,c\}+T_V(D(Ta,Tb)w+\theta(Tb,c)T_Vu-\theta(Ta,c)T_Vv)+$$
$$T\{Ta,b,Tc\}+T_V(D(Ta,b)T_Vw+\theta(b,Tc)T_Vu-\theta(Ta,Tc)v)+$$
$$T\{a,Tb,Tc\}+T_V(D(a,Tb)T_Vw+\theta(Tb,Tc)u-\theta(a,Tc)T_Vv)+$$
$$\lambda T\{Ta,b,c\}+\lambda T_V(D(Ta,b)w+\theta(b,c)T_Vu-\theta(Ta,c)v)+$$
$$\lambda T\{a,Tb,c\}+\lambda T_V(D(a,Tb)w+\theta(Tb,c)u-\theta(a,c)T_Vv)+$$
$$\lambda T\{a,b,Tc\}+\lambda T_V(D(a,b)T_Vw+\theta(b,Tc)u-\theta(a,Tc)v)+$$
$$\lambda^2T\{a,b,c\}+\lambda^2T_V(D(a,b)w+\theta(b,c)u-\theta(a,c)v)=$$
$$T\oplus T_V(\{T\oplus T_V(a+u),T\oplus T_V(b+v),c+w\}_\theta+\{T\oplus T_V(a+u),b+v,T\oplus T_V(c+w)\}_\theta+$$
$$\{a+u,T\oplus T_V(b+v),T\oplus T_V(c+w)\}_\theta+\lambda\{T\oplus T_V(a+u),b+v,c+w\}_\theta+$$
$$\lambda\{a+u,T\oplus T_V(b+v),c+w\}_\theta+\lambda\{a+u,b+v,T\oplus T_V(c+w)\}_\theta+\lambda^2\{a+u,b+v,c+w\}_\theta)。$$

这表明$T\oplus T_V$是$L\oplus V$上λ权罗-巴算子。因此,命题成立。证毕。

命题3 设$(L, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot,\cdot\}, T)$为$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,对任意$a,b,c\in L$, 定义新的运算如下:

$$[a,b]_T=[Ta,b]+[a,Tb]+\lambda[a,b],$$
$$\{a,b,c\}_T=\{Ta,Tb,c\}+\{Ta,b,Tc\}+\{a,Tb,Tc\}+\lambda\{Ta,b,c\}+\lambda\{a,Tb,c\}+\lambda\{a,b,Tc\}+\lambda^2\{a,b,c\}。$$

则

(i) $(L, [\cdot,\cdot]_T, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T)$是新的 Lie-Yamaguti 代数,记为$L_T$。

(ii) $(L, [\cdot,\cdot]_T, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T, T)$是$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数。进一步地,T是$(L, [\cdot,\cdot]_T, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T, T)$到$(L, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot,\cdot\}, T)$的$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数同态。

证明 (i)直接验证运算$[\cdot,\cdot]_T, \{\cdot,\cdot,\cdot\}$满足等式(1)—(6)即可。

(ii) 对任意$a,b,c\in L_T$, 注意到

$$[Ta,Tb]_T=[T^2a,Tb]+[Ta,T^2b]+\lambda[Ta,Tb]=T([T^2a,b]+[Ta,Tb]+\lambda[a,b])+T([Ta,Tb]+$$
$$[a,T^2b]+\lambda[a,Tb]+\lambda T([Ta,b]+[a,Tb]+\lambda[a,b]=T([Ta,b]_T+[a,Tb]_T+\lambda[a,b]_T),$$
$$\{Ta,Tb,Tc\}_T=\{T^2a,T^2b,Tc\}+\{T^2a,Tb,T^2c\}+\{Ta,T^2b,T^2c\}+$$
$$\lambda\{T^2a,Tb,Tc\}+\lambda\{Ta,T^2b,Tc\}+\lambda\{Ta,Tb,T^2c\}+\lambda^2\{Ta,Tb,Tc\}=$$
$$T(\{Ta,Tb,c\}_T+\{Ta,b,Tc\}_T+\{a,Tb,Tc\}_T+$$
$$\lambda\{Ta,b,c\}_T+\lambda\{a,Tb,c\}_T+\lambda\{a,b,Tc\}_T+\lambda^2\{a,b,c\}_T)。$$

从而,T是L_T上λ权罗-巴算子。进一步地,由等式(14)和(15),对任意$a,b,c\in L_T$, 有

$$T([a,b]_T)=[Ta,Tb],\ T(\{a,b,c\}_T)=\{Ta,Tb,Tc\}。$$

因此,T是$(L, [\cdot,\cdot]_T, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T, T)$到$(L, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot,\cdot\}, T)$的$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数同态。证毕。

定理1 设$(L, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot,\cdot\}, T)$为$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,$(V;\rho,D,\theta,T_V)$为它的一个表示。对任意$a,b\in L$, 定义新的映射$\rho_T: L\to \mathrm{End}(V), D_T, \theta_T: L\times L\to \mathrm{End}(V)$如下:

$$\rho_T(a)u:=\rho(Ta)u+\rho(a)(T_Vu)+\lambda\rho(a)u,$$
$$D_T(a,b)u=D(Ta,Tb)u-T_V(D(Ta,b)u+D(a,Tb)u+\lambda D(a,b)u),$$
$$\theta_T(a,b)u=\theta(Ta,Tb)u-T_V(\theta(Ta,b)u+\theta(a,Tb)u+\lambda\theta(a,b)u), \forall u\in V。$$

则$(V;\ \rho_T, D_T, \theta_T, T_V)$是$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L_T,\ [\cdot,\cdot]_T,\ \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T, T)$的一个表示。

证明 首先直接验证映射ρ_T, D_T, θ_T满足等式(7)—(13),即验证$(V;\ \rho_T, D_T, \theta_T)$是 Lie-Yamaguti 代数$L_T$的一个表示。进一步地,对任意$a, b, c \in L_T, u \in V$有

$$\begin{gathered}\rho_T(Ta)T_Vu=\rho(T^2a)T_Vu+\rho(Ta)T_V^2u+\lambda\rho(Ta)T_Vu=\\T_V(\rho(T^2a)u+\rho(Ta)T_Vu+\lambda\rho(Ta)u)+T_V(\rho(Ta)T_Vu+\rho(a)T_V^2u+\lambda\rho(a)T_Vu)+\\\lambda T_V(\rho(Ta)u+\rho(a)T_Vu+\lambda\rho(a)u)=T_V(\rho_T(Ta)u+\rho_T(a)T_Vu+\lambda\rho_T(a)u),\\D_T(Ta,Tb)T_Vu=\\D(T^2a,T^2b)T_Vu-T_V(D(T^2a,Tb)T_V^2u+D(Ta,T^2b)T_Vu+\lambda D(Ta,Tb)T_Vu)=\\T_V(D(T^2a,T^2b)u+D(T^2a,Tb)T_Vu+D(Ta,T^2b)T_Vu+\\\lambda D(T^2a,Tb)u+\lambda D(Ta,T^2b)u+\lambda D(Ta,Tb)T_Vu+\lambda^2D(Ta,Tb)u)-\\T_V^2(D(T^2a,Tb)u+D(T^2a,b)T_Vu+D(Ta,Tb)T_Vu+\\\lambda D(T^2a,b)u+\lambda D(Ta,Tb)u+\lambda D(Ta,b)T_Vu+\lambda^2D(Ta,b)u)-\\T_V^2(D(Ta,T^2b)u+D(a,T^2b)T_Vu+D(Ta,Tb)T_Vu+\\\lambda D(a,T^2b)u+\lambda D(Ta,Tb)u+\lambda D(a,Tb)T_Vu+\lambda^2D(a,Tb)u)-\\\lambda T_V^2(D(Ta,Tb)u+D(Ta,b)T_Vu+D(a,Tb)T_Vu+\\\lambda D(Ta,b)u+\lambda D(a,Tb)u+\lambda D(a,b)T_Vu+\lambda^2D(a,b)u)=\\T_V(D_T(Ta,Tb)u+D_T(Ta,b)T_Vu+D_T(a,Tb)T_Vu+\lambda D_T(Ta,b)u+\\\lambda D_T(a,Tb)u+\lambda D_T(a,b)T_Vu+\lambda^2D_T(a,b)u),\\\theta_T(Ta,Tb)T_Vu=\\\theta(T^2a,T^2b)T_Vu-T_V(\theta(T^2a,Tb)T_V^2u+\theta(Ta,T^2b)T_Vu+\lambda\theta(Ta,Tb)T_Vu)=\\T_V(\theta_T(Ta,Tb)u+\theta_T(Ta,b)T_Vu+\theta_T(a,Tb)T_Vu+\lambda\theta_T(Ta,b)u+\\\lambda\theta_T(a,Tb)u+\lambda\theta_T(a,b)T_Vu+\lambda^2\theta_T(a,b)u)。\end{gathered}$$

因此,$(V;\ \rho_T, D_T, \theta_T, T_V)$是$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L_T,\ [\cdot,\cdot]_T,\ \{\cdot,\cdot,\cdot\}_T, T)$的一个表示。

2 罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的上同调

首先回顾 Lie-Yamaguti 代数的上同调理论[4]。

设$(V;\ \rho, D, \theta)$为 Lie-Yamaguti 代数$(L,\ [\cdot,\cdot],\ \{\cdot,\cdot,\cdot\})$的一个表示,$(n+1)$-上链空间定义为:

当$n\geqslant 1$, $C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)=\mathrm{Hom}(\overbrace{\wedge^2L\otimes\cdots\otimes\wedge^2L}^{n},V)\times\mathrm{Hom}(\overbrace{\wedge^2L\otimes\cdots\otimes\wedge^2L}^{n}\otimes L,V)$。

当$n=0$, $C_{\mathrm{LY}}^{1}(L,V)=\mathrm{Hom}(L,V)$。

当$n\geqslant 1$时,对任意$(f,g)\in C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V), K_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2L, i=1,\cdots,n+1, z\in L$, 上边缘算子$\delta^{n+1}=(\delta_{\mathrm{I}}^{n+1},\delta_{\mathrm{II}}^{n+1})$: $C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)\rightarrow C_{\mathrm{LY}}^{n+2}(L,V)$, $(f,g)\mapsto(\delta_{\mathrm{I}}^{n+1}(f,g),\delta_{\mathrm{II}}^{n+1}(f,g))$为:

$$\begin{gathered}\delta_{\mathrm{I}}^{n+1}(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1})=\\(-1)^n\Big(\rho(x_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})-\rho(y_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-g\big(K_1,\cdots,K_n,[x_{n+1},y_{n+1}]\big)\Big)+\\\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D(K_k)f(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1})+\\\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^kf(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1}),\\\delta_{\mathrm{II}}^{n+1}(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1},z)=(-1)^n(\theta(y_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-\theta(x_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1}))+\\\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}D(K_k)g(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1},z)+\\\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^kg(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1},z)+\end{gathered}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k g\Big(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1},\{x_k,y_k,z\}\Big),$$

其中符号 $\hat{K}_k$ 表示下面的 K_k 被删除。

当 $n=0$ 时，对任意 $f\in C^1_{\mathrm{LY}}(L,V)$，上边缘算子 $\delta^1=(\delta^1_{\mathrm{I}},\delta^1_{\mathrm{II}}):C^1_{\mathrm{LY}}(L,V)\to C^2_{\mathrm{LY}}(L,V)$，$f\mapsto(\delta^1_{\mathrm{I}}(f),\delta^1_{\mathrm{II}}(f))$ 为：

$$\delta^1_{\mathrm{I}}(f)(x,y)=\rho(x)f(y)-\rho(y)f(x)-f\big([x,y]\big),$$

$$\delta^1_{\mathrm{II}}(f)(x,y,z)=D(x,y)f(z)+\theta(y,z)f(x)-\theta(x,z)f(y)-f\big(\{x,y,z\}\big)。$$

Yamaguti[4] 已证明 $\delta^{n+2}\circ\delta^{n+1}=0$。因此，$(C^{\bullet}_{\mathrm{LY}}(L,V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}C^{n+1}_{\mathrm{LY}}(L,V),\delta)$ 为上链复形。

Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 的上同调群是上链复形 $C^{\bullet}_{\mathrm{LY}}(L,V)$ 的上同调群，其系数取自表示 V。对于 $p\geqslant 1$，p-上闭链群记成 $Z^p_{\mathrm{LY}}(L,V):=\{f\in C^p_{\mathrm{LY}}(L,V)|\delta^p f=0\}$；$p\geqslant 2$，$p$-上边缘链群记成 $B^p_{\mathrm{LY}}(L,V):=\{\delta^{p-1}f|f\in C^{p-1}_{\mathrm{LY}}(L,V)\}$；$p$-上同调群定义为：

$$p\geqslant 2,H^p_{\mathrm{LY}}(L,V):=\frac{Z^p_{\mathrm{LY}}(L,V)}{B^p_{\mathrm{LY}}(L,V)},H^1_{\mathrm{LY}}(L,V):=Z^1_{\mathrm{LY}}(L,V)。$$

其次，我们引入 λ 权罗-巴算子 T 的上同调。

设 $(V;\rho,D,\theta,T_V)$ 为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$ 的一个表示。由定理1，$(V;\rho_T,D_T,\theta_T,T_V)$ 为新的 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 $(L_T,[\cdot,\cdot]_T,\{\cdot,\cdot,\cdot\}_T,T)$ 的表示。下面考虑系数在 V 中 L_T 的 Lie-Yamaguti 代数上链复形

$$C^{\bullet}_{\mathrm{LY}}(L_T,V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}C^{n+1}_{\mathrm{LY}}(L_T,V)。$$

当 $n\geqslant 1$ 时，对任意 $(f,g)\in C^{n+1}_{\mathrm{LY}}(L_T,V)$，$K_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2 L_T$，$i=1,\cdots,n+1$，$z\in L_T$，上边缘算子 $\partial^{n+1}=(\partial^{n+1}_{\mathrm{I}},\partial^{n+1}_{\mathrm{II}}):C^{n+1}_{\mathrm{LY}}(L_T,V)\to C^{n+2}_{\mathrm{LY}}(L_T,V)$，$(f,g)\mapsto(\partial^{n+1}_{\mathrm{I}}(f,g),\partial^{n+1}_{\mathrm{II}}(f,g))$ 为：

$$\begin{gathered}\partial^{n+1}_{\mathrm{I}}(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1})=\\(-1)^n(\rho(Tx_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})-\rho(y_{n+1})T_V g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})+\\\lambda\rho(x_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})-\rho(Ty_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-\\\rho(y_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-\lambda\rho(y_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-g(K_1,\cdots,K_n,[x_{n+1},y_{n+1}]_T))+\\\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D(Tx_k,Ty_k)f(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1})-\\\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}T_V(D(Tx_k,y_k)f(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1})+D(x_k,Ty_k)f(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1}))-\\\lambda\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}T_V(D(x_k,y_k)f(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1}))+\\\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k f(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}_T\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\}_T,\cdots,K_{n+1}),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\partial^{n+1}_{\mathrm{II}}(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1},z)=\\(-1)^n\theta(Ty_{n+1},Tz)g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-(-1)^n T_V(\theta(Ty_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})+\\\theta(y_{n+1},Tz)g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})+\lambda\theta(y_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1}))-\\(-1)^n\theta(Tx_{n+1},Tz)g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})+(-1)^n T_V(\theta(Tx_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})+\\\theta(x_{n+1},Tz)g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})+\lambda\theta(x_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1}))+\\\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}D(Tx_k,Ty_k)g(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1},z)-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}T_V(D(Tx_k,y_k)g(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1},z)+\\D(x_k,Ty_k)g(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1},z)+\lambda D(x_k,y_k)g(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1},z))+\end{gathered}$$

$$\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k g(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}_T\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\}_T,\cdots,K_{n+1},z)+$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k g(K_1,\cdots,\hat{K}_k,\cdots,K_{n+1},\{x_k,y_k,z\}_T)。$$

当 $n=0$ 时,上边缘算子 $\partial^1=(\delta_{\mathrm{I}}^1,\delta_{\mathrm{II}}^1)$: $C_{\mathrm{LY}}^1(L,V)\to C_{\mathrm{LY}}^2(L,V)$, $f\mapsto(\partial_{\mathrm{I}}^1(f),\delta_{\mathrm{II}}^1(f))$ 为:

$$\partial_{\mathrm{I}}^1(f)(x,y)=\rho(Tx)f(y)+\rho(x)T_Vf(y)+\lambda\rho(x)f(y)-$$
$$\rho(Ty)f(x)-\rho(y)T_Vf(x)-\lambda\rho(y)f(x)-f([x,y]_T),$$
$$\partial_{\mathrm{II}}^1(f)(x,y,z)=D(Tx,Ty)f(z)-T_V(D(Tx,y)f(z)+D(x,Ty)f(z)+\lambda D(x,y)f(z))+$$
$$\theta(Ty,Tz)f(x)-T_V(\theta(Ty,z)f(x)+\theta(y,Tz)f(x)+\lambda\theta(y,z)f(x))-$$
$$\theta(Tx,Tz)f(y)+T_V(\theta(Tx,z)f(y)+\theta(x,Tz)f(y)+\lambda\theta(x,z)f(y))-f(\{x,y,z\}_T)。$$

定义6 设 $(L,[\bullet,\bullet],\{\bullet,\bullet,\bullet\},T)$ 为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数,$(V;\rho,D,\theta,T_V)$ 为它的一个表示,则上链复形 $(C_{\mathrm{LY}}^{\bullet}(L_T,V),\partial^{\bullet})$ 称为系数在 V 中 λ 权罗-巴算子 T 的上链复形,记成 $(C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{\bullet}(L,V),\partial^{\bullet})$。$(C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{\bullet}(L,V),\partial^{\bullet})$ 的上同调群记成 $H_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{\bullet}(L,V)$,称为系数在 V 中 λ 权罗-巴算子 T 的上同调群。

最后,我们联合 Lie-Yamaguti 代数和 λ 权罗-巴算子的上同调给出 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的上同调。

定义7 设 $(V;\rho,D,\theta,T_V)$ 是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\bullet,\bullet],\{\bullet,\bullet,\bullet\},T)$ 的一个表示。对任意 $(f,g)\in C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)$, $n\geqslant1$, 定义线性映射 $\Phi^{n+1}=(\Phi_{\mathrm{I}}^{n+1},\Phi_{\mathrm{II}}^{n+1})$: $C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)\to C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{n+1}(L,V)$, $(f,g)\mapsto(\Phi_{\mathrm{I}}^{n+1}(f),\Phi_{\mathrm{II}}^{n+1}(g))$ 为:

$$\Phi_{\mathrm{I}}^{n+1}(f)=f\circ(T,T,\cdots,T,T)\circ((\mathrm{Id}\wedge\mathrm{Id})^n)-$$
$$\sum_{r=0}^{2n-1}\lambda^{2n-r-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant 2n}T_V\circ f\circ(\mathrm{Id}^{i_1-1},T,\cdots,T,\mathrm{Id}^{2n-i_r})\circ((\mathrm{Id}\wedge\mathrm{Id})^n),$$
$$\Phi_{\mathrm{I}}^{n+1}(g)=g\circ(T,T,\cdots,T,T,T)\circ((\mathrm{Id}\wedge\mathrm{Id})^n\otimes\mathrm{Id})-$$
$$\sum_{r=0}^{2n}\lambda^{2n-r}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant 2n+1}T_V\circ g\circ(\mathrm{Id}^{i_1-1},T,\cdots,T,\mathrm{Id}^{2n+1-i_r})\circ((\mathrm{Id}\wedge\mathrm{Id})^n\otimes\mathrm{Id})。$$

特别地,当 $n=0$ 时,对任意 $f\in C_{\mathrm{LY}}^1(L,V)$, 映射 Φ^1: $C_{\mathrm{LY}}^1(L,V)\to C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^1(L,V)$ 为:

$$\Phi^1(f)=f\circ T-T_V\circ f。$$

下面引理的证明与文献[18]类似。

引理1 对于 $n\geqslant0$ 时,映射 Φ^{n+1}: $C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)\to C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{n+1}(L,V)$ 为上链映射,即满足 $\Phi^{n+2}\circ\delta^{n+1}=\partial^{n+1}\circ\Phi^{n+1}$。换言之,下面的图表交换

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{\mathrm{LY}}^1(L,V) & \xrightarrow{\delta^1} & C_{\mathrm{LY}}^2(L,V)\cdots\cdots & & C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V) & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)\quad\cdots\cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\Phi^1} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi^2} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi^{n+2}} \\
C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^1(L,V) & \xrightarrow[\partial^1]{} & C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^2(L,V)\cdots\cdots & & C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{n+1}(L,V) & \xrightarrow[\partial^{n+1}]{} & C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{n+1}(L,V)\quad\cdots\cdots
\end{array}$$

定义8 设 $(V;\rho,D,\theta,T_V)$ 是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\bullet,\bullet],\{\bullet,\bullet,\bullet\},T)$ 的一个表示。定义 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的 n-上链为:

$$C_{\mathrm{RBLY}^\lambda}^1(L,V):=C_{\mathrm{LY}}^1(L,V),\ C_{\mathrm{RBLY}^\lambda}^{n+1}(L,V):=C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)\oplus C_{\mathrm{RBO}^\lambda}^{n+1}(L,V),\ \forall n\geqslant1。$$

线性算子 d^{n+1}: $C_{\mathrm{RBLY}^\lambda}^{n+1}(L,V)\to C_{\mathrm{RBLY}^\lambda}^{n+2}(L,V)$ 定义为:

(i)当 $n=0$ 时,对任意 $f_1\in C_{\mathrm{RBLY}^\lambda}^1(L,V)$, $d^1(f_1)=(\delta^1(f_1),-\Phi^1(f_1))$;

(ii)当 $n=1$ 时,对任意 $((f_1,g_1),f_2)\in C_{\mathrm{RBLY}^\lambda}^2(L,V)$,

$$d^2((f_1,g_1),f_2)=(\delta^2(f_1,g_1),-\partial^1(f_2)-\Phi^2(f_1,g_1));$$

(iii)当 $n\geqslant2$ 时,对任意 $((f_1,g_1),(f_2,g_2))\in C_{\mathrm{RBLY}^\lambda}^{n+1}(L,V)$,

$$d^{n+1}((f_1,g_1),(f_2,g_2))=(\delta^{n+1}(f_1,g_1),-\partial^n(f_2,g_2)-\Phi^{n+1}(f_1,g_1))。$$

定理2 对于 $n\geqslant 0$, 上面定义线性算子 d^{n+1} 为上边缘算子, 即满足 $d^{n+2}\circ d^{n+1}=0$。因此, $C^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}C^{n+1}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)$ 是上链复形。

证明 对任意 $f_1\in C^1_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)$, 有

$$d^2\circ d^1(f_1)=d^2(\delta^1(f_1),-\Phi^1(f_1))=(\delta^2\circ\delta^1(f_1),-\partial^1(-\Phi^1(f_1))-\Phi^2\circ\delta^1(f_1))=0。$$

对任意 $((f_1,g_1),f_2)\in C^2_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)$, 有

$$d^3\circ d^2((f_1,g_1),f_2)=d^3(\delta^2(f_1,g_1),$$
$$-\partial^1(f_2)-\Phi^2(f_1,g_1))=(\delta^3\circ\delta^2(f_1,g_1),$$
$$-\partial^2(-\partial^1(f_2)-\Phi^2(f_1,g_1))-\Phi^3(\delta^2(f_1,g_1)))=(0,\partial^2\circ\Phi^2(f_1,g_1))-\Phi^3(\delta^2(f_1,g_1))=0。$$

对于 $n\geqslant 2$ 时, 对任意 $((f_1,g_1),(f_2,g_2))\in C^{n+1}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)$,

$$d^{n+2}\circ d^{n+1}((f_1,g_1),(f_2,g_2))=d^{n+2}(\delta^{n+1}(f_1,g_1),$$
$$-\partial^n(f_2,g_2)-\Phi^{n+1}(f_1,g_1))=(\delta^{n+2}\delta^{n+1}(f_1,g_1),$$
$$-\partial^{n+1}(-\partial^n(f_2,g_2)-\Phi^{n+1}(f_1,g_1))-\Phi^{n+2}(\delta^{n+1}(f_1,g_1)))=$$
$$(0,\partial^{n+1}\circ\Phi^{n+1}(f_1,g_1)-\Phi^{n+2}(\delta^{n+1}(f_1,g_1))=0。$$

因此, $(C^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V),d^{\bullet})=(\bigoplus_{n=0}^{\infty}C^{n+1}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V),d^{\bullet})$ 是上链复形。证毕。

上链复形 $C^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)$ 的上同调群记成 $H^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)$, 称为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$ 的上同调群, 其系数取自表示 $(V;\rho,D,\theta,T_V)$。

当表示 $(V;\rho,D,\theta,T_V)=(L;\mathrm{ad},\mathfrak{J},\mathfrak{R},T)$ 为伴随表示时, 简记成 $C^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L):=C^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,L)$ 与 $H^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L):=H^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,L)$, 分别称为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$ 的上链复形与上同调群, 其系数取自伴随表示。

显然, 有一个短正合上链复形序列

$$0\to C^{\bullet-1}_{\mathrm{RBO}^\lambda}(L,V)\to C^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)\to C^{\bullet}_{\mathrm{LY}}(L,V)\to 0。$$

则有长的正合上同调群序列

$$0\to H^1_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)\to H^1_{\mathrm{LY}}(L,V)\to H^1_{\mathrm{RBO}^\lambda}(L,V)\to H^2_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)\to H^2_{\mathrm{LY}}(L,V)\to\cdots$$
$$\to H^p_{\mathrm{LY}}(L,V)\to H^p_{\mathrm{RBO}^\lambda}(L,V)\to H^{p+1}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L,V)\to H^{p+1}_{\mathrm{LY}}(L,V)\to\cdots。$$

3 罗-巴 Lie-Yamaguti 代数的形式形变

设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$ 为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数, 考虑系数在 L 中 t 的幂级数空间 $L[[t]]$, 则 $L[[t]]$ 为 $K[[t]]$-模。

定义9 设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$ 为 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数, 考虑一列幂级数

$$\mu_t=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i t^i,\nu_t=\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i t^i,T_t=\sum_{i=0}^{\infty}T_i t^i,i\geqslant 1,((\mu_i,\nu_i),T_i)\in C^2_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L),$$

$((\mu_0,\nu_0),T_0)=(([\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\}),T)$, 使得 $(L[[t]],\mu_t,\nu_t,T_t)$ 是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数, 则称 (μ_t,ν_t,T_t) 是 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$ 的单参数形式形变。因此, (μ_t,ν_t,T_t) 是 λ 权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$ 的单参数形式形变当且仅当对任意 $a,b,c,u,v,w\in L$, 下列等式成立:

$$\mu_t(a,b)+\mu_t(b,a)=0, \tag{16}$$
$$\nu_t(a,b,c)+\nu_t(b,a,c)=0, \tag{17}$$
$$\mu_t(\mu_t(a,b),c)+\mu_t(\mu_t(b,c),a)+\mu_t(\mu_t(c,a),b)+\nu_t(a,b,c)+\nu_t(b,c,a)+\nu_t(c,a,b)=0, \tag{18}$$
$$\nu_t(\mu_t(a,b),c,u)+\nu_t(\mu_t(b,c),a,u)+\nu_t(\mu_t(c,a),b,u)=0, \tag{19}$$
$$\nu_t(a,b,\mu_t(u,v))=\mu_t(\nu_t(a,b,u),v)+\mu_t(u,\nu_t(a,b,v)), \tag{20}$$
$$\nu_t(a,b,\nu_t(u,v,w))=\nu_t(\nu_t(a,b,u),v,w)+\nu_t(u,\nu_t(a,b,v),w)+\nu_t(u,v,\nu_t(a,b,w)), \tag{21}$$
$$\mu_t(T_ta,T_tb)=T_t(\mu_t(T_ta,b)+\mu_t(a,T_tb)+\lambda\mu_t(a,b)), \tag{22}$$

$$\nu_t(T_ta,T_tb,T_tc)=T_t(\nu_t(T_ta,T_tb,c)+\nu_t(T_ta,b,T_tc)+\nu_t(a,T_tb,T_tc)+\lambda\nu_t(T_ta,b,c)+\lambda\nu_t(a,T_tb,c)+\lambda\nu_t({}_ta,b,Tc)+\lambda^2\nu_t(a,b,c))。\tag{23}$$

比较等式(16)—(23)两边 t^n 的系数,可得:($n=0,1,2,\cdots$)

$$\mu_n(a,b)+\mu_n(b,a)=0,\tag{24}$$

$$\nu_n(a,b,c)+\nu_n(b,a,c)=0,\tag{25}$$

$$\sum_{i+j=n}(\mu_i(\mu_j(a,b),c)+\mu_i(\mu_j(b,c),a)+\mu_i(\mu_j(c,a),b))+\nu_n(a,b,c)+\nu_n(b,c,a)+\nu_n(c,a,b)=0,\tag{26}$$

$$\sum_{i+j=n}(\nu_i(\mu_j(a,b),c,u)+\nu_i(\mu_j(b,c),a,u)+\nu_i(\mu_j(c,a),b,u))=0,\tag{27}$$

$$\sum_{i+j=n}\nu_i(a,b,\mu_j(u,v))=\sum_{i+j=n}(\mu_i(\nu_j(a,b,u),v)+\mu_i(u,\nu_j(a,b,v))),\tag{28}$$

$$\sum_{i+j=n}\nu_i(a,b,\nu_j(u,v,w))=\sum_{i+j=n}(\nu_i(\nu_j(a,b,u),v,w)+\nu_i(u,\nu_j(a,b,v),w)+\nu_i(u,v,\nu_j(a,b,w))),\tag{29}$$

$$\sum_{i+j+k=n}\mu_i(T_ja,T_kb)=\sum_{i+j+k=n}T_i(\mu_j(T_ka,b)+\mu_j(a,T_kb))+\lambda\sum_{i+j=n}T_i\mu_j(a,b),\tag{30}$$

$$\sum_{i+j+k+m=n}\nu_i(T_ja,T_kb,T_mc)=\sum_{i+j+k+m=n}T_i(\nu_j(T_ka,T_mb,c)+\nu_j(T_ka,b,T_mc)+\nu_j(a,T_kb,T_mc)+\lambda\sum_{i+j+k=n}T_i(\nu_j(T_ka,b,c)+\nu_j(a,T_kb,c)+\nu_j(a,b,T_kc))+\lambda^2\sum_{i+j=n}T_i\nu_j(a,b,c))。\tag{31}$$

定理3 设(μ_t,ν_t,T_t)是λ权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$的单参数形式形变,则$(\mu_1,\nu_1,T_1)$是上链复形$(C^{\bullet}_{\mathrm{RBLY}^{\lambda}}(L),d^{\bullet})$的一个2-上闭链。

进一步地,把2-上闭链(μ_1,ν_1,T_1)称为单参数形式形变(μ_t,ν_t,T_t)的无穷小。

证明 设(μ_t,ν_t,T_t)是λ权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$的单参数形式形变。对于$n=1$,由等式(24)—(29),可得

$$\mu_1(a,b)+\mu_1(b,a)=0,$$
$$\nu_1(a,b,c)+\nu_1(b,a,c)=0,$$
$$[\mu_1(a,b),c]+\mu_1([a,b],c)+[\mu_1(b,c),a]+\mu_1([b,c],a)+[\mu_1(c,a),b]+\mu_1([c,a],b)+\{a,b,c\}+\{b,c,a\}+\{c,a,b\}=0,$$
$$\{\mu_1(a,b),c,u\}+\nu_1([a,b],c,u)+\{\mu_1(b,c),a,u\}+\nu_1([b,c],a,u)+\{\mu_1(c,a),b,u\}+\nu_1([c,a],b,u)=0,$$
$$\{a,b,\mu_1(u,v)\}+\nu_1(a,b,[u,v])=[\nu_1(a,b,u),v]+\mu_1(\{a,b,u\},v)+[u,\nu_1(a,b,v)]+\mu_1(u,\{a,b,v\}),$$
$$\{a,b,\nu_1(u,v,w)\}+\nu_1(a,b,\{u,v,w\})=\{\nu_1(a,b,u),v,w\}+\nu_1(\{a,b,u\},v,w)+\{u,\nu_1(a,b,v),w\}+\nu_1(u,\{a,b,v\},w)+\{u,v,\nu_1(a,b,w)\}+\nu_1(u,v,\{a,b,w\})。$$

从而,$\delta^2(\mu_1,\nu_1)=0$。由等式(30)—(31),可得

$$[T_1a,b]+[Ta,T_1b]+\mu_1(Ta,Tb)=T(\mu_1(Ta,b)+[a,T_1b]+\mu_1(a,Tb)+[T_1a,b])+T_1([Ta,b]+[a,Tb])+\lambda T_1[a,b]+\lambda T\mu_1(a,b),$$
$$\{T_1a,Tb,Tc\}+\{Ta,T_1b,Tc\}+\{Ta,Tb,T_1c\}+\nu_1(Ta,Tb,Tc)=$$
$$T_1(\{Ta,Tb,c\}+\{Ta,b,Tc\}+\{a,Tb,Tc\})+T(\nu_1(Ta,Tb,c)+\nu_1(Ta,b,Tc)+\nu_1(a,Tb,Tc))+$$
$$T(\{T_1a,Tb,c\}+\{T_1a,b,Tc\}+\{a,T_1b,Tc\}+\{Ta,T_1b,c\}+\{Ta,b,T_1c\}+\{a,Tb,T_1c\})+$$
$$\lambda T_1(\{Ta,b,c\}+\{a,Tb,c\}+\{a,b,Tc\})+\lambda T(\nu_1(Ta,b,c)+\nu_1(a,Tb,c)+\nu_1(a,b,Tc))+$$
$$\lambda T(\{T_1a,b,c\}+\{a,T_1b,c\}+\{a,b,T_1c\})+\lambda^2T_1\{a,b,c\}+\lambda^2T\nu_1(a,b,c)。$$

从而,$-\partial^1(T_1)-\Phi^2(\mu_1,\nu_1)=0$,因此,$d^2((\mu_1,\nu_1),T_1)=0$。证毕。

定义10 设(μ_t,ν_t,T_t)和(μ_t',ν_t',T_t')是λ权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$的两个单参数形式形变。如果存在同构映射$\phi_t=\sum_{i=0}^{\infty}t^i\phi_i$: $L[[t]]\to L[[t]]$,$\phi_i\in\mathrm{End}(L)$,$\phi_0=\mathrm{Id}_L$使得

$$\phi_t\circ\mu_t=\mu_t'\circ(\phi_t\otimes\phi_t),\ \phi_t\circ\nu_t=\nu_t'\circ(\phi_t\otimes\phi_t\otimes\phi_t),\ \phi_t\circ T_t=T_t'\circ\phi_t,\tag{32}$$

则称(μ_t,ν_t,T_t)与(μ_t',ν_t',T_t')等价。

特别地，如果(μ_t,ν_t,T_t)与$(\mu_t'=[\cdot,\cdot],\nu_t'=\{\cdot,\cdot,\cdot\},T_t'=T)$等价，则称形变$(\mu_t,\nu_t,T_t)$为平凡的。进一步地，如果$\lambda$权罗-巴 Lie-Yamaguti 代数$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$每一个单参数形式形变都是平凡的，则称$L$为刚性的。

定理4 设(μ_t,ν_t,T_t)和(μ_t',ν_t',T_t')为两个等价单参数形式形变，则它们的无穷小属于同一个上同调类。

证明 设ϕ_t:$(L[[t]],\mu_t',\nu_t',T_t')\to(L[[t]],\mu_t,\nu_t,T_t)$为同构映射。展开等式(32)两边$t^1$的系数，可得：

$$\mu_1'-\mu_1=\mu_0\circ(\phi_1\otimes \mathrm{Id}_L)+\mu_0\circ(\mathrm{Id}_L\otimes\phi_1)-\phi_1\circ\mu_0,$$
$$\nu_1'-\nu_1=\nu_0\circ(\phi_1\otimes\mathrm{Id}_L\otimes\mathrm{Id}_L)+\nu_0\circ(\mathrm{Id}_L\otimes\mathrm{Id}_L\otimes\phi_1)+\nu_0\circ(\mathrm{Id}_L\otimes\phi_1\otimes\mathrm{Id}_L)-\phi_1\circ\nu_0,$$
$$T_1'-T_1=T\circ\phi_1-\phi_1\circ T。$$

因此，我们有$((\mu_1',\nu_1'),T_1')-((\mu_1,\nu_1),T_1)=(\delta^1(\phi_1),-\Phi^1(\phi_1))=d^1(\phi_1)\in C^{\cdot}_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L)$。证毕。

定理5 设$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$为$\lambda$权罗-巴Lie-Yamaguti代数且$H^2_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L)=0$，则$L$为刚性的。

证明 设(μ_t,ν_t,T_t)为$(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},T)$的单参数形式形变，则由定理3可知，无穷小$(\mu_1,\nu_1,T_1)$是2-上闭链。由$H^2_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L)=0$，存在$\phi_1\in C^1_{\mathrm{RBLY}^\lambda}(L)$，使得$((\mu_1,\nu_1),T_1)=d^1(\phi_1)$。即$(\mu_1,\nu_1)=\delta^1(\phi_1)=(\delta^1_{\mathrm{I}}(\phi_1),\delta^1_{\mathrm{II}}(\phi_1)),T_1=-\Phi^1(\phi_1)$。

令$\phi_t=\mathrm{Id}_L-t\phi_1$:$L[[t]]-L[[t]]$，定义

$$\mu_t'=\phi_t^{-1}\circ\mu_t\circ(\phi_t\otimes\phi_t),\nu_t'=\phi_t^{-1}\circ\nu_t\circ(\phi_t\otimes\phi_t\otimes\phi_t),T_t'=\phi_t^{-1}\circ T_t\circ\phi_t, \tag{33}$$

则(μ_t',ν_t',T_t')等价于(μ_t,ν_t,T_t)。此外，由等式(33)可得$\mu_t'=0,\nu_t'=0,T_1'=0$，即

$$\mu_t'=\mu_0+t^2\mu_2'+\cdots,\nu_t'=\nu_0+t^2\nu_2'+\cdots,T_t'=T+t^2T_2'+\cdots。$$

由等式(24)—(31)，(μ_2',ν_2',T_2')仍然是2-上闭链。重复上述论证，(μ_t,ν_t,T_t)等价于(μ_0,ν_0,T)。证毕。

参考文献：

[1] KINYON M K, WEINSTEIN A. Leibniz Algebras, Courant Algebroids, and Multiplications on Reductive Homogeneous Spaces[J]. *Am J Math*, 2001, **123**(3): 525-550. DOI: 10.1353/ajm.2001.0017.

[2] NOMIZU K. Invariant Affine Connections on Homogeneous Spaces[J]. *Am J Math*, 1954, **76**(1): 33. DOI: 10.2307/2372398.

[3] YAMAGUTI K. On the Lie Triple System and Its Generalization[J]. *Hiroshima Math J*, 1958, **21**(3): 155-160. DOI: 10.32917/hmj/1555639527.

[4] YAMAGUTI K. On Cohomology Groups of General Lie Triple Systems[J]. *Kumamoto J Sci A*, 1969, **8**: 135-146.

[5] LIN J, CHEN L Y. Quasi-derivations of Lie-yamaguti Algebras[J]. *J Algebra Appl*, 2023, **22**(5): 2350119. DOI: 10.1142/s0219498823501190.

[6] ZHANG T, LI J. Deformations and Extensions of Lie-yamaguti Algebras[J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2015, **63**(11): 2212-2231. DOI: 10.1080/03081087.2014.1000815.

[7] SHENG Y H, ZHAO J, ZHOU Y Q. Nijenhuis Operators, Product Structures and Complex Structures on Lie-Yamaguti Algebras[J]. *J Algebra Appl*, 2021, **20**(8): 2150146. DOI: 10.1142/s0219498821501462.

[8] SHENG Y H, ZHAO J. Relative *Rota*-baxter Operators and Symplectic Structures on Lie-Yamaguti Algebras[J]. *Commun Algebra*, 2022, **50**(9): 4056-4073. DOI: 10.1080/00927872.2022.2057517.

[9] TAKAHASHI N. Modules over Quandle Spaces and Representations of Lie-Yamaguti Algebras[EB/OL]. arXiv Preprint: 2010.05564, 2020. https://arxiv. org/abs/2010.05564.

[10] BAXTER G. An Analytic Problem whose Solution Follows from a Simple Algebraic Identity[J]. *Pacific J Math*, 1960, **10** :731-742. DOI:10.2140/pjm.1960.10.731.

[11] KUPERSHMIDT B A. What a Classical R-matrix Really is[J]. *J Nonlinear Math Phys*, 1999, **6**(4): 448. DOI: 10.2991/jnmp.1999.6.4.5.

[12] GUO L, KEIGHER W. Baxter Algebras and Shuffle Products[J]. *Adv Math*, 2000, **150**(1): 117-149. DOI: 10.1006/aima.1999.1858.

[13] BAI C M, BELLIER O, GUO L, *et al*. Splitting of Operations, Manin Products, and *Rota*-baxter Operators[J].

Int Math Res Notices, 2012, **2013**(3): 485-524. DOI: 10.1093/imrn/rnr266.

[14] AGUIAR M. Pre-Poisson Algebras[J]. *Lett Math Phys*, 2000, **54**(4): 263-277. DOI: 10.1023/A: 1010818119040.

[15] ZHANG T J, GAO X, GUO L. Hopf Algebras of Rooted Forests, Cocyles, and Free *Rota*-baxter Algebras[J]. *J Math Phys*, 2016, **57**(10): 101701. DOI: 10.1063/1.4963727.

[16] GONCHAROV M E, KOLESNIKOV P S. Simple Finite-dimensional Double Algebras[J]. *J Algebra*, 2018, **500**: 425-438. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2017.04.020.

[17] CONNES A, KREIMER D. Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert Problem I: The Hopf Algebra Structure of Graphs and the Main Theorem[J]. *Comm Math Phys*, 2000, **210**(1): 249-273. DOI: 10.1007/s002200050779.

[18] WANG K, ZHOU G D. Deformations and Homotopy Theory of *Rota*-baxter Algebras of any Weight[EB/OL]. arXiv Preprint: 2108.06744, 2021. https://arxiv.org/abs/2108.06744.

[19] DAS A. Cohomology of Weighted *Rota*-baxter Lie Algebras and *Rota*-baxter Paired Operators[EB/OL]. arXiv Preprint: 2109.01972, 2021. https://arxiv.org/abs/2109.01972.

[20] GUO S, QIN Y, WANG K, *et al*. Cohomology Theory of *Rota*-baxter Pre-lie Algebras of Arbitrary Weights[EB/OL]. arXiv Preprint: 2204.13518, 2022. https://arxiv.org/abs/2204.13518.

[21] GUO S J, QIN Y F, WANG K, *et al*. Deformations and Cohomology Theory of *Rota*-baxter 3-lie Algebras of Arbitrary Weights[J]. *J Geom Phys*, 2023, **183**: 104704. DOI: 10.1016/j.geomphys.2022.104704.