

## 群 $V_{8n}$ 上 Cayley 有向图的谱

徐梦修, 王维忠\*

(兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 为了刻画图的谱, 本文通过讨论群  $V_{8n} = \langle a, b: a^{2n} = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle$  ( $n$  为奇数) 的不可约表示, 借助提升有向图和 Cayley 有向图的关系并利用群的不可约表示及不可约特征标给出了  $V_{8n}$  上 Cayley 有向图的谱, 并给出了主要结论的两个实例。

**关键词:** 提升有向图; 类商矩阵; 谱; 群的表示; 群的特征标

**中图分类号:** O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-2395(2024)06-1148-07

## The Spectra of Cayley Digraphs of Group $V_{8n}$

XU Mengxiu, WANG Weizhong\*

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** In order to characterize the spectrum of a graph, in this paper we discuss the irreducible representations of group  $V_{8n} = \langle a, b: a^{2n} = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle$  ( $n$  is odd). Using the irreducible representations and irreducible characters of the  $V_{8n}$ , the spectrum of the Cayley digraph of  $V_{8n}$  is given by means of the relationship between lifted digraph and Cayley digraph, and two examples of the main results are given.

**Key words:** lifted digraph; Quotient-like matrix; spectrum; representations of groups; characters of groups

### 0 引言

群以高度的抽象性和广泛的应用性在众多自然科学领域中扮演着重要的角色。图与群的研究一直是代数图论中一个重要的研究课题。1877年 Cayley<sup>[1]</sup>为解释群的生成元和定义关系首次提出 Cayley 图的概念。因为 Cayley 图具有高度的对称性和丰富的结构性质, 所以在群与图的研究中占据重要地位, 并且在通信网络和组合设计等领域有着非常广泛的应用。图谱理论具有重要的理论意义和广泛的应用价值, 它不仅与谱几何、网络理论、组合优化等数学分

支有密切的联系, 而且在物理、化学、通信网络、信息科学等学科中有着广泛的应用。例如在计算机网络中, 将一个计算机网络抽象成图论模型, 其邻接谱半径的大小可以直接反映这个计算机网络抵抗病毒传播的能力, 也就是说: 邻接谱半径越小, 该网络抵抗病毒传播的能力就越强, 网络之间信息传递的效率就越高。因此, 确定群上 Cayley 有向图的谱的研究是有必要和有意义的。1974年 Gross<sup>[2]</sup>定义了电压有向图, 1987年 Gross 等<sup>[3]</sup>在电压有向图的基础上定义了提升有向图, 关于提升有向图的详细信息可参考文献[4-5]。2017年 Dalfó

收稿日期: 2023-07-26; 接受日期: 2023-11-13

基金项目: 国家自然科学基金(11961040); 甘肃省自然科学基金(20JR5RA418)

作者简介: 徐梦修(2000—), 男, 山东临沂人, 硕士研究生, 研究方向为代数图论。E-mail: xmx001213@163.com

\* 通信作者: 王维忠(WANG Weizhong), E-mail: wangwzh@mail.lzjtu.cn

引文格式: 徐梦修, 王维忠. 群  $V_{8n}$  上 Cayley 有向图的谱[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(6): 1148-1154. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2023163

等<sup>[6]</sup>引入类商矩阵(Quotient-like matrix)来表示提升有向图。2019年 Dalfó 等<sup>[7]</sup>运用元素为复多项式的类商矩阵的谱给出了提升有向图的谱。同年 Fiol 等<sup>[8]</sup>利用群的不可约表示刻画了提升有向图的谱。Dalfó 等<sup>[9]</sup>利用提升有向图<sup>[8]</sup>和相对提升有向图<sup>[10]</sup>给出了置换群上 Cayley 有向图(烙饼图<sup>[11]</sup>和一类新的混合图<sup>[12]</sup>)的谱,并且还给出了相应正则划分的商有向图的谱。2019年, Cheng 等<sup>[13]</sup>研究了双循环群上 Cayley 图的整性, 2022年, Cheng 等<sup>[14]</sup>给出了二面体群和双循环群上整 Cayley 图的距离幂。2023年, Wu 等<sup>[15]</sup>利用不可约表示给出了有向图的相对提升有向图的谱和特征空间。受以上研究的启发,本文首先给出了群  $V_{8n}$  的所有不可约表示,然后通过提升有向图和 Cayley 有向图的关系并利用群  $V_{8n}$  ( $n$  为奇数)的不可约表示与特征标给出它上 Cayley 有向图的谱。

## 1 预备知识

设  $\Gamma=(V, E)$  是具有顶点集  $V$  和弧集  $E$  的有向图,并且允许包含自环和重弧。 $\Gamma$  中从顶点  $u$  到  $v$  的弧记作:  $uv$ ; 一对方向相反的弧  $uv$  和  $vu$  视作一条边,记作:  $u \sim v$ 。

$n$  阶有向图  $\Gamma$  的邻接矩阵是指  $n$  阶方阵  $A(\Gamma)=(a_{uv})$ , 其中  $a_{uv}$  等于  $\Gamma$  中从顶点  $u$  到  $v$  的弧数。 $A(\Gamma)$  的特征值称为图  $\Gamma$  的特征值。图  $\Gamma$  的谱<sup>[16]</sup>是指其所有特征值连同它们的重数一起构成的多重集。设  $A(\Gamma)$  互异的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , 其重数分别为  $m_1, m_2, \dots, m_s$ , 则图  $\Gamma$  的谱记为

$$\text{sp } \Gamma = \text{sp } A = \{[\lambda_1]^{m_1}, [\lambda_2]^{m_2}, \dots, [\lambda_s]^{m_s}\}.$$

本文研究的图  $\Gamma$  为有向图。

**定义 1<sup>[2]</sup>** 设  $G$  为有限群,基础有向图  $\Gamma=(V, E)$  的电压分配为映射  $\alpha: E \rightarrow G$ , 且对于  $\Gamma$  中一对方向相反的弧  $uv, vu$  满足  $\alpha(uv)=[\alpha(vu)]^{-1}$ , 则称  $(\Gamma, \alpha)$  为电压有向图。

**定义 2<sup>[3]</sup>** 设  $G$  为有限群,  $(\Gamma, \alpha)$  为电压有向图, 则提升有向图  $\Gamma^\alpha$  是指具有顶点集  $V(\Gamma^\alpha)=V \times G$  和弧集  $E(\Gamma^\alpha)=E \times G$  的有向图, 且从顶点  $(u, g)$  到顶点  $(v, h)$  存在有向弧  $(uv, g)$  当且仅当  $uv \in E, h = \alpha(uv)g$ 。

**定义 3<sup>[17]</sup>** 设  $G$  为有限群,  $S$  是  $G$  中不含单

位元的非空子集, 则群  $G$  关于  $S$  的 Cayley 有向图  $X=\text{Cay}(G, S)$  的顶点集和弧集分别为  $V(X)=G, E(X)=\{(g, sg) | g \in G, s \in S\}$ 。

**引理 1<sup>[4]</sup>** 设  $G$  为有限群, 如果  $\Gamma=(V, E)$  是仅含一个顶点  $v$  和  $|S|$  条自环(有方向)的有向图, 且每个自环都通过满射  $\alpha$  赋值了  $S$  中的某个元素, 那么图  $\Gamma$  的提升有向图  $\Gamma^\alpha$  同构于 Cayley 有向图  $\text{Cay}(G, S)$ 。

类商矩阵<sup>[6]</sup>是一类阶数等于基础有向图顶点个数的方阵。设提升有向图的基础有向图为  $\Gamma=(V, E)$ , 在图  $\Gamma$  上的电压分配为  $\alpha$ , 则其相应的类商矩阵  $B$  的阶数由图  $\Gamma$  的顶点数所确定, 且方阵中的元素属于群代数  $\mathbb{C}[G]$ , 即

$$(B)_{uv} = \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g, \text{ 其中 } \alpha_i = \begin{cases} 1, & uv \in E \text{ 且 } \alpha(uv) = i; \\ 0, & \text{否则。} \end{cases} \quad (1)$$

**引理 2<sup>[8]</sup>** 若  $\Gamma=(V, E)$  是具有  $r$  个顶点的基础有向图, 且有一个在群  $G(|G|=n)$  中取值的电压分配  $\alpha$ 。假设群  $G$  有  $\nu$  个共轭类,  $\rho_1, \dots, \rho_\nu$  为  $G$  中维数分别为  $d_1, \dots, d_\nu$  ( $\sum_{i=1}^{\nu} d_i^2 = n$ ) 的不可约表示,  $\rho_i(B)$  是由矩阵  $\rho_i(g)$  替换类商矩阵  $B$  中的每个  $g$  而得到的复矩阵,  $\mu_{u,j}$  表示  $\rho_i(B)$  的特征值,  $u \in V, j \in [1, d_i] = \{1, 2, \dots, d_i\}$ 。那么提升有向图  $\Gamma^\alpha$  的  $m$  个特征值由  $\rho_i(B)$  的  $rd_i$  个特征值  $\mu_{u,j}$  组成, 且每个  $\mu_{u,j}$  的重数为  $d_i$ , 即

$$\text{sp } \Gamma^\alpha = \bigcup_{\rho_i \in \{\rho_1, \dots, \rho_\nu\}} d_i \cdot \text{sp}[\rho_i(B)].$$

**定义 4<sup>[18]</sup>** 设  $\Gamma=(V, E)$  是顶点集为  $V$ , 弧集为  $E$  的有向图。图  $\Gamma$  中的一条  $uv$ -途径是指由顶点组成的序列:  $u = u_0, u_1, \dots, u_r = v$ , 其中  $u_{i-1}u_i \in E, 1 \leq i \leq r$ 。顶点  $u, v$  分别称为此途径的起点和终点。终点与起点相同的途径称为闭途径。

设  $\chi_i$  为群  $G$  的不可约特征标, 记  $P_\ell$  为电压有向图  $(\Gamma, \alpha)$  中长度为  $\ell \geq 1$  的闭途径构成的集合, 若  $p \in P_\ell, p: u_0, u_1, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell (= u_0)$ , 令

$$\chi_i(p) = \chi_i \left( \prod_{j=0}^{\ell-1} \alpha(u_j u_{j+1}) \right).$$

**引理 3<sup>[8]</sup>** 若  $\Gamma=(V, E)$  是具有  $r$  个顶点的基础有向图, 且有一个在群  $G(|G|=n)$  中取值的电压分配  $\alpha$ 。假设群  $G$  有  $\nu$  个共轭类,  $\rho_1, \dots, \rho_\nu$  为  $G$

中维数分别为  $d_1, \dots, d_\nu$  ( $\sum_{i=1}^\nu d_i^2 = n$ ) 的不可约表示, 则对于每个  $i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ , 提升有向图  $\Gamma^a$  的特征值  $\lambda_{u,j} (u \in V, j \in [1, d_i] = \{1, 2, \dots, d_i\})$  是以下方程组的解, 且  $\lambda_{u,j}$  的重数为  $d_i$ ,

$$\sum_{u \in V} \lambda_{u,j}^\ell = \sum_{\rho \in P_i} \chi_i(\rho), \ell = 1, \dots, rd_{i_0}$$

$$j \in \{1, 2, \dots, d_i\}$$

**引理 4**<sup>[19]</sup> 设  $G$  是一个有限群,  $\rho: G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  是  $G$  的一个表示. 若存在元素  $g, h \in G$  使  $g\rho \cdot h\rho \neq h\rho \cdot g\rho$  成立, 则  $\rho$  是不可约表示.

## 2 主要结论

本节首先讨论了群  $V_{8n}$  ( $n$  为奇数) 的不可约表示, 然后借助提升有向图和 Cayley 有向图的关系并利用群的不可约表示和不可约特征标给出了群  $V_{8n}$  上 Cayley 有向图的谱, 最后, 给出了主要结论应用的两个实例.

### 2.1 群 $V_{8n}$ 的不可约表示

**引理 5** 设群

$G = C_2 \times C_2 = \{(1, 1), (x, 1), (1, y), (x, y)\}$ , 其中  $x^2 = y^2 = 1$ , 则群  $C_2 \times C_2$  的不可约表示为

$$g\rho_{\lambda_1, \lambda_2} = (x^i, y^j)\rho_{\lambda_1, \lambda_2} = (\lambda_1^i \lambda_2^j),$$

对于  $\forall g = (x^i, y^j) \in G, 0 \leq i, j \leq 1, \lambda_1, \lambda_2$  均为二次单位根.

**证明** 由文献[19]知群  $C_2 \times C_2$  共有  $|G| = |C_2 \times C_2| = 4$  个次数为 1 的不可约表示  $\rho = \rho_{\lambda_1, \lambda_2}$ , 且  $\lambda_1, \lambda_2$  均为二次单位根, 故  $\lambda_1, \lambda_2$  的取值为  $\pm 1$ . 对  $\forall g \in C_2 \times C_2$ , 有  $g = (x^i, y^j), 0 \leq i, j \leq 1$ , 则

$$g\rho_{\lambda_1, \lambda_2} = (x^i, y^j)\rho_{\lambda_1, \lambda_2} = (\lambda_1^i \lambda_2^j).$$

并且,

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  时, 有

$$(x^i, y^j)\rho_{1 \times 1} = (1^i \times 1^j) = (1);$$

当  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$  时, 有

$$(x^i, y^j)\rho_{1 \times (-1)} = (1^i \times (-1)^j) = ((-1)^j);$$

当  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$  时, 有

$$(x^i, y^j)\rho_{(-1) \times 1} = ((-1)^i \times 1^j) = ((-1)^i);$$

当  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$  时, 有

$$(x^i, y^j)\rho_{(-1) \times (-1)} = ((-1)^i \times (-1)^j) = ((-1)^{i+j}).$$

**定理 1** 设群  $V_{8n} = \langle a, b; a^{2n} = b^4 = 1, ba =$

$a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle$  ( $n$  为奇数), 则  $V_{8n}$  共有  $2n + 3$  个不可约表示, 其分为

$$(1) \rho_k: a^i b^j \rightarrow \begin{pmatrix} \left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right)^k & 0 \\ 0 & -\left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right)^{-k} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^j,$$

$0 \leq k \leq n - 1;$

$$(2) \rho'_{k'}: a^i b^j \rightarrow \begin{pmatrix} \left(e^{\frac{\pi}{n}}\right)^{k'} & 0 \\ 0 & \left(e^{\frac{\pi}{n}}\right)^{-k'} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j, 1 \leq$$

$k' \leq n - 1;$

(3)  $\rho''_{k', s}$  如下表 1 所示 ( $0 \leq r \leq n - 1, 1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}, m = 1, 3$ ).

**证明** (1) 设  $\varepsilon$  是复数域  $\mathbb{C}$  中的  $n$  次单位根, 定义矩阵  $A$  和  $B$  为

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

经过验证可知

$$A^{2n} = B^4 = I_2, BA = A^{-1}B^{-1}, B^{-1}A = A^{-1}B.$$

定义函数  $\rho: V_{8n} \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  为

$$\rho: a^i b^j \rightarrow A^i B^j, 0 \leq i \leq 2n - 1, 0 \leq j \leq 3.$$

设群  $V_{8n}$  中的任意两个元素为  $a^r b^s$  和  $a^t b^u$ , 其中  $0 \leq r, t \leq 2n - 1, 0 \leq s, u \leq 3$ . 利用关系式  $a^{2n} = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b$ , 有

$$a^r b^s a^t b^u = a^i b^j, 0 \leq i \leq 2n - 1, 0 \leq j \leq 1.$$

同理, 利用关系式

$$A^{2n} = B^4 = I_2, BA = A^{-1}B^{-1}, B^{-1}A = A^{-1}B,$$

有

$$A^r B^s A^t B^u = A^i B^j, 0 \leq i \leq 2n - 1, 0 \leq j \leq 1.$$

于是

$$(a^r b^s a^t b^u)\rho = (a^i b^j)\rho = A^i B^j = A^r B^s A^t B^u = (a^r b^s)\rho \cdot (a^t b^u)\rho,$$

则函数  $\rho$  为同态映射, 即映射  $\rho: V_{8n} \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  是  $V_{8n}$  在  $\mathbb{C}$  上次数为 2 的表示.

又因  $\varepsilon$  为  $n$  次单位根, 则  $\varepsilon = \left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right)^k$ , 其中  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . 由引理 4 知, 当  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  时, 映射  $\rho_k$  是  $V_{8n}$  在  $\mathbb{C}$  上的不

可约表示。又  $g\rho_i$  与  $g\rho_j$  ( $0 \leq i, j \leq n-1$ ) 的特征值不同,故任意两个不可约表示均不等价,即得  $V_{8n}$  在  $\mathbb{C}$  上  $n$  个不可约表示  $\rho_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ 。

(2) 设  $\eta$  是复数域  $\mathbb{C}$  中的  $2n$  次单位根,定义矩阵  $A'$  和  $B'$  为

$$A' = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

经过验证可知

$$A'^{2n} = B'^4 = I_2, B'A' = A'^{-1}B'^{-1}, B'^{-1}A' = A'^{-1}B'.$$

定义函数  $\rho': V_{8n} \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  为

$$\rho': a^i b^j \rightarrow A'^i B'^j, 0 \leq i \leq 2n-1, 0 \leq j \leq 3.$$

同理可得:函数  $\rho'$  为同态映射,即映射  $\rho': V_{8n} \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  是  $V_{8n}$  在  $\mathbb{C}$  上次数为 2 的表示。

又因  $\eta$  为  $2n$  次单位根,则  $\eta = \left(e^{\frac{2\pi i}{2n}}\right)^{k'} = \left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{k'}$ , 其中  $k' = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ 。由引理 4 知,当  $k' = 1, 2, \dots, n-1$  时,映射  $\rho'$  是  $V_{8n}$  在  $\mathbb{C}$  上的不可约表示且  $g\rho'_i$  与  $g\rho'_j$  ( $1 \leq i, j \leq n-1$ ) 的特征值不同,即得  $V_{8n}$  在  $\mathbb{C}$  上  $n-1$  个互不等价不可约表示  $\rho'_k$ ,  $1 \leq k' \leq n-1$ 。

对于  $b^2 \in V_{8n}$  经过上述不可约表示作用可得

$$(b^2)\rho_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (b^2)\rho'_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中  $0 \leq k \leq n-1, 1 \leq k' \leq n-1$ 。故不存在可逆矩阵  $T$  使  $(b^2)\rho_k = T^{-1}(b^2)\rho'_k T$  成立,即不可约表示  $\rho_k$  与  $\rho'_k$  互不等价。

(3) 因为群  $V_{8n}$  的导群  $V'_{8n} = \langle a^2, b^2 \rangle$ , 所以  $|V_{8n}/V'_{8n}| = \frac{8n}{2n} = 4$ , 故  $V_{8n}$  有 4 个次数为 1 的不可约表示。

因为  $n$  是奇数,故  $a^n \langle a^2, b^2 \rangle = a \langle a^2, b^2 \rangle$ , 当  $0 \leq r \leq n-1, 1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}$  时,有

$$\begin{aligned} V_{8n}/V'_{8n} = & \{ \langle a^2, b^2 \rangle, b^2 \langle a^2, b^2 \rangle, a^{2r+1} \langle a^2, b^2 \rangle, \\ & a^{2s} \langle a^2, b^2 \rangle, a^{2s} b^2 \langle a^2, b^2 \rangle, b \langle a^2, b^2 \rangle, ab \langle a^2, b^2 \rangle \} = \\ & \{ \langle a^2, b^2 \rangle, a \langle a^2, b^2 \rangle, b \langle a^2, b^2 \rangle, ab \langle a^2, b^2 \rangle \} \cong \\ & C_2 \times C_2 = \{ (1, 1), (x, 1), (1, y), (x, y) \}, \end{aligned}$$

其中  $x^2 = y^2 = 1$ 。由引理 5 可得  $V_{8n}$  的 4 个次数为 1 的不可约表示,分别记为  $\rho''_1, \rho''_2, \rho''_3, \rho''_4$ , 如表 1 所示,其中  $0 \leq r \leq n-1, 1 \leq s \leq \frac{n-1}{2}, m = 1, 3$ 。

已得不可约表示的次数的平方和为  $n \cdot 2^2 +$

$(n-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^2 = 8n = |V_{8n}|$ , 故  $V_{8n}$  ( $n$  为奇数) 的  $2n+3$  个不可约表示全部给出。综上得证。

表 1 群  $V_{8n}$  ( $g_i \in V_{8n}$ ) 中次数为 1 的不可约表示  $\rho''_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ )

Table 1 Irreducible representations  $\rho''_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) of degree 1 in group  $V_{8n}$  ( $g_i \in V_{8n}$ )

$g_i$	1	$b^2$	$a^{2r+1},$ $a^{-2r-1}b^2$	$a^{2s},$ $a^{-2s}$	$a^{2s}b^2,$ $a^{-2s}b^2$	$a^j b^m$ ( $j$ 为偶数)	$a^j b^m$ ( $j$ 为奇数)
$\rho''_1$	1	1	1	1	1	1	1
$\rho''_2$	1	1	1	1	1	-1	-1
$\rho''_3$	1	1	-1	1	1	1	-1
$\rho''_4$	1	1	-1	1	1	-1	1

## 2.2 群 $V_{8n}$ 上 Cayley 有向图的谱

定理 2 设群

$$V_{8n} = \langle a, b; a^{2n} = b^4 = 1,$$

$$ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle ([n] \text{ 为奇数}),$$

$S$  为  $V_{8n}$  中不含单位元的非空子集;令  $\Gamma$  为仅含一个顶点和  $|S|$  条自环(有方向)的基础有向图,且  $\Gamma$  的电压分配为满射  $\alpha: E \rightarrow S; \rho_i$  为  $V_{8n}$  中维数为  $d_i$  的不可约表示,且  $\chi_i$  为其对应的不可约特征标,  $i = 1, 2, \dots, 2n+3$ 。则

$$(1) \text{spCay}(V_{8n}, S) = \bigcup_{\rho_i \in \text{Irep}(V_{8n})} d_i \cdot \text{sp}[\rho_i(B)];$$

(2) 对于每个  $i \in \{1, 2, \dots, 2n+3\}$ ,  $\text{Cay}(G, S)$  的特征值  $\lambda_j$  ( $j \in [1, d_i] = \{1, 2, \dots, d_i\}$ ) 是以下方程组的解,且  $\lambda_j$  的重数为  $d_i$ ,

$$\sum_{j \in \{1, 2, \dots, d_i\}} \lambda_j^\ell = \sum_{p \in P_i} \chi_i(p), \ell = 1, \dots, d_i,$$

$$\text{其中 } \chi_i(p) = \chi_i \left[ \prod_{j=0}^{\ell-1} \alpha(u_j u_{j+1}) \right].$$

证明 (1) 假设  $\Gamma$  为仅含一个顶点和  $|S|$  条自环的基础有向图;  $\Gamma$  的电压分配为满射  $\alpha: E \rightarrow S$ ,  $S$  为群  $V_{8n}$  中不含单位元的非空子集,并且  $V_{8n}$  ( $n$  为奇数) 的  $2n+3$  个不可约表示已由定理 1 给出,则由引理 2 利用不可约表示可得对应提升有向图  $\Gamma^\alpha$  的谱为

$$\text{sp}\Gamma^\alpha = \bigcup_{\rho_i \in \{\rho_1, \dots, \rho_{2n+3}\}} d_i \cdot \text{sp}[\rho_i(B)],$$

又因提升有向图  $\Gamma^\alpha$  同构于 Cayley 有向图  $\text{Cay}(V_{8n}, S)$ , 故

$$\text{spCay}(V_{8n}, S) = \text{sp}\Gamma^\alpha = \bigcup_{\rho_i \in \text{Irep}(V_{8n})} d_i \cdot \text{sp}[\rho_i(B)].$$

(2) 因为  $\chi_i = \text{tr}(g\rho_i)$ , 由定理 1 可得群  $V_{8n}$  ( $n$  为奇数) 的  $2n+3$  个不可约特征标。又已知

基础有向图  $(\Gamma, \alpha)$  只有一个顶点, 即  $r = 1$ , 又因提升有向图  $\Gamma^\alpha$  同构于 Cayley 有向图  $\text{Cay}(V_{8n}, S)$ , 则由引理 3 可得, 对于每个  $i \in \{1, 2, \dots, 2n + 3\}$ ,  $\text{Cay}(G, S)$  的特征值  $\lambda_j (j \in [1, d_i] = \{1, 2, \dots, d_i\})$  是以下方程组的解, 且  $\lambda_j$  的重数为  $d_i$ ,

$$\sum_{j \in \{1, 2, \dots, d_i\}} \lambda_j^\ell = \sum_{p \in P_i} \chi_i(p), \ell = 1, \dots, d_i$$

下面给出定理 2 应用的两个实例。

**例 1** 设  $G$  为群  $V_8 = \langle a, b: a^2 = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle, S = \{a, b\}$ , 则  $\text{spCay}(V_8, S) = \{-2\}, [0]^6, [2]\}$ 。

**证明** 由定理 2(1),  $\Gamma$  为仅有一个顶点  $v$  和  $|S| = 2$  条自环(有方向)的基础有向图, 其中电压分配为满射  $\alpha: E \rightarrow S$ , 则有顶点集为

$$V \times G = \{v\} \times \{V_8\} = \{(v, 1), (v, a), (v, b), (v, b^2), (v, b^3), (v, ab), (v, ab^2), (v, ab^3)\}.$$

弧集为  $E \times G = \{vw, \tau v\} \times \{V_8\}$  的提升有向图  $\Gamma^\alpha$ , 如图 1 所示。

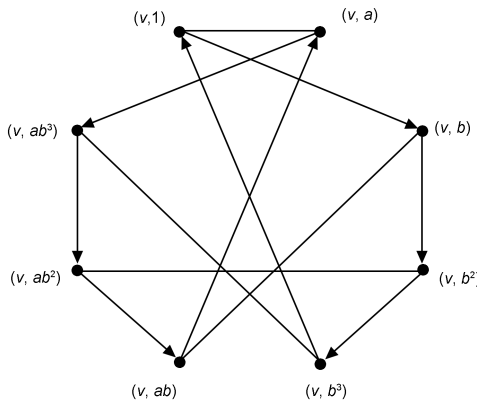


图 1 基础有向图  $\Gamma$  和电压分配  $\alpha$  对应的提升有向图  $\Gamma^\alpha$   
注: 一对方向相反的弧用实线表示。

Fig. 1 Lifted digraph  $\Gamma^\alpha$  corresponding to the base digraph  $\Gamma$  and voltage assignment  $\alpha$

因为  $n = 1$ , 则由定理 1 可知群  $V_8$  对应的 5 个不可约表示, 不妨设为  $\rho_1, \dots, \rho_5$ , 其中  $\rho_1$  是次数为 2 的不可约表示

$$\rho_1: a^i b^j \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^j,$$

$\rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$  为次数为 1 的不可约表示, 如表 2 所示。

由 (1) 式可得类商矩阵  $B = (a + b)$ , 可得表 3。

由定理 2(1) 得

表 2 群  $V_8 (g_i \in V_8)$  中次数为 1 的不可约表示  $\rho_i (2 \leq i \leq 5)$   
Table 2 Irreducible representations  $\rho_i (2 \leq i \leq 5)$  of degree 1 in group  $V_8 (g_i \in V_8)$

$g_i$	1	$b^2$	$a, ab^2$	$b, b^3$	$ab, ab^3$
$\rho_2$	1	1	1	1	1
$\rho_3$	1	1	1	-1	-1
$\rho_4$	1	1	-1	1	-1
$\rho_5$	1	1	-1	-1	1

表 3 矩阵  $\rho_k(B)$  及其谱

Table 3 Matrix  $\rho_k(B)$  and its spectrum

$\rho_k$	$d_{\rho_k}$	$\rho_k(B)$	$\text{sp}[\rho_k(B)]$
$\rho_1$	2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\{[0]^2\}$
$\rho_2$	1	(2)	$\{[2]\}$
$\rho_3$	1	(0)	$\{[0]\}$
$\rho_4$	1	(0)	$\{[0]\}$
$\rho_5$	1	(-2)	$\{[-2]\}$

注:  $\rho_i (1 \leq i \leq 5)$  为群  $V_{8n}$  中维数为  $d_{\rho_i}$  的不可约表示,  $\text{sp}[\rho_k(B)]$  为矩阵  $\rho_k(B)$  对应的谱。

$$\text{spCay}(V_8, S) = \bigcup_{\rho_i \in \text{Irep}(V_8)} d_{\rho_i} \cdot \text{sp}[\rho_i(B)] = \{-2\}, [0]^6, [2]\}.$$

为了叙述方便, 若闭途径  $p: u_1, u_2, u_1$  及对应弧的电压分配为  $\alpha(u_1 u_2) = a^2, \alpha(u_2 u_1) = b^2$ , 则记为

$$p: u_1 \xrightarrow{a^2} u_2 \xrightarrow{b^2} u_1.$$

**例 2** 设  $G$  为群  $V_{24} = \langle a, b: a^6 = b^4 = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle, S = \{a^2, b^2\}$ , 则

$$\text{spCay}(V_{24}, S) = \left\{ \left[ \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2} \right]^4, \left[ \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \right]^4, \left[ \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right]^4, \left[ \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right]^4, [0]^4, [2]^4 \right\}.$$

**证明** 由定理 2(2),  $\Gamma$  为仅有一个顶点  $u$  和  $|S| = 2$  条自环(有方向)的基础有向图, 每条自环通过满射  $\alpha: E \rightarrow S$  赋值了  $S$  中的某个元素, 如图 2 所示。

由电压有向图(图 2, 右)可得, 长度  $\ell = 1$  的闭途径  $P_{\ell=1} = \{p_1, p_2\}$ , 长度  $\ell = 2$  的闭途径  $P_{\ell=2} = \{p_3, p_4, p_5, p_6\}$ , 其中

$$p_1: u \xrightarrow{a^2} u; p_2: u \xrightarrow{b^2} u; p_3: u \xrightarrow{a^2} u \xrightarrow{b^2} u; p_4: u \xrightarrow{b^2} u \xrightarrow{a^2} u; p_5: u \xrightarrow{a^2} u \xrightarrow{a^2} u; p_6: u \xrightarrow{b^2} u \xrightarrow{b^2} u;$$

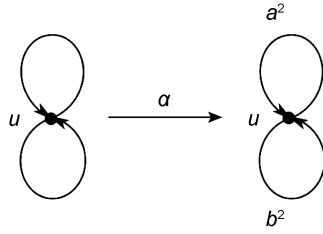


图2 基础有向图  $\Gamma=(V, E)$  和电压有向图  $(\Gamma, \alpha)$

Fig. 2 The base digraph  $\Gamma=(V, E)$  and the voltage digraph  $(\Gamma, \alpha)$

$$\rho_6: u \xrightarrow{b^2} u \xrightarrow{b^2} u.$$

由定理 1 得  $V_{24}$  有 9 个不可约表示, 不妨设为  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_9$ , 其中  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$  是次数为 2 的不可约表示

$$\begin{aligned} \rho_1: a^i b^j &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^j; \\ \rho_2: a^i b^j &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^j; \\ \rho_3: a^i b^j &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^j; \\ \rho_4: a^i b^j &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j; \\ \rho_5: a^i b^j &\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^j. \end{aligned}$$

$\rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_9$  是次数为 1 的不可约表示, 如表 4 所示。

由定理 2(2), 可分为以下 9 种情况。

表 4 群  $V_{24}(g_i \in V_{24})$  中次数为 1 的不可约表示  $\rho_k(6 \leq k \leq 9)$

Table 4 Irreducible representations  $\rho_k(6 \leq k \leq 9)$  of degree 1 in group  $V_{24}(g_i \in V_{24})$

	$a^i b^j$	$a^u b^v$	$a^s b^t$	$a^m b^n$
$g_i$	$i=0, 2, 4;$ $j=0, 2$	$u=1, 3, 5;$ $v=0, 2$	$s=0, 2, 4;$ $t=1, 3$	$m=1, 3, 5;$ $n=1, 3$
$\rho_6$	1	1	1	1
$\rho_7$	1	1	-1	-1
$\rho_8$	1	-1	1	-1
$\rho_9$	1	-1	-1	1

(1)  $i=1, d_1=2, \ell=1, 2$ 。  
 $\lambda_1 + \lambda_2 = \chi_1(p_1) + \chi_1(p_2) = \chi_1[\alpha(uu)] + \chi_1[\alpha(uu)] = \chi_1(a^2) + \chi_1(b^2) = 2 + (-2) = 0;$   
 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \chi_1(p_3) + \chi_1(p_4) + \chi_1(p_5) + \chi_1(p_6) = \chi_1[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_1[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_1[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_1[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] = \chi_1(a^2 b^2) + \chi_1(b^2 a^2) + \chi_1(a^4) + \chi_1(b^4) = 0,$   
 联立两式可得:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , 且重数为  $d_1 = 2$ 。

(2)  $i=2, d_2=2, \ell=1, 2$ 。  
 $\lambda_1 + \lambda_2 = \chi_2(p_1) + \chi_2(p_2) = \chi_2[\alpha(uu)] + \chi_2[\alpha(uu)] = \chi_2(a^2) + \chi_2(b^2) = -1 + (-2) = -3;$   
 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \chi_2(p_3) + \chi_2(p_4) + \chi_2(p_5) + \chi_2(p_6) = \chi_2[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_2[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_2[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_2[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] = \chi_2(a^2 b^2) + \chi_2(b^2 a^2) + \chi_2(a^4) + \chi_2(b^4) = 3,$   
 联立两式可得:

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2},$$

且重数为  $d_2 = 2$ 。

(3)  $i=3, d_3=2, \ell=1, 2$ 。  
 $\lambda_1 + \lambda_2 = \chi_3(p_1) + \chi_3(p_2) = \chi_3[\alpha(uu)] + \chi_3[\alpha(uu)] = \chi_3(a^2) + \chi_3(b^2) = -1 + (-2) = -3;$   
 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \chi_3(p_3) + \chi_3(p_4) + \chi_3(p_5) + \chi_3(p_6) = \chi_3[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_3[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_3[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_3[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] = \chi_3(a^2 b^2) + \chi_3(b^2 a^2) + \chi_3(a^4) + \chi_3(b^4) = 3,$   
 联立两式可得:

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2},$$

且重数为  $d_3 = 2$ 。

(4)  $i=4, d_4=2, \ell=1, 2$ 。  
 $\lambda_1 + \lambda_2 = \chi_4(p_1) + \chi_4(p_2) = \chi_4[\alpha(uu)] + \chi_4[\alpha(uu)] = \chi_4(a^2) + \chi_4(b^2) = -1 + 2 = 1;$   
 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \chi_4(p_3) + \chi_4(p_4) + \chi_4(p_5) + \chi_4(p_6) = \chi_4[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_4[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_4[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \chi_4[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] = \chi_4(a^2 b^2) + \chi_4(b^2 a^2) + \chi_4(a^4) + \chi_4(b^4) = -1,$

联立两式可得:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2},$$

且重数为  $d_4 = 2$ 。

(5)  $i = 5, d_5 = 2, \ell = 1, 2。$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \chi_5(p_1) + \chi_5(p_2) = \chi_5[\alpha(uu)] + \\ \chi_5[\alpha(uu)] &= \chi_5(a^2) + \chi_5(b^2) = -1 + 2 = 1; \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= \chi_5(p_3) + \chi_5(p_4) + \chi_5(p_5) + \chi_5(p_6) = \\ \chi_5[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] &+ \chi_5[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] + \\ \chi_5[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] &+ \chi_5[\alpha(uu) \cdot \alpha(uu)] = \\ \chi_5(a^2b^2) + \chi_5(b^2a^2) &+ \chi_5(a^4) + \chi_5(b^4) = -1, \end{aligned}$$

联立两式可得:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2},$$

且重数为  $d_5 = 2。$

(6)  $i = 6, d_6 = 1, \ell = 1。$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \chi_6(p_1) + \chi_6(p_2) = \chi_6[\alpha(uu)] + \chi_6[\alpha(uu)] = \\ \chi_6(a^2) + \chi_6(b^2) &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

故  $\lambda_1 = 2$  且重数为  $d_6 = 1。$

(7)  $i = 7, d_7 = 1, \ell = 1。$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \chi_7(p_1) + \chi_7(p_2) = \chi_7[\alpha(uu)] + \chi_7[\alpha(uu)] = \\ \chi_7(a^2) + \chi_7(b^2) &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

故  $\lambda_1 = 2$  且重数为  $d_7 = 1。$

(8)  $i = 8, d_8 = 1, \ell = 1。$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \chi_8(p_1) + \chi_8(p_2) = \chi_8[\alpha(uu)] + \chi_8[\alpha(uu)] = \\ \chi_8(a^2) + \chi_8(b^2) &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

故  $\lambda_1 = 2$  且重数为  $d_8 = 1。$

(9)  $i = 9, d_9 = 1, \ell = 1。$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \chi_9(p_1) + \chi_9(p_2) = \chi_9[\alpha(uu)] + \chi_9[\alpha(uu)] = \\ \chi_9(a^2) + \chi_9(b^2) &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

故  $\lambda_1 = 2$  且重数为  $d_9 = 1。$

综上可得

$$\begin{aligned} \text{spCay}(V_{24}, S) &= \left\{ \left[ \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2} \right]^4, \left[ \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \right]^4, \right. \\ &\left. \left[ \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right]^4, \left[ \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right]^4, [0]^4, [2]^4 \right\}。 \end{aligned}$$

参考文献:

[1] CAYLEY F R S. On the Theory of Groups[J]. *Proc Lond Math Soc*, 1877, **s1-9**(1): 126-133. DOI: 10.1112/plms/s1-9.1.126.  
 [2] GROSS J L. Voltage Graphs[J]. *Discrete Math*, 1974, **9**(3): 239-246. DOI: 10.1016/0012-365X(74)90006-5.  
 [3] GROSS J L, TUCKER T W. Topological Graph Theory [M]. New York: Wiley, 1987.  
 [4] MILLER M, SIRÁN J. Moore Graphs and Beyond: A

Survey of the Degree/Diameter Problem[J]. *Electron J Combin*, 2013, **20**(2): 1-70. DOI: 10.37236/35.  
 [5] GROSS J L, TUCKER T W. Generating all Graph Coverings by Permutation Voltage Assignments[J]. *Discrete Math*, 1977, **18**(3): 273-283. DOI: 10.1016/0012-365x(77)90131-5.  
 [6] DALFÓ C, FIOLE M A, MILLER M, et al. On Quotient Digraphs and Voltage Digraphs[J]. *Australas J Comb*, 2017, **69**(3): 368-374. DOI: 10.48550/arXiv.1612.08855.  
 [7] DALFÓ C, FIOLE M A, MILLER M, et al. An Algebraic Approach to Lifts of Digraphs[J]. *Discrete Appl Math*, 2019, **269**: 68-76. DOI: 10.1016/j.dam.2018.10.040.  
 [8] DALFÓ C, FIOLE M A, ŠIRÁN J. The Spectra of Lifted Digraphs[J]. *J Algebr Comb*, 2019, **50**(4): 419-426. DOI: 10.1007/s10801-018-0862-y.  
 [9] DALFÓ C, FIOLE M A. Spectra and Eigenspaces from Regular Partitions of Cayley (Di)Graphs of Permutation Groups[J]. *Linear Algebra Appl*, 2020, **597**: 94-112. DOI: 10.1016/j.laa.2020.03.015.  
 [10] DALFÓ C, FIOLE M A, PAVLÍKOVÁ S, et al. Spectra and Eigenspaces of Arbitrary Lifts of Graphs[J]. *J Algebr Comb*, 2021, **54**(2): 651-672. DOI: 10.1007/s10801-021-01049-3.  
 [11] KLEITMAN D J, KRAMER E, CONWAY J H, et al. Elementary Problems: E2564-E2569[J]. *Am Math Mon*, 1975, **82**(10): 1009. DOI: 10.2307/2318260.  
 [12] DALFÓ C. A New General Family of Mixed Graphs[J]. *Discrete Appl Math*, 2019, **269**: 99-106. DOI: 10.1016/j.dam.2018.12.016.  
 [13] CHENG T, FENG L H, HUANG H L. Integral Cayley Graphs over Dicyclic Group[J]. *Linear Algebra Appl*, 2019, **566**: 121-137. DOI: 10.1016/j.laa.2019.01.002.  
 [14] CHENG T, FENG L H, LIU W J, et al. Distance Powers of Integral Cayley Graphs over Dihedral Groups and Dicyclic Groups[J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2022, **70**(7): 1281-1290. DOI: 10.1080/03081087.2020.1758609.  
 [15] WU Y J, ZHANG X Q, FENG L H, et al. Distance and Adjacency Spectra and Eigenspaces for Three (Di) Graph Lifts: A Unified Approach[J]. *Linear Algebra Appl*, 2023, **672**: 147-181. DOI: 10.1016/j.laa.2023.04.026.  
 [16] GODSIL C, ROYLE G. Algebraic Graph Theory[M]. New York: Springer, 2001.  
 [17] CAYLEY A. The Theory of Graphs, Graphical Representation[J]. *Mathematical Papers, Cambridge*, 1895, **10**: 26-28.  
 [18] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: American Elsevier Pub Co, 1976.  
 [19] JAMES G D, LIEBECK M W. Representations and Characters of Groups[M]. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.