山西大学学报(自然科学版)47(5):901－911,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023156

一类带非齐次记忆项抛物方程解的整体存在性和爆破

王政慧,祝雪,杨晗*
(西南交通大学 数学学院,四川 成都 611756)

摘　要:该文研究一类带非齐次记忆项抛物方程的柯西问题,讨论非线性项和非齐次项对整体解存在性的影响。当非线性项指数增长高于某一值时,利用压缩映射原理,证明了整体解的存在唯一性;当非线性项指数增长低于某一值时,利用测试函数法,证明了解在有限时刻爆破。

关键词:柯西问题;压缩映射原理;测试函数法;整体解;爆破
中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)05-0901-11

Global Existence and Blow-up for a Class of Parabolic Equations with Nonhomogeneous Memory Terms

WANG Zhenghui, ZHU Xue, YANG Han*
(*School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 611756*, China*)

Abstract: The purpose of this paper is to study the Cauchy problem for a class of parabolic equations with non-homogeneous memory term. This paper investigates the influence of nonlinear and non-homogeneous terms on the existence of global solutions. When the exponential growth of the nonlinear term is higher than a certain number, the existence and uniqueness of the global solution are proved by using the contraction mapping principle. Using the test function method, this paper proves that the solution blows up in finite time when the exponential growth of the nonlinear term is lower than a certain number.

Key words: Cauchy problem; contraction mapping principle; test function method; global existence; Blow-up

0　引言

本文研究如下非线性热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=|x|^{\alpha}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\left|u(s)\right|^p \mathrm{d}s+a(t)w(x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N, \\ u(0,x)=u_0, & x\in\mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

其中$\gamma\in(0,1)$, $p>1$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $a(t)$为$(0,\infty)\to[0,\infty)$连续且局部可积的函数,$w(x)$为$\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$连续且全局可积的函数。上述模型可以用于表示生物物种理论以及诸多物理现象[1-5],如生物物种的种群密度、流体的扩散浓度、热传导现象等。$u(t,x)$表示化学反应过程中的质量密度或热传导过程中的温度,记忆项$\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\left|u(s)\right|^p \mathrm{d}s$可以描述过去一段时间内的物理现象及反应状态,具有一定的“记忆”效

收稿日期:2023-05-07;**接受日期**:2023-10-12
基金项目:国家自然科学基金(11701477;11971394)
作者简介:王政慧(1998-),女,山东威海人,硕士,研究方向为偏微分方程。E-mail:sxwzh@my.swjtu.edu.cn
* **通信作者**:杨晗(YANG Han),E-mail:hanyang95@263.net
引文格式:王政慧,祝雪,杨晗. 一类带非齐次记忆项抛物方程解的整体存在性和爆破[J]. 山西大学学报(自然科学版),2024,47(5):901-911. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023156

应。注意到记忆项具有如下性质

$$\lim_{\gamma\to 1^-}\Gamma(1-\gamma)\int_0^t(t-\tau)^{-\gamma}\left|u(\tau,\cdot)\right|^p\mathrm{d}\tau=\left|u(t,\cdot)\right|^p。$$

其中$\Gamma(1-\gamma)$表示Gamma函数,当指数$\gamma\to 1^-$时,本文所研究的非齐次记忆项抛物方程的柯西问题与非线性项为$|u|^p$的经典问题一致。

对于该模型不同非线性项的柯西问题有着大量的研究[6-10],当$\alpha=0,\gamma\to 1^-,a(t)w(x)=0$时,Fujita[11]研究了以下非线性热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=|u|^p, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^N,\end{cases}$$

并给出临界指数为$\tilde{p}=1+\dfrac{2}{N}$,证明了$p>\tilde{p}$时,小初值意义(即设$u_0(x)$在某些空间中的范数适当小)下整体解的存在性,$1<p<\tilde{p}$时解在有限时刻爆破。Kobayashi等[12]和Hayakawa[13]研究了临界$\left(p=\tilde{p}\right)$时解在有限时刻爆破。

Jleli等[14]研究了当$\alpha=0,\ a(t)=t^\sigma$时以下非线性热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=|u|^p+t^\sigma w(x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N,\\ u(0,x)=u_0, & x\in\mathbb{R}^N,\end{cases}\tag{2}$$

并给出了该问题的临界指数为$p^*=\dfrac{N-2\sigma}{N-2-2\sigma}$。利用测试函数法证明了当$1<p<p^*$时,问题(2)解在有限时刻爆破,利用压缩映射原理证明了当$p\geqslant p^*$时,小初值意义下解的整体存在性。

当$\alpha>-2$时,Majdoub[15]研究了以下非齐次非线性热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=|x|^\alpha|u|^p+a(t)w(x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N,\\ u(0,x)=u_0, & x\in\mathbb{R}^N,\end{cases}$$

其中

$$a(t)=t^\sigma\text{或}a(t)=\begin{cases}t^\sigma, & 0<t<1,\ \sigma>-1,\\ t^m, & t>1,\ m\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{3}$$

在$m\leqslant 0,\ p<\dfrac{N-2m+\alpha}{N-2m-2},\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x>0$或$m>0,\ p>1,\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x>0$的情况下,分别证明了该问题解在有限时刻爆破;并证明当$a(t)=t^\sigma(-1<\sigma<0),\ p\geqslant 1+\dfrac{2+\alpha}{N-2(\sigma+1)}$时,小初值意义下解的整体存在性。与式(3)不同的是,当$a(t)$满足

$$\mathrm{A}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t a(s)\mathrm{d}s,\ \lim_{t\to\infty}\mathrm{A}(t)=\ell,$$

Alshehri等[16]运用测试函数法分别得到了$\ell=0,\ \ell=\infty,\ \ell\in(0,\infty)$时解的爆破结论。

当$\gamma\in(0,1),\ a(t)$或$w(x)=0$时,Sun等[17]研究了以下带有记忆项的非线性高阶抛物方程的柯西问题

$$\begin{cases}u_t+(-\Delta)^n u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{-\gamma}|u|^p\mathrm{d}s, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N,\\ u(0,x)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^N,\end{cases}$$

利用半群理论证明了当$p>\max\left\{1+\dfrac{2n(2-\gamma)}{(N-2n+2n\gamma)_+},\ \dfrac{1}{\gamma}\right\}$时,该问题在小初值意义下整体解的存

在性;通过测试函数法,证明了当 $p\leqslant\max\left\{1+\frac{2n(2-\gamma)}{(N-2n+2n\gamma)_+},\frac{1}{\gamma}\right\}$ 时,该问题解在有限时刻爆破。

从上述文献可以看出,非线性的增长性对解是否整体存在和爆破有本质的影响。因此,最近一个重要的研究课题主要集中在能否找到一个临界指数,当非线性增长性大于临界指数时,相应的小初值问题存在整体解,否则解将在有限时刻爆破。由于非线性项的结构也影响着解的性质,不同的非线性项也需要不同的估计技巧。基于此,本文考虑描述带记忆项的模型(1)在 $\gamma\in(0,1)$ 时,非线性记忆项和非齐次时间空间限制项对整体解存在性的影响。利用压缩映射原理,在非线性项满足一定条件时得到整体解的存在唯一性;利用测试函数方法,证明了该问题解在一定条件下爆破。本文的难点和创新点在于:第一,在证明整体解存在的过程中,对非线性项做估计时,同时考虑 $|x|^{\alpha}$ 和记忆项 $\int_0^t(t-s)^{-\gamma}|u(s)|^p\mathrm{d}s$,需要构造合适的解的存在空间;第二,证明解的爆破结论时,用测试函数法对非线性项进行相关估计时需特别处理非线性项增长指数与 α 的关系,并构造合适的测试函数。本文内容安排如下:第1节给出符号说明,引理以及主要结论;第2节给出局部解存在唯一性的证明;第3节给出整体解存在唯一性的证明;解的爆破证明在第4节给出。

1 主要结论与符号说明

在给出主要结论之前,先介绍一些符号说明及引理。

$f\in L^1(0,T)$, $T>0$, $\beta\in(0,1)$, $f(t)$ 的左侧和右侧 β 阶分数阶 Riemann-Liouville 积分[18]定义为

$$I_{0|t}^{\beta}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{-(1-\beta)}f(s)\mathrm{d}s,\ t>0,$$

$$I_{t|T}^{\beta}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_t^T(s-t)^{-(1-\beta)}f(s)\mathrm{d}s,\ t<\mathrm{T}。$$

$f\in \mathrm{AC}^k[0,T]$, $\mathrm{AC}^k[0,T]$ 为 $[0,T]$ 上 k 阶绝对连续函数所构成的空间, $T>0$, $\beta\in(0,1)$, $f(t)$ 的左侧和右侧 β 阶分数阶 Riemann-Liouville 导数[18]定义为

$$D_{0|t}^{\beta}f(t):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{0|t}^{1-\beta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(t-s)^{-\beta}f(s)\mathrm{d}s,\ t>0,$$

$$D_{t|T}^{\beta}f(t):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{t|T}^{1-\beta}f(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^T(s-t)^{-\beta}f(s)\mathrm{d}s,\ t<T。$$

对于以上 β 阶分数阶 Riemann-Liouville 导数,有如下性质成立。

引理 1[18] $T>0$, $\beta\in(0,1)$, 当 $f=I_{t|T}^{\beta}h_1$, $k=I_{0|t}^{\beta}h_2$, $h_1\in L^q(0,T)$, $h_2\in L^p(0,T)$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant1+\beta(p,q>1)$ 时,以下分部积分成立。

$$\int_0^T f(t)D_{0|t}^{\beta}k(t)\mathrm{d}t=\int_0^T k(t)D_{t|T}^{\beta}f(t)\mathrm{d}t。$$

引理 2[18] 当 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $k\in\mathbb{N}$, $T>0$, $\beta\in(0,1)$ 时

(1)当 $f\in L^p(0,T)$ 时, $D_{0|t}^{\beta}I_{0|t}^{\beta}f(t)=f(t)$。

(2)当 $f\in \mathrm{AC}^{k+1}[0,T]$ 时, $(-1)^kD^kD_{t|T}^{\beta}f(t)=D_{t|T}^{k+\beta}f(t)$。

特别地,令

$$h(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\delta},\ t\in[0,T],\tag{4}$$

由文献[18]知,当$\delta \gg 1$时

$$D_{t|T}^{k+\beta} h(t)=\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta+1-k-\beta)} T^{-(k+\beta)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\delta-(\beta+k)}, t \in[0, T]。$$

由引理2知

$$\partial_t D_{t|T}^{1-\gamma} h(t)=-D_{t|T}^{2-\gamma} h(t),\ \gamma \in(0,1),$$

当$\delta \gg 1$时

$$D_{t|T}^{1-\gamma} h(t)=\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma[\delta+1-(1-\gamma)]} T^{-(1-\gamma)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\delta-(1-\gamma)}, t \in[0, T]。$$

此外,本文中关于Beta函数的定义为

$$B(m, n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \mathrm{d} x ; m,\ n>0。$$

下面给出本文三个主要结论。定理1给出局部解的存在唯一性,定理2给出整体解的存在唯一性,定理3则是解在有限时刻爆破。

定理1　当$2(2-\gamma) \leqslant N,\ p>1,\ \gamma \in(0,1),\ \alpha \in(-2,0)$且$\int_0^t a(\tau) \mathrm{d} \tau$和$T$足够小时,若$u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$,$w(x) \in C_0^b(\mathbb{R}^N)$,则以下结论成立,

(i) 问题(1)存在唯一局部解$u \in C\left([0, T], C_0(\mathbb{R}^N)\right)$;

(ii) 若$u_0(x),\ w(x) \in L^q(\mathbb{R}^N),\ 1 \leqslant q<\infty$,则$u \in C\left([0, T], C_0(\mathbb{R}^N)\right) \cap C\left([0, T], L^q(\mathbb{R}^N)\right)$。

定理2　假设$\max\{2,\ 2\sigma+4-2\gamma\}<N,\ \gamma \in(0,1),\ \sigma \in(-1,0),\ a(t) \leqslant t^\sigma$且$\alpha \in(-2,0)$,$w(x) \in L^q \cap L^k(\mathbb{R}^N)$,令

$$d=\frac{N(p-1)}{\alpha+4-2\gamma},\ \frac{1}{k}=\frac{\alpha+4-2\gamma}{N(p-1)}+\frac{2(\sigma+1)}{N}, \tag{5}$$

若p满足

$$p>\max\left\{\frac{1}{\gamma},\ 1+\frac{\gamma-1}{\sigma},\ 1+\frac{\alpha+4-2\gamma}{N+2\gamma-4-2\sigma}\right\}, \tag{6}$$

$u_0 \in L^d \cap L^q(\mathbb{R}^N)$,当$\|u_0\|_{L^d}$和$\|w(x)\|_{L^k}$足够小时,问题(1)存在唯一整体解$u \in C\left([0, \infty),\ L^q(\mathbb{R}^N)\right)$,其中$q$满足

$$\max\left\{\frac{\alpha+4-2\gamma}{N(p-1)}-\frac{2}{Np},\ \frac{\alpha+4-2\gamma}{N(p-1)}+\frac{2\sigma}{N}\right\}<\frac{1}{q}<\min\left\{\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{Np},\ \frac{\alpha+2}{N(p-1)}\right\}。 \tag{7}$$

注1　当$\gamma \rightarrow 1^-$,$\alpha=0$时,p的范围与文献[15]结论一致。

定理3　当$\delta>1-\gamma$时,假设

$$2\sigma+2<N<\frac{(\alpha+4-2\gamma)(\delta+\gamma-1)}{2-\gamma}+2\sigma+2,\ \int_{\mathbb{R}^N} w(x) \mathrm{d} x>0,\ a(t)=t^\sigma,\ \sigma \in(-1,0),\ \gamma \in(0,1),$$

且

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) g_R(x) \mathrm{d} x \geqslant 0, \tag{8}$$

其中

$$g_R(x)=\left(g\left(\frac{|x|^2}{R}\right)\right)^{\frac{2p}{p-1}},\ g(\tau)=\begin{cases}1, & 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \\ \text{单调递减}, & 1<\tau<2,\ 0 \leqslant g \leqslant 1,\ g \in C_0^2([0, \infty)), \\ 0, & \tau \geqslant 2\end{cases} \tag{9}$$

当$\dfrac{\delta+1}{\delta+\gamma-1}<p<1+\dfrac{\alpha+4-2\gamma}{N-2\sigma-2}$时,则问题(1)的解在有限时刻爆破。

2 局部解的存在唯一性证明

在证明局部解的存在唯一性之前,先给出一个重要引理。

引理3[15] 令$m\geqslant 0$,定义$S_m(t)\varphi=e^{t\Delta}\left(|\cdot|^{-m}\varphi\right),t>0$,"Δ"表示Laplace算子。关于算子$S_m(t)$存在如下估计:

若$N\geqslant 1, 0<m<N, 1<q_1, q_2\leqslant\infty$,当$\dfrac{1}{q_2}<\dfrac{m}{N}+\dfrac{1}{q_1}<1$时,

$$\left\|S_m(t)\varphi\right\|_{L^{q_2}}\leqslant Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{m}{2}}\left\|\varphi\right\|_{L^{q_1}},\tag{10}$$

其中$C>0$,C为与N, m, q_1和q_2相关的常数。

若$m=0$,当$1\leqslant q_1\leqslant q_2\leqslant\infty$时,上式成立。

下证局部解的存在唯一性。对$T>0$,定义Banach空间

$$X_T=\left\{u\in C\left([0,T],C_0(\mathbb{R}^N)\right);\|u\|_{L^\infty([0,T],L^\infty)}\leqslant 2\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right)\right\},$$

其范数为

$$\|u\|_{X_T}=\|u(t)\|_{L^\infty([0,T],L^\infty)},$$

定义映射

$$\Phi(u)(t)=e^{t\Delta}u_0+\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\left(|\cdot|^\alpha\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\left|u(s)\right|^p ds\right)d\tau+\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\left(a(\tau)w(x)\right)d\tau。$$

下证Φ为$X_T\mapsto X_T$的压缩映射,规定$0<T\leqslant 1$, $u\in X_T$。

当$2(2-\gamma)\leqslant N$, $\alpha\in(-2,0)$时,由引理1和引理3知

$$\left\|\Phi(u)(t)\right\|_{L^\infty}\leqslant\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{L^\infty}+\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\left(|x|^\alpha\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\left|u(s)\right|^p ds\right)d\tau\right\|_{L^\infty}+\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\left(a(\tau)w(x)\right)d\tau\right\|_{L^\infty}\leqslant$$

$$\|u_0\|_{L^\infty}+c_1 2^p\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right)^p\int_0^t(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}ds d\tau+\int_0^t a(\tau)d\tau\|w(x)\|_{L^\infty},$$

由$\alpha\in(-2,0)$, $\gamma\in(0,1)$推出

$$\left\|\Phi(u)(t)\right\|_{L^\infty}\leqslant\|u_0\|_{L^\infty}+C_1\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right)^p T^{\frac{\alpha}{2}+2-\gamma}+\|w(x)\|_{L^\infty}\int_0^t a(\tau)d\tau。$$

因为$\alpha\in(-2,0)$,所以$\dfrac{\alpha}{2}+2-\gamma>0$,当$T$和$\int_0^t a(\tau)d\tau$足够小时

$$\left\|\Phi(u)(t)\right\|_{L^\infty}\leqslant 2\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right),$$

可以得到

$$\Phi(X_T)\subset X_T。$$

利用$\left||a|^p-|b|^p\right|\leqslant C(p)|a-b|\left(|a|^{p-1}+|b|^{p-1}\right)$推出

$$\left\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\right\|_{L^\infty}\leqslant c_2\int_0^t(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\left\|\left|u(s)\right|^p-\left|v(s)\right|^p\right\|_{L^\infty}ds d\tau\leqslant$$

$$c_2 2^p\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right)^{p-1}\int_0^t(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\|u(s)-v(s)\|_{L^\infty}ds d\tau\leqslant$$

$$C_2\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right)^{p-1}T^{\frac{\alpha}{2}+2-\gamma}\|u-v\|_{X_T},$$

可以得到

$$\left\|\Phi(u)-\Phi(v)\right\|_{\mathrm{X}_T}\leqslant C\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right)^{p-1}T^{\frac{\alpha}{2}+2-\gamma}\|u-v\|_{\mathrm{X}_T}。$$

当T足够小时,由以上证明可知Φ为压缩映射,故问题(1)存在局部解

$$u\in C\left([0,T],\ C_0(\mathbb{R}^N)\right)。$$

下证(ii),定义Banach空间

$$\mathrm{X}_H=\Big\{u\in C\left([0,T],\ C_0(\mathbb{R}^N)\right)\cap C\left([0,T],\ L^q(\mathbb{R}^N)\right):$$

$$\|u\|_{L^\infty([0,T],\ L^\infty)}\leqslant 2\left(\|u_0\|_{L^\infty}+\|w(x)\|_{L^\infty}\right),\ \|u\|_{L^\infty([0,T],\ L^q)}\leqslant 2\left(\|u_0\|_{L^q}+\|w(x)\|_{L^q}\right)\Big\},$$

其范数为

$$\|u\|_{\mathrm{X}_H}=\|u(t)\|_{L^\infty([0,T],\ L^\infty)}+\|u(t)\|_{L^\infty([0,T],\ L^q)},$$

由于$\left\||u(t)|^p\right\|_{L^q}\leqslant\|u(t)\|_{L^\infty}^{p-1}\|u(t)\|_{L^q}$,利用上述方法可以证明

$$u\in C\left([0,T],\ C_0(\mathbb{R}^N)\right)\cap C\left([0,T],\ L^q(\mathbb{R}^N)\right)。$$

3 整体解的存在唯一性证明

首先定义Banach空间

$$\mathrm{X}_S=\left\{u\in L^\infty\left((0,\infty),\ L^q(\mathbb{R}^N)\right):\ \sup_{t>0}t^\beta\|u(t)\|_{L^q}\leqslant C\left(\|u_0\|_{L^d}+\|w(x)\|_{L^k}\right),\ C>0\right\},$$

其范数为

$$\|u(t)\|_{\mathrm{X}_S}=\sup_{t>0}t^\beta\|u(t)\|_{L^q},$$

定义映射

$$S(u)(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\left(|x|^\alpha\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}|u(s)|^p\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}\left(a(\tau)w(x)\right)\mathrm{d}\tau。$$

下证S为$\mathrm{X}_S\mapsto\mathrm{X}_S$的压缩映射。

命题1 当$N>2\sigma+4-2\gamma,\ \sigma\in(-1,0)$时,若式(6)成立,则

$$N+\alpha>s^*=2\sigma+\frac{p(\alpha-2\gamma+4)}{p-1}。$$

证明 记

$$\rho(s)=2\sigma p^2+p(\alpha-2\gamma+4-2\sigma)-(p-1)s,\tag{11}$$

因为$p>1$,所以$\rho(s)$为单减函数,当$s\geqslant s^*$时,$\rho(s)\leqslant\rho(s^*)=2\sigma(p-1)^2<0$,可以推出

$$2\sigma p^2+p(\alpha-2\gamma+4-2\sigma)<(N+\alpha)(p-1)。\tag{12}$$

由式(5),式(6),式(12)知

$$\max\left\{\frac{\alpha+4-2\gamma}{N(p-1)}-\frac{2}{Np},\ \frac{\alpha+4-2\gamma}{N(p-1)}+\frac{2\sigma}{N}\right\}<\frac{1}{q}<\min\left\{\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{Np},\ \frac{\alpha+2}{N(p-1)}\right\},\tag{13}$$

$$1\leqslant k<d<q。\tag{14}$$

令

$$\beta=\frac{\alpha+4-2\gamma}{2(p-1)}-\frac{N}{2q},\tag{15}$$

易证

$$0<\beta<\frac{1}{p}<1,\tag{16}$$

$$\beta=\frac{N}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{q}\right)=-\frac{N}{2q}+\frac{\alpha+4-2\gamma}{2(p-1)}=\frac{N}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{q}\right)-(\sigma+1)。\tag{17}$$

因为$u_0\in L^d(\mathbb{R}^N)$，由引理3，式(14)，式(17)知

$$\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{L^q}\leqslant c_1t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{q}\right)}\left\|u_0\right\|_{L^d}=c_1t^{-\beta}\left\|u_0\right\|_{L^d},\ t>0。\tag{18}$$

由引理3，式(5)，式(6)，式(13)，式(17)知

$$\begin{gathered}\int_0^t\left\|e^{(t-\tau)\Delta}\left(|x|^\alpha\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\left|u(s)\right|^p\mathrm{d}s\right)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\leqslant c_2\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}}\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\left\|\left|u(s)\right|^p\right\|_{L^{\frac{q}{p}}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau=\\ c_2\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}}\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}s^{-\beta p}s^{\beta p}\left\|u(s)\right\|_{L^q}^p\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant\\ c_2C^p\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right)^pt^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}+1-\gamma-\beta p}\times\\ \left(B\left(2-\gamma-\beta p,1-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}\right)B(1-\beta p,1-\gamma)\right)\leqslant C_2\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right)^pt^{-\beta},\ t>0。\end{gathered}\tag{19}$$

由引理3，式(13)，式(17)知

$$\begin{gathered}\int_0^t\left\|e^{(t-\tau)\Delta}a(\tau)w(x)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\leqslant c_3\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{q}\right)}a(\tau)\left\|w(x)\right\|_{L^k}\mathrm{d}\tau\leqslant\\ c_3\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{q}\right)}\tau^\sigma\mathrm{d}\tau\left\|w(x)\right\|_{L^k}=\\ c_3t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{q}\right)+\sigma+1}B\left(1+\sigma,1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{q}\right)\right)\left\|w(x)\right\|_{L^k}\leqslant C_3t^{-\beta}\left\|w(x)\right\|_{L^k},\ t>0。\end{gathered}\tag{20}$$

由式(18)，式(19)，式(20)知

$$t^\beta\left\|(Su)(t)\right\|_{L^q}\leqslant C_*\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right)^p+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right),t>0,$$

故存在C，使得

$$C_*\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right)^p+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right)\leqslant C\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right),\tag{21}$$

推出

$$S(\mathbf{X}_S)\subset\mathbf{X}_S。\tag{22}$$

$$\begin{gathered}\left\|S(u)-S(v)\right\|_{L^q}=\int_0^t\left\|e^{(t-\tau)\Delta}\left(|x|^\alpha\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\left(|u|^p-|v|^p\right)\mathrm{d}s\right)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\leqslant\\ c_4\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}}\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}\left\||u|^p-|v|^p\right\|_{L^{\frac{q}{p}}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau=\\ c_4\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}}\int_0^\tau(\tau-s)^{-\gamma}s^{-\beta p}s^{\beta p}\left(\left\|u\right\|_{L^q}^{p-1}+\left\|v\right\|_{L^q}^{p-1}\right)\left\|u-v\right\|_{L^q}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant\\ 2c_4C^{p-1}\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right)^{p-1}t^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}+1-\gamma-\beta p}\left\|u-v\right\|_{\mathbf{X}_S}\times\\ \left(B\left(2-\gamma-\beta p,1-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)+\frac{\alpha}{2}\right)B(1-\beta p,1-\gamma)\right)\leqslant\\ C_4\left(\left\|u_0\right\|_{L^d}+\left\|w(x)\right\|_{L^k}\right)^{p-1}t^{-\beta}\left\|u-v\right\|_{\mathbf{X}_S},\end{gathered}$$

由定理2的条件$\left\|u_0\right\|_{L^d}$和$\left\|w(x)\right\|_{L^k}$足够小知

$$\|S(u)-S(v)\|_{X_s}\leqslant c\|u-v\|_{X_s},\ c\leqslant 1。\tag{23}$$

由式(22),式(23)知,存在唯一整体解$u\in L^\infty\big((0,\infty),\ L^q\big)$。

下证$u\in C\big([0,\infty),\ L^q(\mathbb{R}^N)\big)$。当$T>0$且足够小时,取$\tilde{u}$为定理1的局部解,由定理1(ii)知$\tilde{u}\in C\big([0,T],\ C_0(\mathbb{R}^N)\big)\cap C\big([0,T],\ L^q\big)$。由于$\|\tilde{u}(t)\|_{L^q}$有界且$T$足够小,故

$$\sup_{0<t<T} t^\beta\|\tilde{u}(t)\|_{L^q}\leqslant C\Big(\|u_0\|_{L^d}+\|w(x)\|_{L^k}\Big),$$

由局部解的存在唯一性知,在$[0,T]$中$u=\tilde{u}$,推出

$$u\in C\big([0,T],\ C_0\cap L^q(\mathbb{R}^N)\big)\subset C\big([0,T],\ L^q(\mathbb{R}^N)\big)。$$

由此可得$u\in C\big([0,\infty),\ L^q(\mathbb{R}^N)\big)$。

4 解的爆破证明

现利用测试函数法证明解在有限时刻爆破。定义测试函数

$$\bar{\varphi}(x,t)=g_R(x)h(t),\ \varphi(x,t)=D_{t|T}^{1-\gamma}\big(g_R(x)h(t)\big)=D_{t|T}^{1-\gamma}\big(\bar{\varphi}(x,t)\big),$$

其中$h(t)$, $g_R(x)$与式(4),式(9)中定义一致。

由引理1和引理2知

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha\int_0^t(t-s)^{-\gamma}|u(s)|^p\mathrm{d}s\varphi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha I_{0|t}^{1-\gamma}|u|^p D_{t|T}^{1-\gamma}\bar{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha\bar{\varphi}(x,t)D_{0|t}^{1-\gamma}I_{0|t}^{1-\gamma}|u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^p\bar{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{24}$$

在方程(1)两边同乘$\varphi(x,t)$,并分别对x, t求积分,由式(24)知

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^p\bar{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}a(t)w(x)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{25}$$

由分部积分公式计算得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}u(x,T)\varphi(x,T)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^p\bar{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}a(t)w(x)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{26}$$

由$\varphi(x,t)$的定义知$\varphi(x,\ T)=0$,推出

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^p\bar{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}a(t)w(x)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x。\end{aligned}\tag{27}$$

记

$$(1)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^p\bar{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

$$(2)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}a(t)w(x)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

$$(3)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u||\Delta\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u||\Delta g_R(x)||D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

$$(4)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u||\varphi_t|\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u||g_R(x)||\partial_t D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

$$(5)=\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x。$$

由式(8),式(27)知

$$(1)+(2)\leqslant(1)+(2)+(5)\leqslant(3)+(4)。\tag{28}$$

由 Young 不等式知

$$\begin{aligned}(3)=&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u||\Delta\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}\left(|x|^{\frac{\alpha}{p}}|u|g_R(x)^{\frac{1}{p}}h(t)^{\frac{1}{p}}\right)^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\frac{\alpha}{p}}g_R(x)^{-\frac{1}{p}}h(t)^{-\frac{1}{p}}|\Delta g_R(x)||D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|\right)^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha}|u|^p g_R(x)h(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+A(T,R)=\frac{1}{2}(1)+A(T,R),\end{aligned}\tag{29}$$

其中

$$A(T,\ R)=C\int_0^T\int_{\sqrt{R}<|x|<\sqrt{2R}}|x|^{-\frac{\alpha}{p-1}}|\Delta g_R(x)|^{\frac{p}{p-1}}g_R(x)^{-\frac{1}{p-1}}h(t)^{-\frac{1}{p-1}}|D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

由引理2知,当$p>\dfrac{\delta+1}{\delta+\gamma}$时

$$\begin{aligned}&\int_0^T h(t)^{-\frac{1}{p-1}}|D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}t=\\&\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{-\delta}{p-1}}\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma\big(\delta+1-(1-\gamma)\big)}T^{-\frac{p(1-\gamma)}{p-1}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{p\delta-p(1-\gamma)}{p-1}}\mathrm{d}t=C_1T^{1-\frac{p(1-\gamma)}{p-1}},\end{aligned}$$

由文献[15]知,当$p>\max\left\{1+\dfrac{\alpha}{N},\ \dfrac{\delta+1}{\delta+\gamma}\right\}$且$|x|<\sqrt{2R}$,$R>0$时,$|\Delta g_R(x)|<cR^{-1}g_R^{1/p}(x)$,故

$$A(T,R)<CT^{1-\frac{p(1-\gamma)}{p-1}}R^{\frac{N}{2}-\frac{p}{p-1}-\frac{\alpha}{2(p-1)}}。\tag{30}$$

同理

$$\begin{aligned}(4)=&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|u||\varphi_t|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}\left(|x|^{\frac{\alpha}{p}}|u|g_R(x)^{\frac{1}{p}}h(t)^{\frac{1}{p}}\right)^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\frac{\alpha}{p}}g_R(x)^{-\frac{1}{p}}|g_R(x)|h(t)^{-\frac{1}{p}}|\partial_t D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|\right)^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha}|u|^p\bar{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+B(T,\ R)=\frac{1}{2}(1)+B(T,\ R),\end{aligned}\tag{31}$$

其中

$$B(T,\ R)=C\int_0^T\int_{|x|<\sqrt{2R}}|x|^{-\frac{\alpha}{p-1}}g_R(x)^{-\frac{1}{p-1}}|g_R(x)|^{\frac{p}{p-1}}h(t)^{-\frac{1}{p-1}}|\partial_t D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

由引理2知,当$p>\dfrac{\delta+1}{\delta+\gamma-1}$时

$$\begin{aligned}&\int_0^T h(t)^{-\frac{1}{p-1}}|\partial_t D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}t=\\&\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{-\delta}{p-1}}\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma\big(\delta+1-(2-\gamma)\big)}T^{-\frac{p(2-\gamma)}{p-1}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\frac{p\delta-p(2-\gamma)}{p-1}}\mathrm{d}t=C_2T^{1-\frac{p(2-\gamma)}{p-1}},\end{aligned}$$

当$p>\max\left\{1+\frac{\alpha}{N},\frac{\delta+1}{\delta+\gamma-1}\right\}$且$|x|<\sqrt{2R}$时

$$B(T,R)<CT^{1-\frac{p(2-\gamma)}{p-1}}R^{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2(p-1)}}。\tag{32}$$

由式(28),式(29),式(31)推出

$$(2)\leqslant A(T,R)+B(T,R)。$$

由于$w(x)\in L^1$,当$R\to\infty$时,$g_R(x)\to g(0)=1$,由勒贝格控制收敛定理知

$$\int_{\mathbb{R}^N}w(x)g_R(x)\mathrm{d}x\underset{R\to\infty}{\to}\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x>0,$$

当$R\geqslant R_0>0,\ T>0$时

$$\int_0^T a(t)D_{t|T}^{1-\gamma}h(t)\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x=$$

$$c_3T^{\gamma-1}\int_0^T t^{\sigma}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\delta-(1-\gamma)}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x=$$

$$c_3T^{\gamma+\sigma}B\left(\sigma+1,\ \delta+\gamma\right)\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x=$$

$$C_3T^{\gamma+\sigma}\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x,$$

推出

$$\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x<C\frac{A(T,\ R)+B(T,\ R)}{T^{\gamma+\sigma}}。$$

令$R=T$,由式(30),式(32)知

$$\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x<CT^{1-\frac{p(1-\gamma)}{p-1}+\frac{N}{2}-\frac{p}{p-1}-\frac{\alpha}{2(p-1)}-(\gamma+\sigma)},$$

由$\frac{\delta+1}{\delta+\gamma-1}<p<1+\frac{\alpha+4-2\gamma}{N-2\sigma-2}$知,当$T\to\infty$时,$\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x<0$,与定理3中$\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\mathrm{d}x>0$矛盾。

参考文献:

[1] HU B. Blow-up Theories for Semilinear Parabolic Equations [M]. Heidelberg: Springer, 2011.

[2] GALAKTIONOV V A, VÁZQUEZ J L. The Problem of Blow-up in Nonlinear Parabolic Equations[J]. *Discrete Continuous Dyn Syst A*, 2002, **8**(2): 399-433. DOI: 10.3934/dcds.2002.8.399.

[3] QUITTNER P, SOUPLET P. Superlinear Parabolic Problems [M]. Birkhäuser Basel: Springer Verlag, 2007. DOI:10.1007/978-3-7643-8442-5.

[4] MARTYNENKO A V, TEDEEV A F. Cauchy Problem for a Quasilinear Parabolic Equation with a Source Term and an Inhomogeneous Density[J]. *Comput Math and Math Phys*, 2007, **47**(2): 238-248. DOI: 10.1134/S096554250702008X.

[5] MARTYNENKO A V, TEDEEV A F. On the Behavior of Solutions to the Cauchy Problem for a Degenerate Parabolic Equation with Inhomogeneous Density and a Source[J]. *Comput Math and Math Phys*, 2008, **48**(7): 1145-1160. DOI: 10.1134/S0965542508070087.

[6] 闫瑞, 王静玉. 具有时空时滞的反应扩散方程行波解的稳定性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2019, **42**(3): 13-28. DOI: 10.13451/j.cnki.shanxi.univ(nat.sci.).2018.12.29.001.
YAN R, WANG J Y. Stability of Traveling Waves for a Reaction-diffusion Equation with Spatio-temporal Delays [J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2019, **42**(3): 13-28. DOI: 10.13451/j.cnki.shanxi.univ(nat.sci.).2018.12.29.001.

[7] SLIMENE B B, TAYACHI S, WEISSLER F B. Well-posedness, Global Existence and Large Time Behavior for Hardy-Hénon Parabolic Equations[J]. *Nonlinear Anal*, 2017, **152**: 116-148. DOI: 10.1016/j.na.2016.12.008.

[8] PHAN Q H. Singularity and Blow-up Estimates *via* Liouville-type Theorems for Hardy-Hénon Parabolic Equations[J]. *J Evol Equ*, 2013, **13**(2): 411-442. DOI: 10.1007/s00028-013-0185-3.

[9] PINSKY R G. Existence and Nonexistence of Global Solutions for $u_t=\Delta u+a(x)u^p$ in R^d[J]. *J Differ Equ*, 1997, **133**(1): 152-177. DOI: 10.1006/jdeq.1996.3196.

[10] CAZENAVE T, DICKSTEIN F, WEISSLER F B. An Equation Whose Fujita Critical Exponent is not Given by Scaling[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **68**(4): 862-874. DOI: 10.1016/j.na.2006.11.042.

[11] FUJITA H. On the Blowing up of Solutions of the Cauchy Problem for $u_t-\Delta u=u^{1+\alpha}$[J]. *J Fac Sci Univ Tokyo*, 1966, **13**(2): 109-124. DOI: 10.15083/00039873.

[12] KOBAYASHI K, SIRAO T, TANAKA H. On the Growing up Problem for Semilinear Heat Equations[J]. *J Math Soc Japan*, 1977, **29**(3): 407-424. DOI: 10.2969/jmsj/02930407.

[13] HAYAKAWA K. On Nonexistence of Global Solutions of some Semilinear Parabolic Differential Equations[J]. *Proc Japan Acad Ser A Math Sci*, 1973, **49**(7): 503-505. DOI: 10.3792/pja/1195519254.

[14] JLELI M, KAWAKAMI T, SAMET B. Critical Behavior for a Semilinear Parabolic Equation with Forcing Term Depending on Time and Space[J]. *J Math Anal Appl*, 2020, **486**(2): 123931. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.123931.

[15] MAJDOUB M. Well-posedness and Blow-up for an Inhomogeneous Semilinear Parabolic Equation[J]. *Differ Equ Appl*, 2021(1): 85-100. DOI: 10.7153/dea-2021-13-06.

[16] ALSHEHRI A, ALJABER N, ALTAMIMI H, *et al*. Nonexistence of Global Solutions for a Nonlinear Parabolic Equation with a Forcing Term[J]. *Opuscula Math*, 2023, **43**(6): 741-758. DOI: 10.7494/opmath.2023.43.6.741.

[17] SUN, F Q, SHI P H. Global Existence and Non-existence for a Higher-order Parabolic Equation with Time-fractional Term[J]. *Nonlinear Anal Theory Methods Appl*, 2012, **75**(10): 4145-4155. DOI: 10.1016/j.na.2012.03.005.

[18] CHEN W H, FINO A Z. A Competition on Blow-up for Semilinear Wave Equations with Scale-invariant Damping and Nonlinear Memory Term[J]. *Discrete Cont Dyn-S*, 2023, **16**(6): 1264-1285. DOI: 10.3934/dcdss.2022169.