

基于后悔理论和可调多粒度复模糊概率粗糙集的三支群决策

张嘉辉¹,张超^{1,2*},李德玉^{1,2},庞继芳^{1,2}

(1.山西大学 计算机与信息技术学院,山西 太原 030006;

2.计算智能与中文信息处理教育部重点实验室(山西大学),山西 太原 030006)

摘要:本文针对传统的三支决策方法面临的三个关键挑战进行了深入研究。首先,传统方法需要明确定义主观阈值,这限制了其在不同场景下的适用性。其次,传统方法在信息融合方面缺乏强解释性,难以提供清晰的决策依据。因此,本文利用复模糊集构建可调多粒度复模糊信息系统,并结合基于决策的三支决策方法客观获取分类阈值,构造了可调多粒度复模糊概率粗糙集。最后,决策者常常受制于有限理性,这在实际决策中不可避免。基于此,本文在行为决策理论下,将决策者在决策过程中心理因素对结果的影响展现出来。综上所述,本文提出了一种基于复模糊集和后悔理论的多粒度三支决策模型,旨在解决复杂多属性群决策问题。进一步地,本文利用共享单车租赁数据集进行了详细的实验分析,验证了该模型在求解复模糊环境下蕴含决策风险和有限理性的决策问题时的可行性和有效性。同时,在容错能力和专家经验所发挥的效能上,都获得了较大提升。

关键词:决策智能;行为决策;多粒度;智能交通系统

中图分类号:TP391 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2025)03-0492-13

Three-way Group Decision-making Based on Regret Theory and Adjustable Multi-granulation Complex Fuzzy Probabilistic Rough Sets

ZHANG Jiahui¹, ZHANG Chao^{1,2*}, LI Deyu^{1,2}, PANG Jifang^{1,2}

(1. School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

2. Key Laboratory of Computational Intelligence and Chinese Information Processing of Ministry of Education (Shanxi University), Taiyuan 030006, China)

Abstract: This paper embarks on an extensive exploration of the challenges inherent in traditional three-way decision-making methodologies. First, these conventional approaches necessitate precise subjective threshold definitions, rendering them less adaptable across diverse scenarios. Second, their interpretability in information fusion is often lacking, resulting in ambiguous decision criteria. To address these issues, this paper introduces a novel approach that leverages complex fuzzy sets to establish an adjustable multi-granularity complex fuzzy information system. It integrates decision-based three-way decision techniques to derive classification thresholds objectively, yielding an adjustable multi-granularity complex fuzzy probabilistic rough set. Furthermore, the paper acknowledges the constraints of bounded rationality that decision-makers encounter in real-world scenarios. Within the framework of behavioral decision theory, this work provides a more comprehensive depiction of how psychological factors influence decision outcomes. In essence, this paper proposes a multi-granularity three-way decision model grounded in complex fuzzy sets and regret theory, designed to tackle complex multi-attribute group decision-making problems. To validate the model's effectiveness in addressing

收稿日期:2023-08-03;接受日期:2023-11-13

基金项目:国家自然科学基金(62272284;62006148;62072294;61972238);山西省科技创新青年人才团队项目(202204051001015);山西省高等学校青年科研人员培育计划;山西省高等学校优秀成果培育项目(2019SK036)

作者简介:张嘉辉(2000—),男,山西晋中人,硕士研究生,研究方向为粒计算、智能决策。E-mail:zjh6311011@163.com

*通信作者:张超(ZHANG Chao),E-mail:czhang@sxu.edu.cn

引文格式:张嘉辉,张超,李德玉,等.基于后悔理论和可调多粒度复模糊概率粗糙集的三支群决策[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(3):492-504. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2023168.

decision challenges related to decision risk and bounded rationality within a complex fuzzy environment, the paper conducts an in-depth experimental analysis using a shared bicycle rental dataset. The results underscore the model's feasibility and efficacy, particularly in enhancing fault tolerance and leveraging expert experience.

Key words: decision intelligence; behavioral decision; multi-granularity; intelligent transportation systems

0 引言

当前,面向决策的大数据研究与应用逐步兴起,研究理念、思路、方法和学术路线等方面的探索已全面展开^[1]。其中,随着决策信息的复杂程度不断提升,体量日趋庞大,群决策有助于克服单个决策者在知识、经验和认知能力等方面的局限,进而高效求解复杂决策问题^[2]。近年来,多粒度三支决策框架已被广泛用于求解群决策问题。具体地,在多粒度计算方面,鉴于单粒度下的信息处理模式往往无法满足群决策问题的求解需求,因此 Qian 等^[3]将传统粗糙集推广至多粒度粗糙集,实现了多粒度环境下的高效信息融合。在三支计算方面,加拿大学者 Yao^[4-5]依据决策粗糙集提出三支决策框架,即将论域划分为3部分,对应于粗糙集中的正域、负域和边界域,并赋予了强解释性的语义和分类方法,其核心思想可概括为“分一治一效”,即论域分类、制定不同类别的治理方案和治理效果评价。总体而言,三支决策模型将问题的二分类方式转换为三分类,增加了不承诺决策这一类别,更加贴近人类对分类问题的认知模式,在近些年得到了学者们的充分关注和研究^[6-8]。

决策存在于生活中的方方面面,且大多数决策问题均包含着大量不确定性^[9]。然而,随着决策环境日趋复杂,经典模糊数已无法完整且有效地描述该类信息,因此诸多广义模糊集相继被提出^[10]。例如, Ramot 等^[11]为全面刻画二维信息,于2002年提出了复模糊集的概念。复模糊集由复模糊数构成,复模糊数又由两个变量 r 和 ω 构成,且满足 $r(x): U \rightarrow [0, 2\pi]$, $\omega(x): U \rightarrow [0, 2\pi]$ 。这种灵活性和多维特征刻画使得复模糊集在信息系统中的数据表达能力远远超越了其他模糊集。特别值得强调的是,在决策中存在对结果产生重要影响的辅助性信息时,复模糊集能够更加精细地捕捉数据的本质特征,从而有效避免了数据信息的损失对决

策结果的不利影响。综上所述,复模糊集不仅在多维数据处理方面表现出色,而且在具有挑战性的决策环境下,如交通系统、气象预测等领域,都能够发挥出其强大的优势。鉴于复模糊集在不确定性信息表示方面的优势,近年来已被广泛用于求解各类不确定性决策问题之中^[12-14]。

决策者在得出决策结论的过程中,很难处于完全理性的状态,即决策结论通常会受到决策者心理因素的影响,导致最终的决策结论并非是最佳方案,而基于完全理性的期望效用理论无法对上述情形进行建模^[15]。诺贝尔经济学奖得主 Kahneman 和 Tversky^[16]于1979年共同提出了前景理论,将有限理性引入到决策问题之中。此后,由于前景理论参数过多且计算过于烦琐, Bell^[17]于1982年提出了后悔理论并对其进行优化,他们认为决策者关注更多的是当前结果与本能选择间的差距,而非当前结果本身,即相对价值,而非绝对价值。该理论以较为简洁的方式将有限理性的思想融入决策问题的求解中,在近些年的智能决策领域中得到了充分运用^[18-20]。

本文旨在使用多粒度三支决策框架探索复模糊多属性群决策问题的高效求解方案。Jia 和 Liu^[21]提出了相对损失函数的概念,避免了传统三支决策方法中主观获取阈值的缺陷,建立了基于决策的三支决策方法。考虑到上述优势,本文将复模糊集与该方法相结合,建立复模糊环境下基于决策的多粒度三支决策模型。第1步,在复模糊环境下,依据多粒度概率粗糙集模型进行信息融合,提升了传统粗糙集在信息融合方面的局限,且清晰指出了正域、负域和边界域的划分规则;第2步,利用基于决策的三支决策模型求解阈值,降低了决策者主观意愿在决策过程中产生的影响;第3步,通过后悔理论的引入,对阈值进行最终选择,将决策者的有限理性状态纳入决策模型中;第4步,聚焦

我国大力拓展共享行业深度发展的大环境下,随之到来的共享产品分配不均、生产过剩以及随意摆放导致影响交通等问题^[22-23],本文利用UCI数据集(UCI Machine Learning Repository)中的共享单车租赁数据集,对不同环境下的租赁数量进行分类和排序,进而给出共享单车投放决策的依据。本文的主要贡献包括如下3方面:

(1)将多粒度概率粗糙集推广至复模糊环境下,充分利用复模糊数刻画二维信息的能力,提升信息的存储密度,进一步地结合了基于决策的三支决策方法,客观化地得到了分类阈值,并对不同区域赋予了现实意义;

(2)建立基于多粒度三支决策和后悔理论的复模糊多属性群决策方法,将决策者存在的有限理性体现在决策模型中,使决策结果更加科学合理;

(3)通过共享单车租赁数据集验证本文所建立模型的可行性和有效性,并依据决策结果进行预测,合理生产和投放共享单车,缓解共享单车分配不均、供销差异过大、投放过多等因素导致的交通问题。

1 基础知识

Ramot等^[11]提出复模糊集,有效解决了多数模糊集在描述二维信息上的局限。复模糊集成功地将信息在两个特征上的取值整合到了一个表达式中,具备了描述二维信息的能力,在信息捕获效率方面获得了较大提升。

1.1 复模糊集

定义1^[11] 设 U 是一个非空有限论域,在论域 U 上的一个复模糊集 A 定义如下:

$$C = \{(x, \mu(x)) | x \in U\},$$

其中函数 $\mu(x)$ 的取值落在以复平面原点为圆心的单位圆上,称为复模糊数,由实部和虚部两部分组成。对于任意 $x \in U$,有 $\mu(x) = r(x) \cdot e^{j\omega(x)}$,虚数单位 $j = \sqrt{-1}$,实部 $r(x): U \rightarrow [0, 1]$,代表 $\mu(x)$ 的幅度值,虚部 $\omega(x): U \rightarrow [0, 2\pi]$,代表 $\mu(x)$ 的相位值。接下来,通过如下实例说明复模糊集的特点与优势。

已知太阳活跃期以11年为一个周期,并且

存在大周期和小周期。假设在某一个太阳大周期中太阳黑子数量的峰值为200,小周期中太阳黑子数量的峰值为100,并且以线性趋势变化。当只描述太阳黑子数量时,大、小周期中均有取值为100的年份,但无法准确描述当前年份是否为该周期中的峰值。当使用复模糊数时,假设上升周期为 $[0, \pi]$,下降周期为 $[\pi, 2\pi]$,则大周期中数量为100的年份可描述为 $0.5e^{\frac{\pi}{2}j}$,小周期中数量为100的年份可进一步描述为 $0.5e^{\pi j}$ 。

本文在利用复模糊集求解决策问题的过程中,需使用如下复模糊数常见的运算规则。

定义2^[14] 设 U 是一个非空有限论域, $\mu_1(x) = r_1(x)e^{j\omega_1(x)}$ 和 $\mu_2(x) = r_2(x)e^{j\omega_2(x)}$ 是论域 U 上的两个复模糊数(后续简写为 μ_1, μ_2, r 和 ω)。对于任意 $x \in U$,有以下基本运算规则:

(1)

$$\mu_1 \oplus \mu_2 = [1 - (1 - r_1)(1 - r_2)] e^{2\pi j \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_1}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{\omega_2}{2\pi}\right) \right]};$$

(2) $\mu_1 \otimes \mu_2 = r_1 r_2 e^{2\pi j \left(\frac{\omega_1}{2\pi} \cdot \frac{\omega_2}{2\pi} \right)};$

(3) $\lambda \mu_1 = [1 - (1 - r_1)^\lambda] e^{2\pi j \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_1}{2\pi}\right)^\lambda \right]};$

(4) $\mu_1^\lambda = r_1^\lambda e^{2\pi j \left(\frac{\omega_1}{2\pi} \right)^\lambda}.$

例1 设 $\mu_1 = 0.3e^{\frac{\pi}{2}j}$ 和 $\mu_2 = 0.8e^{\frac{3\pi}{2}j}$ 为两个复模糊数,则

$$\mu_1 \oplus \mu_2 = 0.86e^{\frac{13\pi}{8}j}, \mu_1 \otimes \mu_2 = 0.24e^{\frac{3\pi}{8}j},$$

$$2\mu_1 = 0.51e^{\frac{7\pi}{8}j}, \mu_1^2 = 0.09e^{\frac{\pi}{8}j}.$$

本文为方便对不同的复模糊数进行比较,以求得多个元素间的排序结果,需使用如下复模糊数的得分函数。

定义3 设 U 是一个非空有限论域, $\mu = re^{j\omega}$ 是论域 U 上的一个复模糊数, μ 的得分函数 $Sc(\mu)$ 定义如下:

$$Sc(\mu) = r + \frac{\omega}{2\pi}.$$

本文在求解决策问题的过程中,为精准描述两个复模糊数之间的关系,需使用如下度量距离的方法。

定义4 设 $\mu_1 = r_1e^{j\omega_1}$ 和 $\mu_2 = r_2e^{j\omega_2}$ 是非空有限论域 U 上的两个复模糊数,则两个复模糊数

之间的欧几里得距离 $d(\mu_1, \mu_2)$ 定义如下:

$$d(\mu_1, \mu_2) = \left[\frac{1}{2}(r_1 - r_2)^2 + \frac{1}{4\pi^2}(\omega_1 - \omega_2)^2 \right]^{1/2}.$$

1.2 概率粗糙集

定义 5^[4] 设 R 是非空有限论域 U 上的等价关系, P 是其上的概率测度, 则 (U, R, P) 被称为概率近似空间。当 X 为 U 上的某个子集时, 存在 α, β 满足 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 则 X 的下近似 $\underline{R}(X)$ 和上近似 $\overline{R}(X)$ 定义如下:

$$\underline{R}(X) = \{x \in U | P(X[x]) \geq \alpha\};$$

$$\overline{R}(X) = \{x \in U | P(X[x]) > \beta\}.$$

在划分上、下近似后的论域 U 中, 自然地划分为 3 部分, 分别为如下正域 $POS(X)$ 、负域 $NEG(X)$ 和边界域 $BND(X)$:

$$POS(X) = \underline{R}(X);$$

$$NEG(X) = U - \overline{R}(X);$$

$$BND(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X).$$

1.3 基于决策的三支决策方法

在经典的多属性决策过程中, 决策者将 m 元备选方案集和 n 元属性集分别定义为 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 $V = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 。经过不同方案在每一个属性上进行的评估, 形成评估矩阵 $E = (e_{jk})_{m \times n}$, 矩阵中的值 a_{jk} 表示备选方案 x_j 在属性 y_k 上的评估值; n 个属性的权重集用 $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ 表示, 满足 $u_i \in [0, 1]$ ($1 \leq i \leq n$) 和 $\sum_{i=1}^n u_i = 1$ 。

Yao^[4] 在概率粗糙集的基础上提出了三支决策理论, 对上述 3 个区域进行了合理的语义解释, 并且提出了不同决策结果在两种状态下的损失函数和决策规则, 如下表 1 所示。

表 1 损失函数

Table 1 Loss functions

决策结果	$X(P)$	$\neg X(N)$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

具体地, 动作集为 $A = \{a_P, a_B, a_N\}$, 包含 3 种不同的决策结果, a_P 表示将该方案放入正域, 是可接受的方案; a_N 表示将该方案放入负

域, 是需要拒绝的方案; a_B 表示将该方案放入边界域, 是暂时无法决定接受还是拒绝的方案。除此之外, 状态集为 $\Omega = \{X, \neg X\}$, 分别表示论域 U 中属于 X 和不属于 X 的集合。当方案 $x \in X$ 时, 将其划分到区域 P 、 B 和 N 的风险代价分别为 λ_{PP} 、 λ_{BP} 和 λ_{NP} ; 当方案 $x \in \neg X$ 时, 将其划分到 3 个区域的风险代价分别为 λ_{PN} 、 λ_{BN} 和 λ_{NN} 。假设 $\lambda_{PP} = 0$ 、 $\lambda_{NN} = 0$, 且 $\lambda'_{BP} = \lambda_{BP} - \lambda_{PP}$ 、 $\lambda'_{NP} = \lambda_{NP} - \lambda_{PP}$ 、 $\lambda'_{PN} = \lambda_{PN} - \lambda_{NN}$ 和 $\lambda'_{BN} = \lambda_{BN} - \lambda_{NN}$, 则可将表 1 的损失函数转换为相对损失函数, 如表 2 所示。

表 2 相对损失函数

Table 2 Relative loss functions

决策结果	$X(P)$	$\neg X(N)$
a_P	0	λ'_{PN}
a_B	λ'_{BP}	λ'_{BN}
a_N	λ'_{NP}	0

对于不同的方案在给定的属性上, 使用相对损失函数得到的损失是完全相同的, 并不能满足解决实际问题的需求。在此基础上, Jia 和 Liu^[21] 提出了基于决策的三支决策方法, 引入了评价值 e_{jk} 和参数 σ 来确定损失函数, 其中 $\sigma \in [0, 0.5]$, 分别代表方案 x_j 在属性 y_k 上属于集合 X 的程度和决策者对于风险的偏好程度。基于 e_{jk} 的相对损失函数如表 3 所示。

表 3 基于决策的相对损失函数

Table 3 Relative loss functions based on decisions

决策结果	$X(P)$	$\neg X(N)$
a_P	0	$1 - e_{jk}$
a_B	σe_{jk}	$\sigma(1 - e_{jk})$
a_N	e_{jk}	0

依据表 3 中的损失函数, 阈值 α_{jk} 和 β_{jk} 的计算公式如下:

$$\alpha_{jk} = \frac{(1 - \sigma)(1 - e_{jk})}{(1 - \sigma)(1 - e_{jk}) + \sigma e_{jk}};$$

$$\beta_{jk} = \frac{\sigma(1 - e_{jk})}{\sigma(1 - e_{jk}) + (1 - \sigma)e_{jk}}.$$

1.4 后悔理论

后悔理论由 Bell^[17] 提出, 用于完善期望效用理论中一些违背实验现象的公理。后悔理论认为, 决策者不仅关注当前方案的价值, 而且

还关注如果选择其他方案对当前获得价值的影响,若当前价值低于其他方案价值,决策者会感到后悔,否则会感到欣喜。依据后悔理论,本文构造了决策者的期望效用函数,表示如下:

$$p(x_1, x_2) = v(x_1) + \Omega(v(x_1) - v(x_2)),$$

其中,效用函数 $v(x) = x^\delta (0 < \delta < 1)$,表示选择当前方案的价值, δ 越大,风险规避程度越小。后悔-欣喜函数 $\Omega(\Delta v) = \Omega(v(x_1) - v(x_2))$ 表示选择方案 x_2 相对于选择方案 x_1 获得的后悔-欣喜值,函数 $\Omega(\Delta v) = 1 - e^{-\vartheta(\Delta v)}$ ($\vartheta \geq 0$) 为单调递增的凹函数,描述了决策者对于后悔的敏感程度要大于欣喜的敏感程度, ϑ 越大,规避后悔的能力越强。

2 可调多粒度复模糊概率粗糙集

在多属性群决策的过程中,假设有 l 个决策者对 m 个方案上的 n 个属性进行评估,将方案集和属性集设为 U 和 V ,每个决策者和属性的权重分别设为 $w = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}^T$ 和 $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$,满足 $w_i \in [0, 1]$ 、 $u_i \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^l w_i = 1$ 、 $\sum_{i=1}^n u_i = 1$ 。关系集设为 $R = \{R_1, R_2, \dots, R_l\}$,其中 R_i 表示 $U \times V$ 上的复模糊关系, S 是 V 上的标准评估集。由此可建立多粒度复模糊信息系统 (U, V, R_i, S) 。

定义 6 已知一个多粒度复模糊信息系统 (U, V, R_i, S) 。对于 $\forall x_j \in U (1 \leq j \leq m)$ 、 $\forall y_k \in V (1 \leq k \leq n)$,设 $\theta_S^{R_i}(x_j)$ 为 x_j 在关系集 R_i 上的多粒度复模糊隶属度,具体定义如下:

$$\theta_S^{R_i}(x_j) = \frac{\sum_{y_k \in V} u_{ik} R_i(x_j, y_k) [S(y_k)]}{\sum_{y_k \in V} u_{ik} R_i(x_j, y_k)}$$

本文将复模糊数除法公式定义如下:

$$\mu_1 \oslash \mu_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{\frac{2\pi i \omega_1}{\omega_2}}$$

将 R 中 m 个方案的 $\theta_S^{R_i}(x_j)$ 均按照升序排列,可得到 x_j 关于 R_i 的可调多粒度复模糊隶属度,记为 $\theta_S^{R_i(\alpha)}(x_j)$,使决策过程中对不同决策者的选择阶段拥有调节风险偏好程度的能力^[7]。

定义 7 可调多粒度复模糊隶属度在结合

基于决策的三支决策方法后,根据阈值 α 和 β ,可构造 (U, V, R_i, S) 上的可调多粒度复模糊概

率粗糙集 $\left(\sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \alpha}(S), \overline{\sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \beta}(S)} \right)$,其中参数

$\eta = \frac{i}{l} (1 \leq i \leq l)$ 为决策者对于风险的偏好程度, η 的取值越大,表示决策者越倾向于追求风

险。例如, $\eta = \frac{2}{l}$ 表示选择 x_j 的可调多粒度复模糊隶属度中排序为第 2 位的值。根据定义 5,可知该粗糙集上下近似以及正、负和边界域定义如下:

$$\sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \alpha}(S) = \{ \theta_S^{R_i(\alpha)}(x_j) \geq \alpha | x_j \in U \};$$

$$\overline{\sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \beta}(S)} = \{ \theta_S^{R_i(\beta)}(x_j) > \beta | x_j \in U \};$$

$$POS_{\eta, \alpha}(X) = \sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \alpha}(S);$$

$$NEG_{\eta, \beta}(X) = U - \overline{\sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \beta}(S)};$$

$$BND_{\eta, \alpha, \beta}(X) = \overline{\sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \beta}(S)} - \sum_{i=1}^l R_i^{\eta, \alpha}(S)。$$

作为多粒度决策方法的一种,可调多粒度概率粗糙集模型具备较好的多粒度模糊信息融合效果,并且操作简单,在处理复杂的多粒度问题时表现良好。同时,基于决策的三支决策方法中,分类规则与概率粗糙集对于上下近似的划分方法相吻合。并且其在解决复杂问题时,三分类的模式也给了决策者一定的缓冲机会,降低了决策的错误率。因此,将基于决策的三支决策方法融入可调多粒度概率粗糙集模型中,可更加合理地求解决策问题。

3 三支复模糊多属性群决策方法

3.1 问题背景

假设共有 i 个决策者对论域中 m 个备选方案进行属性评估,属性集共包含 n 个属性,属性权重和决策者权重分别用 u 和 w 表示。综上所述,可建立多粒度复模糊信息系统 (U, V, R_i, S) 。其中,论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 、 $V = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 分别为方案集和属性集,

$R_i = \{R_1, R_2, \dots, R_i\}$ 为在 $U \times V$ 上生成的复模糊关系集, S 为属性集 V 上的标准指标集。

3.2 模型建立

首先,需通过离差最大化法求出属性权重 u_{ik} 和决策者权重 w_i :

$$u_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^m (d(R_i(x_j, y_k), R_i(x_h, y_k)))}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^m (d(R_i(x_j, y_k), R_i(x_h, y_k)))}; \quad (1)$$

$$w_i = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (|u_{ik}^R, u_{ih}^R|)}{\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (|u_{ik}^R, u_{ih}^R|)}. \quad (2)$$

具体地, $|u_{ik}^R, u_{ih}^R|$ 表示两数之差的绝对值。然后,在已有的多粒度复模糊信息系统 (U, V, R_i, S) 环境下,为扩大粒度的选择范围,即从悲观状态向乐观状态渐变的过程,我们根据定义6和定义7,生成可调多粒度复模糊矩阵 $R_{\tau(i)} = (\theta_{ji})_{m \times l}$,并将基于决策的相对损失函数推广至多粒度复模糊信息系统下,则表3转化为多粒度复模糊信息系统下的损失函数,如表4所示,该方式可以有效减少主观意见对决策结果的影响。然后,为了避免决策者不可能存在的完全理性状态,我们依据损失函数计算阈值 α_j^R 和 β_j^R ,其含义为在关系集 R_i 下 x_j 的分类阈值 α 和 β ,并且在后悔理论的作用下选出最终阈值^[14]。其中 x_j 在关系集 R_i 下的效用函数和后悔-欣喜函数的公式如下:

$$v_i(x_j) = \left(r + \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2 \right)^\delta;$$

$$\Omega_i(x_j) = \sum_{o=1}^l \Omega(v_i(x_j) - v_o(x_j)) = \sum_{o=1}^l 1 - e^{-\beta(\Delta v)}.$$

表4 多粒度复模糊信息系统下的损失函数

Table 4 Loss functions of multi-granularity complex fuzzy information systems

决策结果	$X(P)$	$-X(N)$
a_P	0	$1 - \theta_{ji}$
a_B	$\sigma \theta_{ji}$	$\sigma(1 - \theta_{ji})$
a_N	θ_{ji}	0

最后,根据定义7,使用最终阈值生成可调多粒度复模糊概率粗糙集,可得到正域、负域和边界域的合理划分依据,与传统粗糙集相

比,概率粗糙集具备了一定的容错能力。进一步,依据 $POS_{\eta, \alpha}(X) > BND_{\eta, \alpha, \beta}(X) > NEG_{\eta, \beta}(X)$ 和定义3,可对所有方案进行排序,得到最优方案。

我们将上述模型应用于共享单车租赁背景中,具有以下多个优势方面:

(1) 更好的信息特征描述:在环境检测方面,由于结果通常具备不确定性,我们采用模糊数来更准确地描述信息特征,从而提高了模型的适用性。

(2) 更可靠的群体决策:相比于单独的决策结果,群体决策结果更加可靠。我们的模型在对不同观测点的数据进行融合时,采用了更科学有效的信息融合方法,进一步提高了决策的准确性。

(3) 考虑心理因素的决策:在选择最佳天数的决策阶段,我们采用后悔理论方法,加强了决策者在决策时心理因素的影响。这使得决策结果更符合实际情况,更好地考虑了人们的实际感受和需求。

3.3 模型算法

本节给出多粒度复模糊信息系统下的群决策算法,具体步骤如下:

输入:多粒度复模糊信息系统 (U, V, R_i, S) ;

输出:备选日期集中共享单车租赁数量最多的日期和以租赁数量为排序依据的日期排序结果。

步骤1: 计算属性集权重 u_{ik} 和专家权重 w_i 。

步骤2: 计算 R_i 下 x_j 的多粒度复模糊隶属度 $\theta_{ji}^R(x_j)$ 。

步骤3: 将 x_j 在不同关系集上的值按升序排列得到可调多粒度复模糊隶属度。

步骤4: 确定参数 σ , 求出属性 x_j 在关系集 R_i 上的阈值 α_j^R 和 β_j^R 。

步骤5: 根据2.4并结合复模糊集的基本定义,计算基于后悔理论的期望效用矩阵 $P = (p_{ji})_{m \times l}$ 。

步骤6: 计算不同决策者的总体期望效用值 $P_i = \sum_{o=1}^m p_{oi}$, 选择总体期望效用值最大,即总体后悔值最小的决策者对应的阈值 α_j^R 和 β_j^R 作

为最终阈值 α_j 和 β_j 。

步骤 7: 确定参数 η , 与步骤 6 得到的阈值比较生成可调多粒度复模糊概率粗糙集, 根据定义 7 划分正域、负域和边界域, 得到备选方案集的分类结果。

步骤 8: 依据 $POS_{\eta,\alpha} > BND_{\eta,\alpha,\beta} > NEG_{\eta,\beta}$ 和复模糊得分函数, 得到所有方案的排序结果。

本文提出模型的具体算法步骤如算法 1 所示。

综上所述, 可得出上述每步的时间复杂度分别为 $O(lnm^2)$ 、 $O(lmn)$ 、 $O(ml \log l)$ 、 $O(ml)$ 、 $O(ml^2)$ 、 $O(ml)$ 、 $O(m)$ 、 $O(m)$ 。因此, 整个算法的时间复杂度为 $O(lnm^2)$ 。

算法流程图如图 1 所示。

4 实例分析

本节以 UCI 数据集中共享单车租赁数据集 (UCI Machine Learning Repository: Bike Sharing Dataset Data Set) 为实例背景, 抽取部分日期的数据作为实验用例; 并依据本文模型, 根据天气情况对所有用例的车辆需求情况进行预测, 进一步探索复模糊环境下多属性群决策问题的解决方法, 并进行灵敏度分析和对比性分析。

4.1 实例描述

在本案例中, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$ 为一组备选日期集, $V = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 为一组环境属性集, y_1 为温度、 y_2 为体感温度、 y_3 为空气湿度、 y_4 为风速, 其中 y_3 和 y_4 为成本型数据, 通过公式 $b_{jk} = 1 - b_{jk}$ 转换成效益型数据, 其中 b_{jk} 表示天数 x_j 在属性 y_k 上的幅度评价价值 ($j = 1, 2, \dots, 12, k = 1, 2, 3, 4$)。 $R = \{R_1, R_2, R_3\}$ 为 3 个观测点的复模糊关系集, $R_i (i = 1, 2, 3) \rightarrow U \times V$ 为二元关系集, 评价值 e_{jk}^R 表示在关系集 R_i 下天数 x_j 在属性 y_k 上的复模糊评价值。复模糊评价值 e_{jk}^R 的相位值表示当天是否为工作日和天气情况, 天气为晴天时, 温度和体感温度属性的相位值加 $\frac{\pi}{4}$; 阴天时, 风速属性相位值加 $\frac{\pi}{4}$; 小雨、小雪时, 湿度属性相位值

算法 1: 三支复模糊多属性群决策算法

输入: 多粒度复模糊信息系统 (U, V, R_i, S)

输出: 备选方案的分类结果和排序结果。

begin

for $x_j \in U (j = 1, 2, \dots, m)$ do

计算: 属性权重 $u_{jk} (k = 1, 2, \dots, n)$ 和多粒度复模糊隶属度 $\theta_S^R(x_j)$

构建: 可调粒度复模糊隶属度 $\theta_S^{R_i}(x_j)$

end

for $R_i \in R (i = 1, 2, \dots, l)$ do

计算: 专家权重 w_i

end

for $x_j \in U (j = 1, 2, \dots, m)$ do

 for $R_i \in R (i = 1, 2, \dots, l)$ do

计算: 相对损失函数和分类阈值

 end

end

for $x_j \in U (j = 1, 2, \dots, m)$ do

 for $R_i \in R (i = 1, 2, \dots, l)$ do

计算: 效用函数值 $v_i(x_j)$ 和后悔—欣喜函数值 $\Omega_i(x_j)$

构建: 期望效用矩阵 $P = (p_{ji})_{m \times l}$

 end

end

for $R_i \in R (i = 1, 2, \dots, l)$ do

 for $x_j \in U (j = 1, 2, \dots, m)$ do

计算: 总体期望效用值获得最大值

构建: 最终阈值矩阵

 end

end

for $x_j \in U (j = 1, 2, \dots, m)$ do

判断: if $Sc(\theta_S^{R_i}(x_j)) \geq Sc(\alpha_j)$ then

$x_j \in POS$

 end

 if $Sc(\theta_S^{R_i}(x_j)) < Sc(\alpha_j)$ and

$Sc(\theta_S^{R_i}(x_j)) \geq Sc(\beta_j)$ then

$x_j \in BND$

 end

 else

$x_j \in NEG$

 end

构建: 正域 $POS_{\eta,\alpha}$ 、负域 $NEG_{\eta,\alpha,\beta}$ 和边界域 $BND_{\eta,\beta}$

计算: 排序结果

end

end

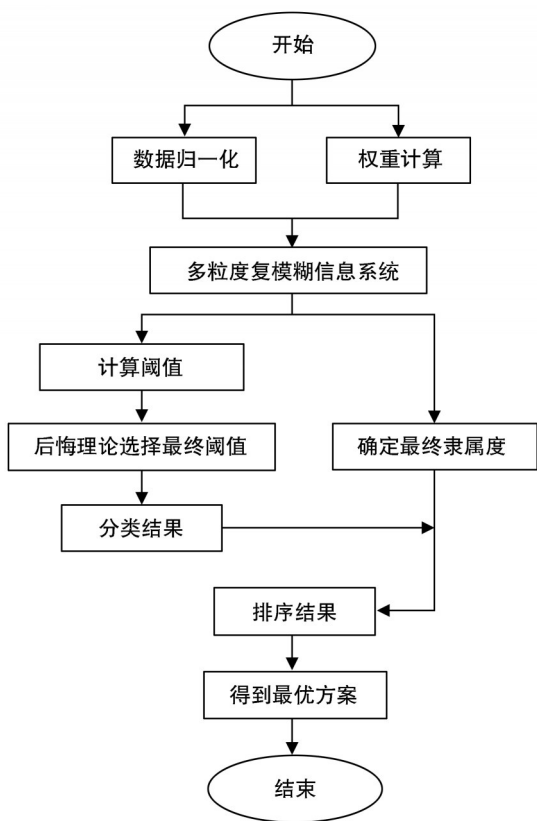


图1 本文模型算法流程图

Fig. 1 The flow chart of the proposed model algorithm

加 $\frac{\pi}{4}$; 大雨、大雪时,湿度和风速属性相位值加 $\frac{\pi}{4}$ 。例如: x_1 为工作日,天气情况为阴天,其对应温度属性的相位值 $\omega = \pi$, 风速属性的相位值 $\omega = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, 具体转化关系如表5所示。

表5 相位值转换关系

Table 5 The phase value conversion relationship

日期	天气	相位值
休息日	大雨、大雪	$\frac{\pi}{2}$
休息日	阴天	$\frac{\pi}{4}$
工作日	小雨、小雪	π
工作日	晴天	$\frac{\pi}{4}$

本节为在后续实验中方便处理信息,对数据进行归一化处理作为复模糊评价价值 e_{jk}^R 的幅度值。以温度属性为例,假设某三天的温度分别为24度、25度和27度,在25度时取得最大值,距离25度越远的数据,归一化处理后越小,所以归一化后在27度时取得最小值。具体归一化公式如下:

① 当 $\max_j b_{jk} > \min_j b_{jk}$

$$r_{jk} = \begin{cases} \frac{b_{jk} - \min_j b_{jk}}{\max_j b_{jk} - \min_j b_{jk}}, & b_{jk} \leq \max_j b_{jk} \\ \frac{2\max_j b_{jk} - b_{jk} - \min_j b_{jk}}{\max_j b_{jk} - \min_j b_{jk}}, & b_{jk} > \max_j b_{jk} \end{cases}$$

② 当 $\max_j b_{jk} < \min_j b_{jk}$

$$r_{jk} = \begin{cases} \frac{|b_{jk} - \min_j b_{jk}|}{\max_j b_{jk} - \min_j b_{jk}}, & b_{jk} \geq \max_j b_{jk} \\ \frac{|2\max_j b_{jk} - b_{jk} - \min_j b_{jk}|}{\max_j b_{jk} - \min_j b_{jk}}, & b_{jk} < \max_j b_{jk} \end{cases}$$

完成数据集归一化处理,根据第4节中提出的模型得出决策结果。

依据公式(1)和(2),计算四个属性和3个监测站的权重,计算结果如表6和图2所示。

表6 三个观测点处的环境属性权重

Table 6 The weights of environmental attributes at three observation points

	u_1	u_2	u_3	u_4
R_1	0.258 502	0.263 243	0.238 980	0.239 274
R_2	0.260 219	0.261 224	0.230 361	0.248 196
R_3	0.254 181	0.270 156	0.216 141	0.259 522

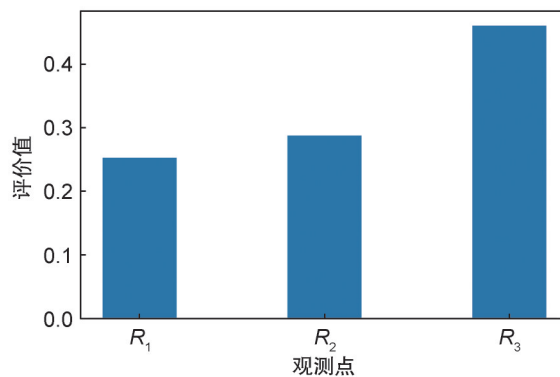


图2 三个观测点的权重

Fig. 2 The weights of the three observation points

依据定义6,计算隶属度后并排序,得到可调多粒度复模糊隶属度 $\theta_S^{R(i)}(x_j)$, 其中,标准指标集的计算公式如下:

$$S(y_k) = \{(y_1, r_1 e^{i\omega_1}), (y_2, r_2 e^{i\omega_2}), \dots, (y_4, r_4 e^{i\omega_4})\};$$

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{12} r_{ijk}}{4m} (k = 1, 2, 3, 4);$$

$$\omega_k = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{12} \omega_{ijk}}{4m} (k = 1, 2, 3, 4).$$

① 本节采取风险中立的态度, 参数 η 和 σ 取值分别为 $2/3$ 和 0.1 , 获得最终隶属度并根据 1.3 节计算相对损失函数和阈值 α 和 β 。

② 使用后悔理论对 3 个关系集的阈值进行选择, 其中, 参数风险规避系数 $\delta = 0.25$ 、后悔规避系数 $\vartheta = 0.5$, 计算得到总体期望效用值 P_i 并排序, 选择总体期望效用值最大的观测站对应的阈值作为最终阈值, 部分最终阈值选择结果如表 7 所示。

表 7 最终的分类阈值

Table 7 The final classification threshold

方案	α_j	β_j
x_1	(0.972 596, 0.995 17)	(0.249 152, 0.550 916)
x_2	(0.980 825, 0.995 144)	(0.303 903, 0.549 898)
\vdots	\vdots	\vdots
x_{11}	(0.967 539, 0.995 234)	(0.225 376, 0.553 314)
x_{12}	(0.967 348, 0.995 171)	(0.224 581, 0.550 916)

③ 依据最终阈值和第 3 步得到的最终隶属度的得分函数, 划分正域、负域和边界域, 划分结果如表 8 所示。

并且可得

$$\{x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{11}, x_{12}\} > \{x_2, x_4, x_5, x_8, x_{10}\}.$$

表 8 本文模型分类结果

Table 8 The classification results of our model

分类	方案集
$POS_{\eta, \alpha}(X)$	\emptyset
$BND_{\eta, \alpha, \beta}(X)$	$x_1, x_3, x_6, x_7, x_9, x_{11}, x_{12}$
$NEG_{\eta, \beta}(X)$	$x_2, x_4, x_5, x_8, x_{10}$

④ 进一步, 按区域划分, 根据得分函数得到所有日期的共享单车租赁数量的排序结果。排序结果为

$$x_7 > x_{11} > x_6 > x_{12} > x_9 > x_3 > x_1 > x_4 > x_8 > x_5 > x_{10} > x_2,$$

共享单车租赁数量最多的日期为 x_7 , 共享单车管理员应对相关区域的单车进行重点投放, 如图 3 所示。

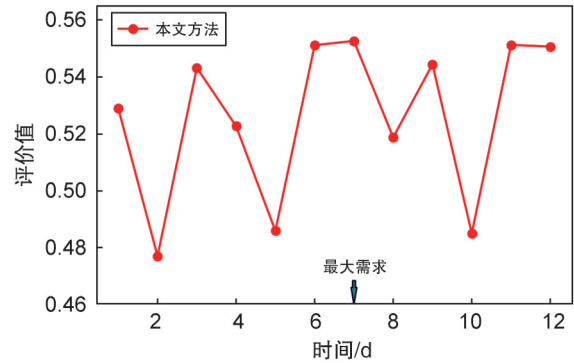


图 3 本文模型的排序结果

Fig. 3 Sorting results via the paper model

4.2 灵敏度分析

本节为验证本文提出的模型的稳定性, 针对参数 η 和 σ 进行灵敏度分析。由图 4 和表 9 可知, 改变参数 η , 共享单车租赁数量的排序结果存在差异, 出现这种情况的原因是 η 的取值不同时, 模型的风险偏好程度不同, 当 $\eta = \frac{2}{3}$ 时, 面对风险采取中立态度, 决策结果更加准确。改变参数 σ 的取值, 共享单车租赁数量的排序结果没有改变, 3 个区域的划分结果存在差异, 但不影响决策结果, 最优方案均为 x_7 。可以得出, 本文提出的模型具备稳定性。

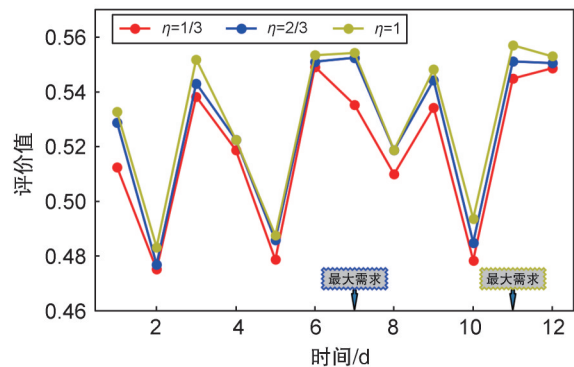


图 4 不同 η (可调隶属度选择参数) 的排序结果

Fig. 4 Sorting results using different η (selection parameter of adjustable membership degree)

表 9 不同 σ (损失函数风险偏好参数) 的分类结果

Table 9 Classification results using different σ (risk preference parameter of loss function)

参数	$POS_{\eta, \alpha}(X)$	$BND_{\eta, \alpha}(X)$	$NEG_{\eta, \alpha}(X)$
$\sigma = 0$	\emptyset	所有方案	\emptyset
$\sigma = 0.1$	\emptyset	$x_{1,3,6,7,9,11,12}$	$x_{2,4,5,8,10}$
$\sigma = 0.5$	\emptyset	\emptyset	所有方案

4.3 对比性分析

4.3.1 与经典的复模糊多属性决策方法对比

本节中,我们分别将本文提出的方法与复模糊环境下的集成算子方法、标准指标集方法^[24]、逼近理想解排序法(Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution, TOPSIS)^[12]、多准则妥协解排序法(Multi-criteria Optimization and Compromise Solution, VIKOR)、交互式多标准决策法(Interactive and Multi-Criteria Decision-Making, TODIM)以及后悔理论方法^[25]进行了对比性分析。由图5可知,不同的方法得到的排序结果稍有不同,首先集成算子方法中,算术集成算子受

个体意见影响较小,相反,几何集成算子更加重视个体意见在决策中的作用,但都对异常数据的处理能力较弱,容易受到影响;决策指标集方法的决策结果如下: $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \{x_7\} \neq \emptyset$,所以共享单车租赁数量最多的日期为 x_7 ;TOPSIS法通过计算备选方案与正负理想解之间的距离,得出与正理想解贴近程度最高、与负理想解贴近程度最低的备选方案作为最优方案;VIKOR方法在TOPSIS方法中加入了决策风险参数,使决策者可以根据自身经验对决策结果产生影响,加入主观因素后让决策结果有了更多的可能性;TODIM方法和后悔理论方法都描述了决策者有限理

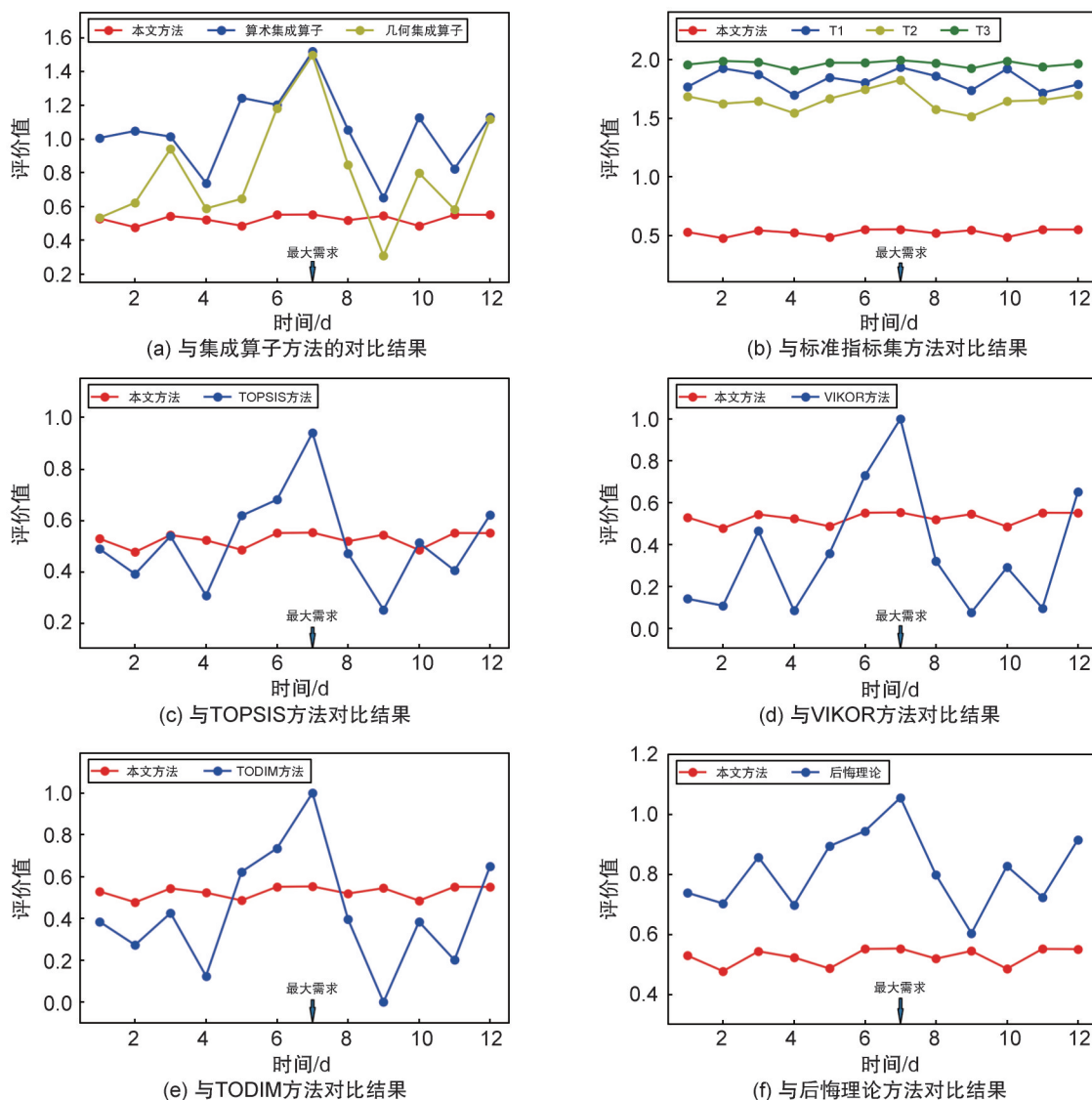


图5 本文方法与经典复模糊多属性决策方法的对比性分析

Fig. 5 Comparative analysis between the method proposed in this paper and the classical complex fuzzy multi-attribute group decision-making method

性的心理行为特征,它们认为决策者在面对损失时,相较于面对收益有更强的敏感程度,因此,产生了规避后悔的行为方式,根据以上描述,有限理性理论使得决策结果更加符合现实状态。

4.3.2 与多粒度三支群决策方法对比

该部分将本文提出的方法与Zhang等^[26]提出的多粒度三支群决策进行对比性分析,该方法提出了一种在模糊环境下的多粒度三支群决策方法,本文将该方法进行了拓展,并应用在复模糊环境下,因此,我们对两种方法做了对比性分析,如图6所示。根据比较结果可知,两种方法在排序结果上并无差异,可知,本文提出的方法具备稳定性和可靠性。进一步,我们将Zhang等提出的方法与算术集成算子与TOPSIS方法结合,并与本文提出的方法进行了对比,由图6可知,排序结果存在差异,原因是本文使用的可调多粒度复模糊隶属度具备不同风险偏好的选择能力,不仅仅是简单的数据融合方法,因此,本文提出的方法具备更好稳定性和可靠性。

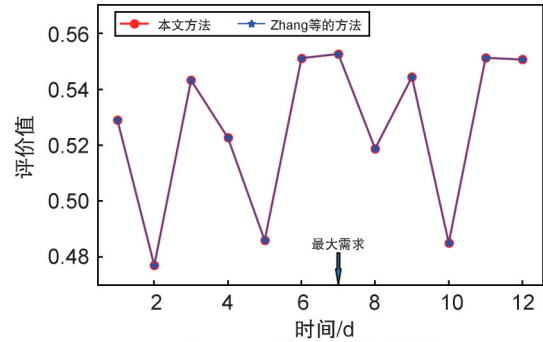
4.3.3 总结

最后,我们针对以上提及的多种复模糊多属性决策方法的优势做了对比,如表10所示。

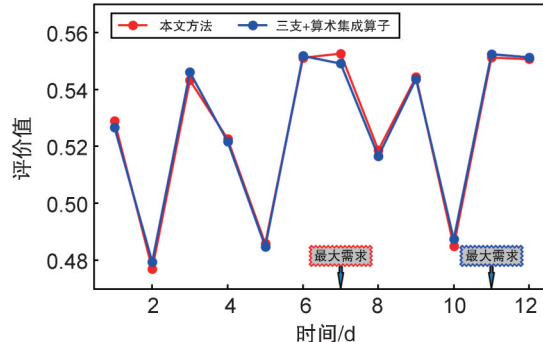
本文所提出的模型在多属性群决策问题的应用领域中具备广泛的适用性。通过采用复模糊数形式表示数据,我们有效地提高了数据的信息表达能力。特别是在面对那些涉及辅助性信息、对决策结果产生重要影响的情境下,这一模型通过相位值的精确描述,能够捕捉并量化这些关键要素。此外,本文的模型具备方案分类和排序的功能,并融合了有限理性的概念,更全面地考虑了决策者的心理因素对决策结果的影响。因此,本文的模型在数据处理方面表现出色,提供更可靠的决策结果。

4.3.4 相关性比较

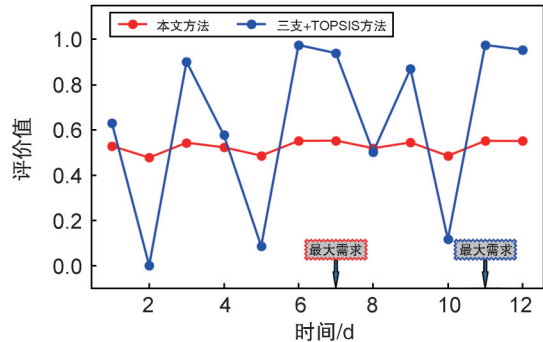
该部分我们使用Spearman相关系数,刻画上述提及的多属性群决策方法之间的相关性。Spearman相关系数通过比较任意两种方法得出的排序结果,给出正相关或负相关两种关系,数值分别介于(0,1]和[-1,0)上,相关系数的绝对值越大,则相关性越强,当相关系数为0



(a) 与Zhang等的方法的对比结果



(b) 与三支+算术集成算子方法的对比结果



(c) 与三支+TOPSIS方法的对比结果

图6 本文方法与多粒度三支群决策方法进行对比性分析
Fig. 6 Comparative analysis between the method proposed in this article and the multi granularity three-way group decision-making method

时,表示两者无相关性。

图7为本文提出的方法与其他多属性决策方法的Spearman相关系数的比较结果。从图中可知,本文提出的方法与Zhang等提出的方法及其拓展方法有很强的相关性,此外,与决策指标集方法的相关性较强,与算术集成算子方法相关性最弱,与其余几种方法的相关性的差异较小,相关系数均为0.3左右。

5 结论

本文在复模糊环境下,使用多粒度概率粗

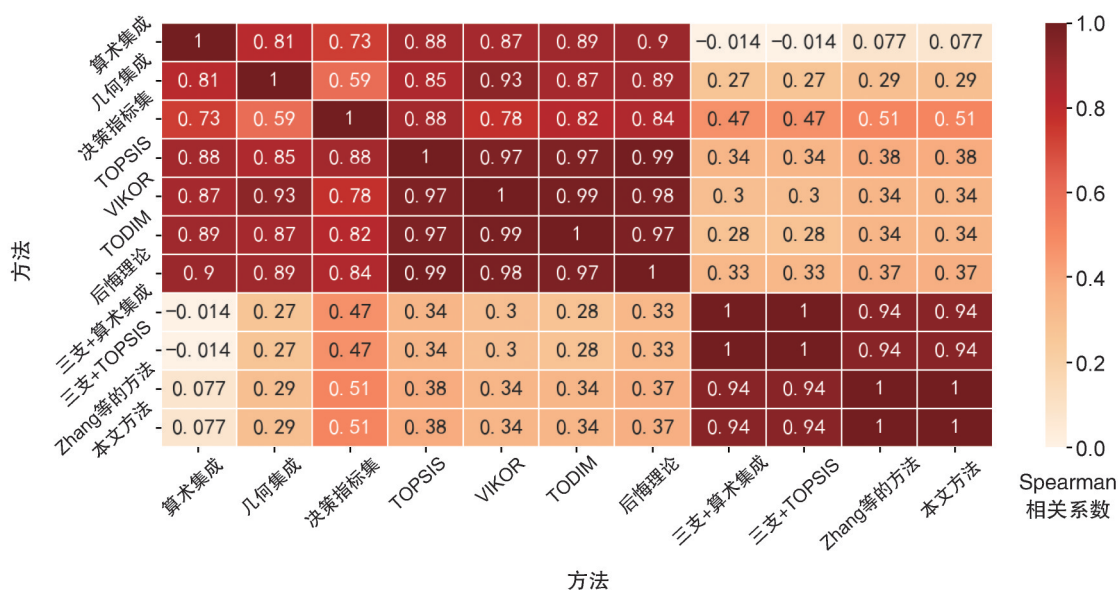


图7 Spearman相关系数对比

Fig. 7 Comparison of spearman correlation coefficient

表10 不同经典复模糊多属性群决策方法之间的优势对比分析

Table 10 Comparative analysis of advantages among different classical complex fuzzy multi-attribute group decision-making methods

方法	条件概率	主观因素	有限理性状态	群决策	分类能力
集成算子法	×	×	×	×	×
标准指标集法	×	×	×	×	×
TOPSIS法	×	×	×	×	×
VIKOR法	×	✓	×	×	×
TODIM法	×	×	✓	×	×
后悔理论法	×	×	✓	×	×
Zhang等 ^[26] 的方法	✓	✓	×	✓	✓
本文方法	✓	✓	✓	✓	✓

糙集,并结合基于决策三支决策方法和后悔理论,提出了复模糊环境下基于后悔理论的三支多粒度群决策模型,用于解决多属性群决策问题。然后,使用共享单车租赁数据集,对本文提出的复模糊多属性群决策方法的有效性和可行性进行了验证,并与4类决策方法进行了对比性分析。综上所述,这一模型的应用潜力不仅局限于现有的大规模交通网络,还能够各种不同规模和复杂性的任务中发挥作用,为改善城市交通流动性和提高交通效率贡献力量,例如时间序列预测任务,大模型。为未来建立更加现代化的智能交通系统提供了一种有效手段。

接下来的研究内容计划分为如下4方面:(1)探索针对不完备数据集中缺失值的补齐方法,针对噪音数据的判断和处理办法等;(2)探索群决策问题中存在的意见不一致情况的解决方法;(3)研究在复模糊集基础上的推广模糊集的性质与应用,如区间复模糊集、复直觉模糊集、对偶犹豫复模糊集等;(4)在更多领域应用本文提出的复模糊多属性群决策方法,解决相关问题并进一步验证模型的可行性和有效性。

参考文献:

[1] 于洪,何德牛,王国胤,等.大数据智能决策[J].自动化学报,2020,46(5):878-896. DOI: 10.16383/j.aas.c180861
YU H, HE D N, WANG G Y, et al. Big Data for Intelligent Decision Making[J]. Acta Autom Sin, 2020, 46(5): 878-896. DOI: 10.16383/j.aas.c180861

[2] ZHAN J M, WANG J J, DING W P, et al. Three-way Behavioral Decision Making with Hesitant Fuzzy Information Systems: Survey and Challenges[J]. IEEE/CAA J Autom Sin, 2022, 10(2): 330-350. DOI: 10.1109/JAS.2022.106061.

[3] QIAN Y H, LIANG J Y, YAO Y Y, et al. MGRS: A Multi-granulation Rough Set[J]. Inf Sci, 2010, 180(6): 949-970. DOI: 10.1016/j.ins.2009.11.023.

[4] YAO Y Y. Three-way Decisions with Probabilistic Rough Sets[J]. Inf Sci, 2010, 180(3): 341-353. DOI: 10.1016/j.ins.2009.09.021.

[5] YAO Y Y. Three-way Decision and Granular Computing[J]. Int J Approx Reason, 2018, 103: 107-123. DOI: 10.1016/j.

- ijar.2018.09.005.
- [6] 苗夺谦, 张清华, 钱宇华, 等. 从人类智能到机器实现模型: 粒计算理论与方法[J]. 智能系统学报, 2016, **11**(6): 743–757. DOI: 10.11992/tis.201612014
- MIAO D Q, ZHANG Q H, QIAN Y H, *et al.* From Human Intelligence to Machine Implementation Model: Theories and Applications Based on Granular Computing[J]. *CAAI Trans Intell Syst*, 2016, **11**(6): 743–757. DOI: 10.11992/tis.201612014
- [7] ZHANG C, LI D Y, LIANG J Y. Multi-granularity Three-way Decisions with Adjustable Hesitant Fuzzy Linguistic Multigranulation Decision-theoretic Rough Sets over Two Universes[J]. *Inf Sci*, 2020, **507**: 665–683. DOI: 10.1016/j.ins.2019.01.033.
- [8] CHENG S H, WU Y X, LI Y, *et al.* TWD-SFNN: Three-way Decisions with a Single Hidden Layer Feedforward Neural Network[J]. *Inf Sci*, 2021, **579**: 15–32. DOI: 10.1016/j.ins.2021.07.091.
- [9] YAO J T, VASILAKOS A V, PEDRYCZ W. Granular Computing: Perspectives and Challenges[J]. *IEEE Trans Cybern*, 2013, **43**(6): 1977–1989. DOI: 10.1109/TSMCC.2012.2236648.
- [10] BUSTINCE H, BARRENECHEA E, PAGOLA M, *et al.* A Historical Account of Types of Fuzzy Sets and Their Relationships[J]. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2016, **24**(1): 179–194. DOI: 10.1109/TFUZZ.2015.2451692.
- [11] RAMOT D, MILO R, FRIEDMAN M, *et al.* Complex Fuzzy Sets[J]. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2002, **10**(2): 171–186. DOI: 10.1109/91.995119.
- [12] JANANI K, RAKKIYAPPAN R. Complex Probabilistic Fuzzy Set and Their Aggregation Operators in Group Decision Making Extended to TOPSIS[J]. *Eng Appl Artif Intell*, 2022, **114**: 105010. DOI: 10.1016/j.engappai.2022.105010.
- [13] SINGH P K. Complex Fuzzy Concept Lattice[J]. *Neural Process Lett*, 2019, **49**(3): 1511–1526. DOI: 10.1007/s11063-018-9884-7. 10.
- [14] YAZDANBAKHSH O, DICK S. A Systematic Review of Complex Fuzzy Sets and Logic[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 2018, **338**: 1–22. DOI: 10.1016/j.fss.2017.01.010.
- [15] ZHANG C, DING J J, ZHAN J M, *et al.* Incomplete Three-way Multi-attribute Group Decision Making Based on Adjustable Multigranulation Pythagorean Fuzzy Probabilistic Rough Sets[J]. *Int J Approx Reason*, 2022, **147**(C): 40–59. DOI: 10.1016/j.ijar.2022.05.004.
- [16] KAHNEMAN D, TVERSKY A. Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk[J]. *Econometrica*, 1979, **47**(2): 263. DOI: 10.2307/1914185.
- [17] BELL D E. Regret in Decision Making Under Uncertainty [J]. *Oper Res*, 1982, **30**(5): 961–981. DOI: 10.1287/opre.30.5.961.
- [18] WANG W J, ZHAN J M, ZHANG C, *et al.* A Regret-theory-based Three-way Decision Method with a Priori Probability Tolerance Dominance Relation in Fuzzy Incomplete Information Systems[J]. *Inf Fusion*, 2023, **89**: 382–396. DOI: 10.1016/j.inffus.2022.08.027.
- [19] WANG T X, LI H X, QIAN Y H, *et al.* A Regret-based Three-way Decision Model Under Interval Type-2 Fuzzy Environment[J]. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2022, **30**(1): 175–189. DOI: 10.1109/TFUZZ.2020.3033448.
- [20] ZHANG C, ZHANG J, LI W T, *et al.* A Regret Theory-based Multi-granularity Three-way Decision Model with Incomplete T-spherical Fuzzy Information and Its Application in Forest Fire Management[J]. *Appl Soft Comput*, 2023, **145**: 110539. DOI: 10.1016/j.asoc.2023.110539.
- [21] JIA F, LIU P D. A Novel Three-way Decision Model Under Multiple-criteria Environment[J]. *Inf Sci*, 2019, **471**: 29–51. DOI: 10.1016/j.ins.2018.08.051.
- [22] WANG Y C, YANG Y, WANG J P, *et al.* Examining the Influence of Social Norms on Orderly Parking Behavior of Dockless Bike-sharing Users[J]. *Transp Res A Policy Pract*, 2021, **147**: 284–296. DOI: 10.1016/j.tra.2021.03.022.
- [23] MOURATIDIS K. Bike-sharing, Car-sharing, E-scooters, and Uber: Who are the Shared Mobility Users and where do they Live?[J]. *Sustain Cities Soc*, 2022, **86**: 104161. DOI: 10.1016/j.scs.2022.104161.
- [24] 张超, 李德玉, 翟岩慧. 双论域上的犹豫模糊语言多粒度粗糙集及其应用[J]. 控制与决策, 2017, **32**(1)105–110. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1365
- ZHANG C, LI D Y, ZHAI Y H. Hesitant Fuzzy Linguistic Multigranulation Rough Set over Two Universes and Its Application[J]. *Control Decis*, 2017, **32**(1)105–110. DOI: 10.13195/j.kzyjc.2015.1365
- [25] XIA M M. A Hesitant Fuzzy Linguistic Multi-criteria Decision-making Approach Based on Regret Theory[J]. *Int J Fuzzy Syst*, 2018, **20**(7): 2135–2143. DOI: 10.1007/s40815-018-0502-7.
- [26] ZHANG C, DING J J, LI D Y, *et al.* A Novel Multi-granularity Three-way Decision Making Approach in Q-rung Orthopair Fuzzy Information Systems[J]. *Int J Approx Reason*, 2021, **138**: 161–187. DOI: 10.1016/j.ijar.2021.08.004.