山西大学学报(自然科学版)47(6):1127－1135,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023158

度量 G-空间中的若干 G-跟踪性

冀占江[1,2],陈占和[3*],刘海林[4]
(1.梧州学院 大数据与软件工程学院,广西 梧州 543002;
2.梧州学院 广西机器视觉与智能控制重点实验室,广西 梧州 543002;
3.广西大学 数学与信息科学学院,广西 南宁 5430004;
4.江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000)

摘　要:在度量 G-空间中研究了自映射 f 和迭代映射 f^k 在 G-跟踪性、G-极限踪性和 G-序列跟踪性上的关系,得到以下结果:(1) f 具有 G-跟踪性与 f^k 具有 G-跟踪性是等价的;(2) f 具有 G-极限跟踪性与 f^k 具有 G-极限跟踪性是等价的;(3) f 具有 G-序列跟踪性与 f^k 具有 G-序列跟踪性是等价的。这些结果推广了度量空间中自映射 f 和迭代映射 f^k 关于跟踪性、极限踪性和序列跟踪性的结论。

关键词:G-极限踪性;G-序列跟踪性;等价条件;可交换群

中图分类号:O189.11　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)06-1127-09

Several *G*-Shadowing Properties in Metric *G*-spaces

JI Zhanjiang[1,2], CHEN Zhanhe[3*], LIU Hailin[4]
(1. *School of Data Science and Software Engineering, Wuzhou University, Wuzhou* 543002, *China;*
2. *Guangxi Key Laboratory of Machine Vision and Intelligent Control, Wuzhou University, Wuzhou* 543002, *China;*
3. *School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning* 543004, *China;*
4. *School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou* 341000, *China.*)

Abstract: We studied the relations of G-shadowing property, G-limit shadowing property and G-sequence shadowing property between self-map f and iterative map f^k in metric G-spaces. Then, we drew the following conclusions: (1) it is an equivalent condition that f has the G-shadowing property and f^k has the G-shadowing property; (2) it is an equivalent condition that f has the G-limit shadowing property and f^k has the G-limit shadowing property; (3) it is an equivalent condition that f has the G-sequence shadowing property and f^k has the G-sequence shadowing property. The results improved the conclusions of shadowing property, limit shadowing property and sequence shadowing property between self-map f and iterative map f^k in metric space.

Key words: G-limit shadowing property; G-sequence shadowing property; equivalent condition; commutative group

0　引言

跟踪性是拓扑动力系统研究的重点和热点,近年来出现了各种新的跟踪性的概念,很多学者对其进行了研究。吴新星[1]给出 $\bar{d}$-跟踪性质的概念并得到了 $\bar{d}$-跟踪性质的一些等价条件;汪火云等[2]讨论了平均跟踪性和 $\underline{q}$-平均跟踪性之间的关系;Oprocha 等[3]在正密度的集合上给出跟踪

收稿日期:2023-05-23;**接受日期**:2023-10-12
基金项目:国家自然科学基金(12126415);广西自然科学基金(2020JJA110021);梧州学院校级重点项目(2020B007)
作者简介:冀占江(1985—),男,河南人,副教授,硕士,研究方向为拓扑动力系统。E-mail:1395954261@qq.com
* **通信作者**:陈占和(CHEN Zhanhe),E-mail:czhhxl@gxu.edu.cn
引文格式:冀占江,陈占和,刘海林.度量 G-空间中的若干 G-跟踪性[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(6):1127-1135. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023158

性的充分必要条件;曾鹏等[4]在离散动力系统中证明了:若f具有遍历跟踪性质,则f具有平均跟踪性质;罗晓芳[5]在离散动力系统中给出:若f具有序列集合平均跟踪性,则f是链传递和拓扑传递;孟鑫等[6]在非自治离散动力系统中证明了强跟踪性是拓扑共轭不变的;Ji[7]在度量G-空间中给出自映射f具有G-利普希茨跟踪性和移位映射σ具有G-利普希茨跟踪性是等价的;Ahmadi[8]在度量G-空间中证明了:同胚映射f具有G-跟踪性当且仅当逆映射f^{-1}具有G-跟踪性;Shan[9]在度量G-空间中指出:映射f具有G-跟踪性当且仅当诱导映射$\bar{f}$具有跟踪性;Wang等[10]在群Z^k作用下的一维系统中研究了利普希茨跟踪性的动力学性质;赵英翠[11]在超空间中指出:集值映射F具有跟踪性当且仅当迭代映射F^k具有跟踪性;顾荣宝等[12]在度量空间中证明了:自映射f具有渐近跟踪性当且仅当迭代映射f^k具有渐近跟踪性。

借鉴赵英翠[11]和顾荣宝等[12]的研究方法,我们在度量G-空间中考虑自映射f和迭代映射f^k在跟踪性上的动力学关系。度量G-空间、超空间和度量空间是完全不同的拓扑空间,在度量G-空间中研究自映射f和迭代映射f^k在跟踪性上的动力学关系,是对文献[11-12]中相关结论的补充和推广。本文在度量G-空间中选择G-跟踪性、G-极限跟踪性和G-序列跟踪性作为研究的对象,探讨它们在自映射f和迭代映射f^k之间的动力学关系,得到,(1)f具有G-跟踪性与f^k具有G-跟踪性是等价的;(2)f具有G-极限跟踪性与f^k具有G-极限跟踪性是等价的;(3)f具有G-序列跟踪性与f^k具有G-序列跟踪性是等价的。这些结果推广了度量空间自映射f和迭代映射f^k关于跟踪性、极限跟踪性和序列跟踪性的结论。

1 预备知识

为了增加文章的可读性和后续研究的方便,本节给出本文用到的主要定义和引理,具体内容如下:

定义1[13] 设(X,d)是度量空间,G是拓扑群。若映射$\varphi: G\times X\to X$满足

(1)对任意的$x\in X$,有$\varphi(e,x)=x$,其中e为G的单位元;

(2)对任意的$x\in X$以及$g_1,g_2\in G$,有$\varphi(g_1,\varphi(g_2,x))=\varphi(g_1g_2,x)$,则称$(X,G,\varphi)$是度量$G$-空间,简称$(X,d)$是度量$G$-空间。

定义2[13] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续,称f是等价映射,如果$\forall g\in G$,$\forall x\in X$,有$f(gx)=gf(x)$。

定义3[13] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续,$\delta>0$。若对任意的$i\geqslant 0$,存在$t_i\in G$使$d(t_if(x_i),x_{i+1})<\delta$,则称$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$(G,\delta)$-伪轨。

定义4[13] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续,$\varepsilon>0$,$y\in X$。若对任意的$i\geqslant 0$,存在$t_i\in G$使$d(f^i(y),t_ix_i)<\varepsilon$,则称$y(G,\varepsilon)$跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$。

定义5[13] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续。若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,对f任意的(G,δ)-伪轨$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$,$\exists y\in X$使得$y(G,\varepsilon)$跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$,则称f具有G-跟踪性。

定义6[13] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续。若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$\forall(G,\delta)$-伪轨$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$,$\exists y\in X$,$\exists\{n_i\}_{i=0}^{\infty}(n_i\geqslant 0)$满足$y(G,\varepsilon)$跟踪$\{x_{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$,则称$f$具有$G$-序列跟踪性。

定义7[14] 设(X,d)是度量G-空间。若对任意的$x,y\in X$和$g\in G$,有$d(x,y)=d(gx,gy)$,则称度量d对拓扑群G不变。

定义8[15] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续。若对任意的$i\geqslant 0$,存在$t_i\in G$使$\lim\limits_{i\to\infty}d\left[t_if(x_i),x_{i+1}\right]=0$,则称$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$G$-极限伪轨。

定义9[15] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续,$y\in X$。若对任意的$i\geqslant 0$,存在$t_i\in G$使

$\lim_{i\to\infty} d(f^i(y),t_i x_i)=0$,则称点$y$ G-极限跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$。

定义10[15] 设(X,d)是度量G-空间,$f:X\to X$连续。如果$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是f的极限伪轨,都存在$y\in X$使得y G-极限跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$,则称f具有G-极限跟踪性。

引理1[7] 设(X,d)是紧致度量G-空间,$f:X\to X$等价,G可交换且度量d对G不变,$k>0$。$\forall\varepsilon>0$,$\exists 0<\delta<\varepsilon$,若对任意的$i\geqslant 0$,$\exists g_i\in G$使得$d(g_i f(x_i),x_{i+1})<\delta$,则有

$$d(g_{i+k-1}g_{i+k-2}\cdots g_{i+1}g_i f^k(x_i),x_{i+k})<\varepsilon。$$

注 下面给出度量G-空间、等价映射和G-跟踪性的例子。

例1 取$X=\left\{0,-1,-\frac{1}{n},-1+\frac{1}{n}\middle| n\geqslant 2\right\}$,定义度量$d$:

$$d(x,y)=|x-y|,x,y\in X。$$

取拓扑群$G=Z_2=\{0,1\}$,定义群作用:

$$0\cdot x=x,1\cdot x=-1-x。$$

定义f:$X\to X$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ -\frac{1}{2}, & x=-\frac{1}{2},\\ -1, & x=-1,\\ -\frac{1}{n}, & x=-\frac{1}{n+1},n>2,\\ -1+\frac{1}{n}, & x=-1+\frac{1}{n+1},n>2。\end{cases}$$

显然(X,d)是紧致度量G-空间,$f:X\to X$是等价映射。下面证明f具有G-跟踪性。$\forall\eta>0$,取m足够大且满足$\frac{1}{m}<\eta$。取$\delta=\frac{1}{4m(m+1)}$。设$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是f的(G,δ)伪轨,则$g_i\in G$,当$i\geqslant 0$时,有

$$d(g_i f(x_i),x_{i+1})<\delta。$$

显然$\left[-1+\frac{1}{m+1},-\frac{1}{m+1}\right]\cap X$中任何两个不相同点的距离都大于$\delta$。下面我们分两种情况讨论。

情况1 若$\exists k\in N$使

$$x_k\in\left(-1+\frac{1}{m},-\frac{1}{m}\right)\cap X。$$

由$d(g_k f(x_k),x_{k+1})<\delta$知,

$$x_{k+1}=g_k f(x_k)\text{且}x_{k+1}\in\left(-1+\frac{1}{m},-\frac{1}{m}\right)\cap X。$$

以此类推当$i\geqslant k$时,有

$$x_i\in\left(-1+\frac{1}{m},-\frac{1}{m}\right)\cap X\text{且}x_{i+1}=g_i f(x_i)。$$

若$k=0$,由$f:X\to X$等价知,

$$x_i=g_i g_{i-1}\cdots g_0 f^i(x_0)。$$

若$k\geqslant 1$,同理由$d(g_{k-1}f(x_{k-1}),x_k)<\delta$知,

$$x_k=g_{k-1}f(x_{k-1})\text{且}x_{k-1}\in\left(-1+\frac{1}{m},-\frac{1}{m}\right)\cap X。$$

以此类推当$i\leqslant k$时,有

$$x_i=g_{i-1}f(x_{i-1})\text{且}x_i\in\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{m}\right)\cap X。$$

故当$i\geqslant 1$时,有$x_i=g_{i-1}f(x_{i-1})$。由$f:X\to X$等价知,仍然可以得到

$$x_i=g_ig_{i-1}\cdots g_0f^i(x_0)。$$

因此,有

$$d(g_ig_{i-1}\cdots g_0f^i(x_0),x_i)=0<\varepsilon,$$

则f具有G-跟踪性。

情况2 对任意的$i\in N$,有

$$x_i\in\left\{\left[-1,-1+\frac{1}{m}\right]\cup\left[-\frac{1}{m},0\right]\right\}\cap X。$$

当$x_i\in\left[-1,-1+\frac{1}{m}\right]\cap X$时,取

$$g_i=1。$$

当$x_i\in\left[-\frac{1}{m},0\right]\cap X$时,取

$$g_i=0。$$

因此可得

$$d(g_if^i(0),x_i)<\frac{1}{m}<\varepsilon。$$

故f具有G-跟踪性。

2 主要结论及其证明

在本节,我们给出本文的主要定理和证明过程,具体结论和证明过程如下:

定理1 设(X,d)是紧致度量G-空间,$f:X\to X$等价,度量d对G不变且G可交换,$k\geqslant 2$,则f具有G-跟踪性充分必要条件是f^k具有G-跟踪性。

证明 充分性。设映射f具有G-跟踪性,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1>0$,当$\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$是f的(G,δ_1)-伪轨时,$\exists z\in X$,$z(G,\varepsilon)$跟踪$\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$。取$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是f^k的(G,δ_1)-伪轨。记

$$y_{ki+j}=f^j(x_i),i\geqslant 0,0\leqslant j\leqslant k-1,$$

则$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$是f的(G,δ_1)-伪轨。因此$\exists y\in X$,$\forall n\geqslant 0$,$\exists g_n\in G$满足

$$d(f^n(y),g_ny_n)<\varepsilon。$$

因此对任意的$i\geqslant 0$,有

$$d(f^{ki}(y),g_{ki}y_{ki})<\varepsilon,$$

即,对任意的$i\geqslant 0$,有

$$d((f^k)^i(y),g_{ki}x_i)<\varepsilon。$$

因此f^k具有G-跟踪性。

必要性。由f一致连续性知,$\forall\eta>0$和$\forall 0\leqslant j\leqslant k-1$,$\exists 0<\delta_2<\frac{\eta}{k}$,当$d(u,v)<\delta_2$时,有

$$d(f^j(u),f^j(v))<\frac{\eta}{k}。\tag{1}$$

设f^k具有G-跟踪性,则对$\delta_2>0$,$\exists 0<\delta_3<\delta_2$,当$\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f^k$的$(G,\delta_3)$-伪轨时,$\exists z\in X$,$z(G,\delta_2)$跟踪$\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$。由引理1知,对$\delta_3>0$,$\exists 0<\delta_4<\delta_3$满足引理1的结论。设$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的

(G,δ_4)-伪轨,则对任意的$i\geqslant 0$,$\exists t_i\in G$使得

$$d(t_i f(x_i),x_{i+1})<\delta_4。\tag{2}$$

取$y_i=x_{ki}$,$i\geqslant 0$。根据引理1可得:对任意的$i\geqslant 0$,有

$$d(t_{i+k-1}t_{i+k-2}\cdots t_{i+1}t_i f^k(x_i),x_{k+i})<\delta_3。$$

故

$$d(t_{ki+k-1}t_{ki+k-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki} f^k(x_{ki}),x_{k(i+1)})<\delta_3。$$

即

$$d(t_{ki+k-1}t_{ki+k-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki} f^k(y_i),y_{i+1})<\delta_3。$$

这样$\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$是f^k的(G,δ_3)-伪轨,则$\exists y\in X$,$\forall i\geqslant 0$,$\exists p_i\in G$满足

$$d((f^k)^i(y),p_i y_i)<\delta_2,$$

即

$$d(f^{ki}(y),p_i x_{ki})<\delta_2。\tag{3}$$

根据式(1—3)和f是等价映射,可得:$\forall 0\leqslant j\leqslant k-1$,$\forall i\geqslant 0$,有

$$d(f^{ki+j}(y),p_i f^j(x_{ki}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki} f^j(x_{ki}),f^{j-1}(x_{ki+1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+1} f^{j-1}(x_{ki+1}),f^{j-2}(x_{ki+2}))<\frac{\eta}{k},$$

$$\cdots\cdots$$

$$d(t_{ki+j-2} f^2(x_{ki+j-2}),f(x_{ki+j-1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1} f(x_{ki+j-2}),x_{ki+j})<\frac{\eta}{k}。$$

由度量d对拓扑群G不变和G可交换知

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}(p_i)^{-1}f^{ki+j}(y),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^j(x_{ki}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^j(x_{ki}),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+2}t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+2}f^{j-2}(x_{ki+2}))<\frac{\eta}{k},$$

$$\cdots\cdots$$

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}f^2(x_{ki+j-2}),t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-2}),x_{ki+j})<\frac{\eta}{k}。$$

故对任意的$0\leqslant j\leqslant k-1$和$i\geqslant 0$,有

$$\begin{gathered}d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}(p_i)^{-1}f^{ki+j}(y),x_{ki+j})<\\ d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}(p_i)^{-1}f^{ki+j}(y),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^j(x_{ki}))+\\ d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+2}t_{ki}f^j(x_{ki}),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}))+\\ \cdots\cdots\\ d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}f^2(x_{ki+j-2}),t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-1}))+\\ d(t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-2}),x_{ki+j})<\frac{j+1}{k}\eta<\eta。\end{gathered}\tag{4}$$

再结合式(3)知,对任意的$i\geqslant 0$,有

$$d(f^{ki}(y),p_ix_{ki})<\eta。\tag{5}$$

由式(4)和式(5)知,对任意的$i\geqslant 0$,$\exists s_i\in G$满足

$$d(f^i(y),s_ix_i)<\eta。$$

因此f具有G-跟踪性。

定理2 设(X,d)是紧致度量G-空间,$f:X\to X$等价,度量d对群G不变,G可交换,$k\geqslant 2$,则f具有G-极限跟踪性与f^k具有G-极限跟踪性是等价的。

证明 充分性。设$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是f^k的G-极限伪轨。取

$$y_{ki+j}=f^j(x_i),i\geqslant 0,0\leqslant j\leqslant k-1。$$

易知$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$是f的G-极限伪轨,故$\exists y\in X$,$\exists g_n\in G$满足

$$\lim_{n\to\infty}d(f^n(y),g_ny_n)=0。$$

因此

$$\lim_{i\to\infty}d(f^{ki}(y),g_{ki}y_{ki})=0,$$

即

$$\lim_{i\to\infty}d((f^k)^i(y),g_{ki}x_i)=0。$$

因此f^k具有G-极限跟踪性。

必要性。由f的一致连续性知,$\forall\eta>0$和$0\leqslant j\leqslant k-1$,$\exists 0<\delta_1<\dfrac{\eta}{k}$,当$d(u,v)<\delta_1$时,有

$$d(f^j(u),f^j(v))<\frac{\eta}{k}。\tag{6}$$

由引理1知,对$\delta_1>0$,$\exists 0<\delta_2<\delta_1$满足引理1的结论。设$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$G$-极限伪轨,则存在$t_i\in G$使得

$$\lim_{i\to\infty}d(t_if(x_i),x_{i+1})=0。$$

因此对$\delta_2>0$,存在$N_1\in N^+$,当$i\geqslant N_1$时,有

$$d(t_if(x_i),x_{i+1})<\delta_2。\tag{7}$$

取

$$y_i=x_{ki},i\geqslant 0。$$

根据引理1可得

$$d(t_{i+k-1}t_{i+k-2}\cdots t_{i+1}t_if^k(x_i),x_{k+i})<\delta_1<\eta。$$

特别地,

$$d(t_{ki+k-1}t_{ki+k-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^k(x_{ki}),x_{k(i+1)})<\eta。$$

则当$i\geqslant N_1$时,有

$$d(t_{ki+k-1}t_{ki+k-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^k(y_i),y_{i+1})<\eta。$$

因此可得

$$\lim_{i\to\infty}d(t_{ki+k-1}t_{ki+k-2}\cdot t_{ki+1}t_{ki}f^k(y_i),y_{i+1})=0。$$

则$\exists y\in X$,$\exists p_i\in G$满足

$$\lim_{i\to\infty}d(f^{ki}(y),p_iy_i)=0,$$

即

$$\lim_{i\to\infty}d(f^{ki}(y),p_ix_{ki})=0。$$

故对$\delta_1>0$,存在$N_2\in N_+$,当$i\geqslant N_2$时,有

$$d((f^k)^i(y),p_ix_i)<\delta_1。\tag{8}$$

取

$$N_3=\max\{N_1,N_2\}。$$

由式(6—8)和f等价知,对任意的$0\leqslant j\leqslant k-1$和$i\geqslant N_3$,有

$$d(f^{ki+j}(y),p_i f^j(x_{ki}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki}f^j(x_{ki}),f^{j-1}(x_{ki+1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}),f^{j-2}(x_{ki+2}))<\frac{\eta}{k},$$

$$\cdots\cdots$$

$$d(t_{ki+j-2}f^2(x_{ki+j-2}),f(x_{ki+j-1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-1}),x_{ki+j})<\frac{\eta}{k}。$$

由度量d对拓扑群G不变和G可交换知,对任意的$0\leqslant j\leqslant k-1$和$i\geqslant N_3$,有

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}(p_i)^{-1}f^{ki+j}(y),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^j(x_{ki}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^j(x_{ki}),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+2}t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+2}f^{j-2}(x_{ki+2}))<\frac{\eta}{k},$$

$$\cdots\cdots$$

$$d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}f^2(x_{ki+j-2}),t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-1}))<\frac{\eta}{k},$$

$$d(t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-1}),x_{ki+j})<\frac{\eta}{k}。$$

故对任意的$0\leqslant j\leqslant k-1$和$i\geqslant N_3$,有

$$\begin{gathered}d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}(p_i)^{-1}f^{ki+j}(y),x_{ki+j})<\\ d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}(p_i)^{-1}f^{ki+j}(y),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^j(x_{ki}))+\\ d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}t_{ki}f^j(x_{ki}),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}))+\\ d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+2}t_{ki+1}f^{j-1}(x_{ki+1}),t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}\cdots t_{ki+2}f^{j-2}(x_{ki+2}))+\\ \cdots\cdots\\ d(t_{ki+j-1}t_{ki+j-2}f^2(x_{ki+j-2}),t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-1}))+d(t_{ki+j-1}f(x_{ki+j-1}),x_{ki+j})<\frac{j+1}{k}\eta<\eta。\end{gathered}\tag{9}$$

再结合式(8)知,当$i\geqslant N_3$时,有

$$d(f^{ki}(y),p_i x_{ki})<\eta。\tag{10}$$

由式(9)和式(10)知,当$i\geqslant N_3$时,$\exists s_i\in G$使得

$$d(f^i(y),s_i x_i)<\eta。$$

因此,有

$$\lim_{i\to\infty}d(f^i(y),s_i x_i)=0,$$

故f具有G-极限跟踪性。

定理3 设(X,d)是紧致度量G-空间,$f:X\to X$等价,G可交换且度量d对G不变,$k\geqslant 2$,则f具有G-序列跟踪性当且仅当f^k具有G-序列跟踪性。

证明 充分性。由f的一致连续性知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists 0<\varepsilon_k<\varepsilon_{k-1}<\varepsilon_{k-2}<\cdots<\varepsilon_2<\varepsilon_1<\varepsilon_0=\varepsilon$,$\forall 1\leqslant i\leqslant k$,当$d(u,v)<\varepsilon_i$时,有

$$d(f(u),f(v))<\frac{\varepsilon_{i-1}}{2}。 \tag{11}$$

又f具有G-序列跟踪性,则对上面的$\varepsilon_k>0$,$\exists 0<\delta_1<\frac{\varepsilon_k}{2}$满足$G$-序列跟踪性的定义。设$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f^k$的$(G,\delta_1)$-伪轨。取

$$y_{ki+j}=f^j(x_i),i\geqslant 0,0\leqslant j\leqslant k-1,$$

则$\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$是f的(G,δ_1)-伪轨,故对任意的$i\geqslant 0$,$\exists g_i\in G$使得

$$d(g_i f(y_i),y_{i+1})<\delta_1。 \tag{12}$$

因此$\exists x\in X$,$\exists$非负递增的整数列$\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$,$\exists t_i\in G$满足

$$d(f^{n_i}(x),t_i y_{n_i})<\varepsilon_k。 \tag{13}$$

取

$$n_i=km_i+k_i,0\leqslant k_i<k,i\geqslant 0。$$

根据(11)式和(13)式可得

$$d(f^{n_i+1}(x),t_i f(y_{n_i}))<\frac{\varepsilon_{k-1}}{2}。 \tag{14}$$

由(12)式知

$$d(g_{n_i} f(y_{n_i}),y_{n_i+1})<\frac{\varepsilon_{k-1}}{2}。 \tag{15}$$

由拓扑群G可交换,度量d对拓扑群G不变和(15)式知,

$$d(t_i f(y_{n_i}),t_i g_{n_i}^{-1} y_{n_i+1})<\frac{\varepsilon_{k-1}}{2}。 \tag{16}$$

由(14)式和(16)式知,

$$d(f^{n_i+1}(x),t_i g_{n_i}^{-1} y_{n_i+1})<d(f^{n_i+1}(x),t_i f(y_{n_i}))+d(t_i f(y_{n_i}),t_i g_{n_i}^{-1} y_{n_i+1})<\varepsilon_{k-1}。$$

如此继续下去,我们可以得到,对任意的$i\geqslant 0$,$\exists p_i\in G$使得

$$d(f^{n_i+k-k_i}(x),p_i y_{n_i+k-k_i})<\varepsilon_{k_i}<\varepsilon,$$

即

$$d((f^k)^{m_i+1}(x),p_i y_{k(m_i+1)})<\varepsilon,$$

故有

$$d((f^k)^{m_i+1}(x),p_i x_{m_i+1})<\varepsilon。$$

因此f^k具有G-序列跟踪性。

必要性。设f^k具有G-跟踪性,则$\forall \eta>0$,$\exists 0<\delta_2<\eta$,对f^k的任意(G,δ_2)-伪轨$\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$,$\exists z\in X$,$\exists\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$使得$z(G,\eta)$跟踪$\{z_{m_i}\}_{i=0}^{\infty}$。由引理1知,对$\delta_2>0$,$\exists 0<\delta_3<\delta_2$满足引理1的结论。设$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$(G,\delta_3)$-伪轨时,则对任意的$i\geqslant 0$,$\exists s_i\in G$使得

$$d(s_i f(x_i),x_{i+1})<\delta_3。$$

取

$$y_i=x_{ki},\ i\geqslant 0。$$

由引理1知,对任意的$i\geqslant 0$,有

$$d(s_{i+k-1}s_{i+k-2}\cdots s_{i+1}s_i f^k(x_i),x_{k+i})<\delta_2。$$

特别地,

$$d(s_{ki+k-1}s_{ki+k-2}\cdots s_{ki+1}s_{ki} f^k(x_{ki}),x_{k(i+1)})<\delta_2,$$

即

$$d(s_{ki+k-1}s_{ki+k-2}\cdots s_{ki+1}s_{ki} f^k(y_i),y_{i+1})<\delta_2,$$

因此$\exists y\in X$,$\exists\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$,$\exists l_i\in G$满足

$$d((f^k)^{m_i}(y), l_i y_{m_i}) < \eta,$$

即

$$d(f^{km_i}(y), l_i x_{km_i}) < \eta。$$

取$n_i = km_i$,则有

$$d(f^{n_i}(y), l_i x_{n_i}) < \eta。$$

因此f具有G-序列跟踪性。

3 总结

本文在度量G-空间中研究了G-跟踪性、G-极限踪性和G-序列跟踪性的动力学性质,得到:映射f和迭代映射f^k分别在G-跟踪性、G-极限踪性、G-序列跟踪性上是等价的,这些结论推广了文献[11-12]中的相关结果,为跟踪性在计算数学和生物数学的应用提供了理论基础。上述其他G-渐近平均跟踪性、G-平均跟踪性和G-遍历跟踪性的迭代不变性问题有待进一步研究。

参考文献:

[1] 吴新星. 关于d-跟踪性质的一些注记[J]. 中国科学(数学), 2015, **45**(3): 273-286. DOI: 10.1360/N012013-00171.
WU X X. Some Remarks on d-shadowing Property[J]. *Sci Sin Math*, 2015, **45**(3): 273-286. DOI: 10.1360/N012013-00171.

[2] 汪火云, 曾鹏. 平均伪轨的部分跟踪[J]. 中国科学(数学), 2016, **46**(6): 781-792. DOI: 10.1360/N012014-00256.
WANG H Y, ZENG P. Partial Shadowing of Average-pseudo-orbits[J]. *Sci Sin Math*, 2016, **46**(6): 781-792. DOI: 10.1360/N012014-00256.

[3] OPROCHA P, DASTJERDI D A, HOSSEINI M. On Partial Shadowing of Complete Pseudo-orbits[J]. *J Math Anal Appl*, 2014, **411**(1): 454-463. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.02.068.

[4] 曾鹏, 李远飞, 李志青. 平均跟踪性质的一个注记[J]. 高校应用数学学报(A辑), 2020, **35**(4): 447-454. DOI:10.13299/j.cnki.amjcu.002146.
ZENG P, LI Y F, LI Z Q. A Note on the Average-shadowing Property[J]. *Appl Math A J Chin Univ*, 2020, **35**(4): 447-454. DOI:10.13299/j.cnki.amjcu.002146.

[5] 罗晓芳. 关于拓扑动力系统跟踪性的若干研究[D]. 南昌: 南昌大学, 2019. DOI:10.27232/d.cnki.gnchu.2019.001832.
LUO X F. Some Research on the Traceability of Topological Dynamical Systems[D]. Nanchang: Nanchang University, 2019. DOI:10.27232/d.cnki.gnchu.2019.001832.

[6] 孟鑫, 刘岩. 非自治离散动力系统的强跟踪性[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2016, **37**(3): 93-96. DOI: 10.16862/j.cnki.issn1674-3873.2016.03.017.
MENG X, LIU Y. The Strongly Shadowing Property of the Nonautonomous Dynamical Systems[J]. *J Jilin Norm Univ Nat Sci Ed*, 2016, **37**(3): 93-96. DOI: 10.16862/j.cnki.issn1674-3873.2016.03.017.

[7] JI Z J. The Equivalent Condition of *G*-asymptotic Tracking Property and *G*-Lipschitz Tracking Property[J]. *Open Math*, 2022, **20**(1): 333-340. DOI: 10.1515/math-2022-0026.

[8] AHMADI S A. Invariants of Topological G-conjugacy on G-spaces[J]. *Math Morav*, 2014, **18**(1): 67-75. DOI: 10.5937/matmor1401067a.

[9] SHAH E. Devaney's Chaos for Maps on G-spaces[J]. *Taiwanese J Math*, 2018, **22**(2): 339-348. DOI: 10.11650/tjm/8168.

[10] WANG L, ZHANG J L. Lipschitz Shadowing Property for 1-dimensional Subsystems of Z^k Actions[J]. *J Math Res Appl*, 2021, **41**(6): 615-628. DOI: 10.3770/j.issn:2095-2651.2021.06.006.

[11] 赵英翠. 几种动力系统的复杂性研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2022. DOI: 10.26991/d.cnki.gdllu.2021.004020.
ZHAO Y C. Research on Complexity of Several Dynamical Systems[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2022. DOI: 10.26991/d.cnki.gdllu.2021.004020.

[12] 顾荣宝, 盛业青. 关于渐近的伪轨跟踪性质[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2003, **27**(3):1-5. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2162.2003.03.001.
GU R B, SHENG Y Q. On the Asymptotic Pseudo Orbit Tracing Property[J]. *J Anhui Univ Nat Sci*, 2003, **27**(3):1-5. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2162.2003.03.001.

[13] SHAH E, DAS T. Consequences of Shadowing Property of G-spaces[J]. *Int J Math Anal*, 2013, **7**: 579-588. DOI: 10.12988/ijma.2013.13056.

[14] CHOI T Y, KIM J H. Decomposition Theorem on G-spaces [J]. *Osaka J Math*, 2009, **46**: 87-104.

[15] JI Z J. G-expansibility and G-almost Periodic Point Under Topological Group Action[J]. *Math Probl Eng*, 2021, **2021**: 1-6. DOI: 10.1155/2021/7326623.