

具有时滞的Holling-III型捕食系统的Hopf分支

张嘉祥,袁海龙*,樊雨

(陕西科技大学 数学与数据科学学院,陕西 西安 710021)

摘要:本文主要研究了一类满足齐次Neumann边界条件的具有时滞Holling-III型捕食-食饵系统。首先,以时滞参数作为分支参数,研究时滞效应对该系统正常数平衡点稳定性的影响,得到了产生Hopf分支的条件;其次,借助偏泛函微分方程的中心流形理论和标准型方法,得到了Hopf分支的方向和分支周期解的稳定性;最后,通过运用MATLAB软件的数值模拟功能,对文内所提出的理论结果进行了检验。

关键词:时滞;存在性;稳定性;数值模拟

中图分类号:O175.26 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2025)04-0677-15

Hopf Bifurcation in a Holling-III Predator System with Time Delay

ZHANG Jiexiang, YUAN Hailong*, FAN Yu

(School of Mathematics and Data Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China)

Abstract: In this paper, a Holling-III predator-prey system with time delay under the homogeneous Neumann boundary conditions is studied. Firstly, by choosing the time delay as the bifurcation parameter, we study the effect of time delay on the stability of the positive equilibrium point of the system, thereby the conditions for generating Hopf bifurcations are obtained. Secondly, with the aid of partial functional differential equations of center manifold theory and standard method, the direction of the Hopf bifurcations and stability of periodic solutions of a bifurcation are gained. Finally, by using the numerical simulation function of MATLAB software, the theoretical results proposed in the paper are tested.

Key words: time delay; existence; stability; numerical simulation

0 引言

在生物数学中,捕食-食饵模型具有重要的现实意义。最初的捕食-食饵系统是著名的Lotka-Volterra系统,考虑到饱和因素对捕食者消化食饵的影响,学者们提出了功能反应函数的概念,功能反应函数又分为食饵依赖型功能反应函数和捕食者依赖型功能反应函数。其中,Holling于1965年建立的Holling型的功能反应函数是经典的食饵依赖型功能反应函数^[1]。

在现实世界中,种群系统考虑到繁殖期、成熟周期、资源再生时间等等,时滞都是必不可少的因素。由于加入了时滞,系统比原先呈现了更加精彩的动力学行为。例如,一个原本稳定的平衡点,在加入时滞参数后,可能变得不稳定,在某些临界点处,可能会引起分支,时滞微分方程由此产

收稿日期:2023-06-05;**接受日期:**2024-01-08

基金项目:国家自然科学基金(11901370);陕西省自然科学基金(2019JQ-516);陕西省教育厅专项(19JK0142);陕西省科协人才托举项目(20200508);国家博士后基金(2019M653578)

作者简介:张嘉祥(2000-),男,山东菏泽人,硕士研究生,研究方向为生物数学。E-mail:zjx1023574091@163.com

* **通信作者:**袁海龙(YUAN Hailong),E-mail:yuanhailong@sust.edu.cn

引文格式:张嘉祥,袁海龙,樊雨.具有时滞的Holling-III型捕食系统的Hopf分支[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(4):677-691. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024011.

生。生物科学的许多文献中介绍了各种线性非线性的时滞微分方程和应用领域的背景,为时滞微分方程的深入研究提供了现实基础^[2-10]。分支问题是微分方程中的一个方向,分支现象一般分为两大类;动态分支和静态分支,我们主要研究比较重要的动态分支-Hopf分支,Hopf分支包括局部Hopf分支和全局Hopf分支,它主要是研究时滞微分方程周期轨的存在性和稳定性问题。

近来,王婷婷等^[11]对具有时滞的Holling-III型捕食模型进行了分析讨论,利用常微分方法,积分性质以及微分不等式理论分别证明了系统解的正性与有界性;其次通过Jacobian矩阵分析了在常微系统下平衡点的稳定性;讨论时滞的不同情况对内部平衡点的稳定性与Hopf分支的影响,最后推出判断Hopf分支的方向和分支周期解稳定性的显式公式,讨论了在临界值处分支周期解的方向、稳定性和周期。Xu等^[12]提出了一个具有Allee效应、时滞和反捕食行为的扩散捕食者-食饵模型,对系统平衡点进行了深入研究,分析讨论了其存在性和稳定性,同时获得了产生Hopf分支的条件,最后经过计算,得到了确定Hopf分支方向及其稳定性和周期的公式。Xie等^[13]提出了一类食饵具有强Allee效应和非局部竞争、捕食者具有恐惧效应和繁殖时滞的扩散捕食者-食饵模型。主要研究了共存平衡点的局部稳定性以及Hopf分支的存在性和性质。

Yan和Shi^[14]对Logistic单种群模型进行了研究,并分析讨论加入了两个时滞参数后的模型,同时研究发现由于Hopf分支的原因,模型的正平衡点稳定性会发生改变最终变为不稳定。文献[15]中,沈维认为Logistic单种群模型出现稳定性切换的主要原因是时滞项 $cu(t-2\tau)$ 的出现,进而研究了以下模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u\left(1 - \frac{u(t-\tau)}{K}\right) - \frac{mu^2v}{1+u^2}, & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = -\theta v + \frac{mu^2v}{1+u^2}, & t > 0, \\ u(0) \geq 0, v(0) \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

通常而言,在具有单时滞的捕食系统中,随着时滞的引入,由于Hopf分支的原因,模型的正平衡点稳定性会发生改变最终变为不稳定。针对这一问题,为了研究在单一时滞系统中,时滞的增加使得平衡点的稳定性发生了什么变化,最终是否能够稳定^[16-20]。本文考虑在没有时滞项 $cu(t-2\tau)$ 且不增加捕食者时滞的情况下,研究系统的稳定性变化和时滞效应对食饵种群的影响。并在系统(1)的基础上考虑模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = u\left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{mu^2v(t-\tau)}{1+u^2}, & t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = -\theta v + \frac{mu^2v}{1+u^2}, & t > 0, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & t > 0, \\ u(0) \geq 0, v(0) \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 Δ 代表拉普拉斯算子; $\partial\Omega$ 为光滑边界; $\Omega \subset R^N(N \geq 1)$ 为边界为 $\partial\Omega$ 的有界开集; ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; u 表示捕食者的数量; v 表示猎物的数量; d_1 表示捕食者的扩散系数; d_2 表示猎物的扩散系数; $K(u < K)$ 是猎物的承载能力; m 是攻击系数; $\theta > 0$ 是捕食者的死亡率; $\tau > 0$ 代表时滞参数。

本研究是针对一类满足齐次Neumann边界条件的具有时滞Holling-III型捕食-食饵系统,深入探讨了该系统对应的常微分及偏微分系统,研究该系统中正常数平衡点的稳定性关于时滞参数的变化,并且对平衡点附近是否产生Hopf分支、如何产生Hopf分支做了计算工作,同时经过计算得到了分支周期解的稳定性和分支方向;最后得出,系统的稳定性会随着时滞参数的变化而变化,当时滞参数经过某特殊的临界值,此时系统由稳定变为不稳定,同时伴随着Hopf分支的出现。

本文结构安排如下:第1节主要针对具有时滞的Holling-III型捕食系统所对应的常微分和偏

微分系统,对系统中产生Hopf分支的条件和系统在正常数平衡点附近是否处于稳态问题进行了讨论;第2节分析了Hopf分支的方向和分支周期解的稳定性;第3节进行数值模拟验证前面结论。

1 具有时滞的系统中Hopf分支的存在性和正常数平衡点的稳定性

1.1 具时滞的常微分方程

本节内容将对具有时滞参数的常微分方程系统进行探讨,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{mu^2v(t-\tau)}{1+u^2}, & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = -\theta v + \frac{mu^2v}{1+u^2}, & t > 0, \\ u(t) = u_0(t) \geq 0, v(t) = v_0(t) \geq 0, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

经过计算得到,该系统的平衡点为 $E_0(0,0), E_k(K,0)$,观察参数 m ,发现当 $m > \theta$ 时,系统(3)存在正平衡点

$$E_* = (u_*, v_*) = \left(\sqrt{\frac{\theta}{m-\theta}}, \frac{K\sqrt{\theta(m-\theta)} - \theta}{K\theta(m-\theta)} \right).$$

接下来讨论系统(3)的正常数平衡点,发现当没有时滞参数($\tau=0$)时,若满足条件 $0 < K < \frac{2\theta\sqrt{m-\theta}}{2\theta-m}$,则可以观察到,正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 此时具有局部渐近稳定性。不过,我们的研究重点在于考察时滞 $\tau(\tau \neq 0)$ 因素对系统(3)中正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 稳定性呈现的作用及其影响,下面进行讨论。

令 $\hat{u} = u - u_*, \hat{v} = v - v_*$,为了分析方便,我们把系统(3)转换为更为简易的形式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (u + u_*) \left(1 - \frac{u + u_*}{K} \right) - \frac{m(u + u_*)^2(v_\tau + v_*)}{1 + (u + u_*)^2}, & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = -\theta(v + v_*) + \frac{m(u + u_*)^2v}{1 + (u + u_*)^2}, & t > 0, \\ u(t) = u_0(t) \geq 0, v(t) = v_0(t) \geq 0, & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4)$$

其中 $u = u(t), v = v(t), v_\tau = v(t - \tau)$ 。我们将系统(4)在 $(0,0)$ 处进行展开,得到该系统的线性化系统为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left[1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} \right] u(t) - \theta v(t - \tau), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} u(t). \end{cases}$$

下面计算该系统的特征方程

$$\lambda^2 - A\lambda + Be^{-\lambda\tau} = 0, \quad (5)$$

其中,

$$A = 1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2}, B = \frac{2m\theta u_*v_*}{(1+u_*^2)^2}.$$

结合特征方程(5)的纯虚根 $\lambda = i\omega(\omega > 0)$ 可得

$$\begin{cases} \omega^2 = B \cos \omega\tau, \\ -A\omega = B \sin \omega\tau. \end{cases} \quad (6)$$

根据三角函数定理对式(6)变形,

$$\omega^4 + A^2\omega^2 - B^2 = 0, \tag{7}$$

$$A^2 = \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2}\right)^2, -B^2 = \frac{-4m^2u_*^2v_*^2}{(1+u_*^2)^4},$$

显然, $-B^2 < 0$ 是一定存在的, 这意味着方程(7)至少存在一个大于0的根 ω_0 满足

$$\omega_0^2 = \frac{-A^2 + \sqrt{A^4 + 4B^2}}{2}.$$

将 ω_0 代入式(6), 可以解得

$$\tau = \tau_0^j = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{\omega_0^2}{B\theta} + \frac{2j\pi}{\omega_0}, j \in N.$$

下面验证横截条件。令

$$\Gamma(\omega) = \omega^4 + A^2\omega^2 - B^2,$$

对其求导得

$$\frac{d\Gamma}{d\omega} = 2\omega(2\omega^2 + A^2),$$

有

$$\left. \frac{d\Gamma}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = 2\omega_0\sqrt{A^4 + 4B^2\theta^2} > 0.$$

故当 $\omega = \omega_0$ 时, 满足横截条件, 得到定理1。

定理1 若 $0 < K < \frac{2\theta\sqrt{\frac{\theta}{m-\theta}}}{2\theta-m}$, 有

- (1) 当 $\tau < \tau_0^0$ 时, 系统(3)在正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 处局部渐近稳定;
- (2) 当 $\tau > \tau_0^0$ 时, 系统(3)在正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 处不稳定;
- (3) 当 $\tau = \tau_0^0$ 时, 系统(3)在正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 处产生 Hopf 分支。

1.2 具时滞的偏微分方程

本节主要考虑偏微分方程, 该系统定义在 $\Omega = (0, l\pi)$ 上, 并且带有时滞

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{mu^2v(t-\tau)}{1+u^2}, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\theta v + \frac{mu^2v}{1+u^2}, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0, & x = 0, l\pi, t > 0, \\ u(x,t) = u_0(x,t) \geq 0, v(x,t) = v_0(x,t) \geq 0, & x \in [0, l\pi], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{8}$$

其中 $l \in \mathbf{R}^+$ 。设 $\hat{u} = u - u_*$, $\hat{v} = v - v_*$, 为了分析方便, 仍用 u, v 代替 \hat{u}, \hat{v} , 并把系统(8)转换为更为简易的形式

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} = (u + u_*) \left(1 - \frac{u + u_*}{K}\right) - \frac{m(u + u_*)^2(v_\tau + v_*)}{1 + (u + u_*)^2}, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ v_t - d_2 v_{xx} = -\theta(v + v_*) + \frac{m(u + u_*)^2(v + v_*)}{1 + (u + u_*)^2}, & x \in (0, l\pi), t > 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0, & x = 0, l\pi, t > 0, \\ u(x,t) = u_0(x,t) \geq 0, v(x,t) = v_0(x,t) \geq 0, & x \in [0, l\pi], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{9}$$

系统(9)中 $u = u(t), v = v(t), v_\tau = v(t - \tau)$ 。我们规定 $X = C([0, l\pi], \mathbf{R}^2)$ 并表明系统(9)在抽象

空间 $C([-\tau, 0], X)$ 中可以等效改写为抽象微分方程形式, 形式如下

$$\frac{dU(t)}{dt} = d\Delta U(t) + L(U_t) + F(U_t), \quad (10)$$

其中 $d\Delta = (d_1\Delta, d_2\Delta)^T$, $\text{dom}(d\Delta) = \{(u, v)^T: u, v \in C^2([0, l\pi], \mathbf{R}), u_x, v_x = 0, x = 0, l\pi\}$ 。

因为 $L: C([-\tau, 0], X) \rightarrow X, F: C([-\tau, 0], X) \rightarrow X$, 对 $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in C([-\tau, 0], X)$, 存在

$$L(\phi) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}\right)\phi_1(0) - \theta\phi_2(-\tau) \\ \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}\phi_1(0) \end{pmatrix}, F(\phi) = \begin{pmatrix} F_1(\phi) \\ F_2(\phi) \end{pmatrix},$$

其中

$$F_1(\phi) = (\phi_1(0) + u_*) \left(1 - \frac{\phi_1(0) + u_*}{K}\right) - \frac{m(\phi_1(0) + u_*)^2(\phi_2(-\tau) + v_*)}{1 + (\phi_1(0) + u_*)^2} - \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}\right)\phi_1(0) + \theta\phi_2(-\tau),$$

$$F_2(\phi) = -\theta(\phi_2(0) + v_*) + \frac{m(\phi_1(0) + u_*)^2(\phi_2(0) + v_*)}{1 + (\phi_1(0) + u_*)^2} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}\phi_1(0),$$

于是我们得到系统(9)在 $(0, 0)$ 处附近的线性化系统, 即为

$$\frac{dU(t)}{dt} = d\Delta U(t) + L(U_t). \quad (11)$$

该系统的特征方程可以等价转化为

$$\lambda y - d\Delta y - L(e^{\lambda t} y) = 0, y \in \text{dom}(d\Delta), y \neq 0. \quad (12)$$

由以下问题

$$-\phi'' = \mu\phi, x \in (0, l\pi), \phi'(0) = \phi'(l\pi) = 0,$$

我们可以求得上述式子中的特征值为 $\mu_n = \frac{n^2}{l^2}$ ($n \in N$) 及特征值对应的特征函数为 $\phi_n(x) = \cos \frac{n}{l}x$ 。

将 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n}{l}x \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}$ 代入系统(11)特征方程的等价转化方程, 即特征方程(12), 得到

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2} - \frac{d_1n^2}{l^2} & -\theta e^{-\lambda\tau} \\ \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2} & -\frac{d_2n^2}{l^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}, n \in N.$$

同时可以求得特征方程(12)的所有特征根, 并且我们确定这些特征根满足下述特征方程关系式

$$\lambda^2 + A_n\lambda + B e^{-\lambda\tau} + C_n = 0, n \in N, \quad (13)$$

其中 $A_n = (d_1 + d_2) \frac{n^2}{l^2} - 1 + \frac{2u_*}{K} + \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}$, $B = \frac{2m\theta u_*v_*}{(1+u_*^2)^2}$, $C_n = -\frac{d_2n^2}{l^2} \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2} - \frac{d_1n^2}{l^2}\right)$ 。

设特征方程(13)存在一对纯虚根, 为 $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$), 则有

$$\begin{cases} \omega^2 - C_n = B \cos \omega\tau, \\ \omega A_n = B \sin \omega\tau, \end{cases} n \in N. \quad (14)$$

我们经过一系列化简可以求得

$$\omega^4 + (A_n^2 - 2C_n)\omega^2 + C_n^2 - B^2 = 0, n \in N, \quad (15)$$

$$A_n^2 - 2C_n = \left[(d_1 + d_2) \frac{n^2}{l^2} - 1 + \frac{2u_*}{K} + \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2} \right]^2 + 2 \frac{d_2n^2}{l^2} \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2} - \frac{d_1n^2}{l^2}\right), \quad (16)$$

$$C_n^2 - B^2 = \frac{d_2^2 n^4}{l^4} \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)} - \frac{d_1 n^2}{l^2} \right)^2 - \frac{4m^2 \theta^2 u_*^2 v_*^2}{(1+u_*^2)^4} \tag{17}$$

由于当 $n=0$ 时满足 $C_0^2 - B^2 < 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n^2 - B^2) = \infty$, 那么一定会有一个最小的 $N_0 \geq 0$, 存在一个 n , 使得当 $n > N_0$ 时, 方程(15)的正根不存在, 当 $0 \leq n \leq N_0$ 时, 方程(15)至多存在一个正根。对于 $0 \leq n \leq N_0$, 方程(15)存在一个特定的正根 ω_n 使得

$$\omega_n^2 = \frac{-(A_n^2 - 2C_n) + \sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{2} \tag{18}$$

从而, 能够对时滞参数 τ 的表达式进行明确定义, 形式如下

$$\tau = \tau_n^j = \tau_n^0 + \frac{2j\pi}{\omega_n}, j \in N, \tag{19}$$

其中

$$\tau_n^0 = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \arccos \frac{\omega_n^2 - C_n}{B}, & A_n \geq 0, \\ \frac{1}{\omega_n} \left(2\pi - \arccos \frac{\omega_n^2 - C_n}{B} \right), & A_n < 0, \end{cases} \tag{20}$$

此时, 方程(13)有一对纯虚特征根 $\pm i\omega_n$ 。

引理 1 我们设方程(13)的根是 $\lambda_n(\tau) = \alpha_n(\tau) + i\omega_n(\tau)$, 并且时滞参数当 τ 逼近 τ_n^j 时, 使得 $\alpha_n(\tau_n^j) = 0$ 和 $\omega_n(\tau_n^j) = \omega_n$ 成立, 此时满足横截条件, 即当 $0 \leq n \leq N_0$ 和 $j \in N$ 成立时, 可以推得有 $\frac{d\alpha_n}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} > 0$ 成立。

证明 对方程(13)两边同时关于 τ 求导, 得到

$$\frac{d\lambda_n}{d\tau} = \frac{B\lambda_n e^{-\lambda_n \tau}}{2\lambda_n - B\tau e^{-\lambda_n \tau} + A_n}, \tag{21}$$

并将 $\tau = \tau_n^j$ 代入上式中得

$$\frac{d\lambda_n}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} = \frac{Bi\omega_n e^{-i\omega_n \tau_n^j}}{2i\omega_n - B\tau_n^j e^{-i\omega_n \tau_n^j} + A_n}, \tag{22}$$

又

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} = \text{Re} \left(\frac{d\lambda_n}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} \right),$$

结合式(22)有

$$\text{Re} \left(\frac{d\lambda_n}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{(A_n^2 - 2C_n^2) - 4(C_n^2 - B^2)}}{B^2} > 0,$$

横截条件成立, 证毕。

根据式(19)易得 $\tau_n^{j+1} > \tau_n^j$ 。接下来给出 τ_n^j 关于 n 的单调性。

引理 2 设 $0 < K < \frac{2\theta \sqrt{m-\theta}}{2\theta - m}$, 则当 $0 \leq n \leq N_0, j \in N$ 时有 $\tau_{n+1}^j > \tau_n^j$ 成立。

证明 对式(18)进行变形, 有

$$\omega_n^2 = \frac{-(A_n^2 - 2C_n) + \sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{(A_n^2 - 2C_n)^2}{(B^2 - C_n^2)^2} + \frac{4}{B^2 - C_n^2} + \frac{A_n^2 - 2C_n}{B^2 - C_n^2}}},$$

由式(16)和式(17)可以求得 $A_n^2 - 2C_n$ 和 $C_n^2 - B^2$ 。通过计算我们得到 $K < \frac{2\theta \sqrt{\frac{\theta}{m-\theta}}}{2\theta - m}$, 因此当 $0 \leq n \leq N_0, j \in N$ 时, $A_n^2 - 2C_n$ 关于 n 是严格递增的, $C_n^2 - B^2$ 关于 n 是严格递减的。由此可知 $\omega_{n+1}^2 < \omega_n^2$, 同时存在 $A_n > 0$, 故由式(20)得 $\tau_n^0 = \frac{1}{\omega_n} \arccos \frac{\omega_n^2 - C_n}{B}$, 则当 $0 \leq n \leq N_0, j \in N$ 时有 $\tau_{n+1}^0 > \tau_n^0$, 又因为 $\omega_{n+1} < \omega_n$, 则由 τ 的表达式可知 $\tau_{n+1}^j > \tau_n^j$, 其中, $0 \leq n \leq N_0, j \in N$ 。证毕。

选取参数 $K = 5, m = 0.7, \theta = 0.4, d_1 = 0.07, d_2 = 0.05$, 给出引理 2 中的 τ_n^j 关于 n 的单调性具体分析, 如图 1。

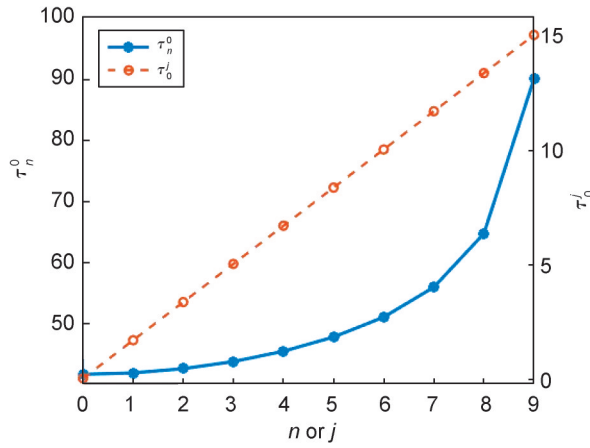


图 1 参数 $K = 5, m = 0.7, \theta = 0.4, d_1 = 0.07, d_2 = 0.05$ 时, τ_n^j 单调性图像

Fig. 1 The monotonic graph of τ_n^j , when parameters $K = 5, m = 0.7, \theta = 0.4, d_1 = 0.07, d_2 = 0.05$

因此经过上述分析, 可以得到定理 2。

定理 2 设 $0 < K < \frac{2\theta \sqrt{\frac{\theta}{m-\theta}}}{2\theta - m}, C_0^2 - B^2 < 0$, 则可得

- (1) 当 $\tau \in [0, \tau_0^0)$, 此时系统(8)在正常数平衡点 $E^*(u_*, v_*)$ 处处于局部渐近稳定状态;
- (2) 当 $\tau \in (\tau_0^0, \infty)$, 此时系统(8)在正常数平衡点 $E^*(u_*, v_*)$ 处处于不稳定状态;
- (3) 当 $\tau = \tau_n^j (0 \leq n \leq N_0, j \in N)$, 此时系统(8)在正常数平衡点 $E^*(u_*, v_*)$ 处产生 Hopf 分支。

2 Hopf 分支方向和稳定性

本节对时滞参数 $\tau = \tau_0 \equiv \tau_0^0$ 时的 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性进行了分析讨论。令 $\tau = \tau_0 + \mu$, 并将 $t = \tilde{t}$ 代入抽象微分方程(10), 为方程形式简明, 将 \tilde{t} 记为 t , 得到如下方程

$$\frac{dU(t)}{dt} = \tau_0 d\Delta U(t) + \tau_0 L_0(U_t) + G(U_t, \mu), \tag{23}$$

其中对于 $\phi \in C([-1, 0], X)$ 有

$$L_0(\phi) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}\right)\phi_1(0) - \theta\phi_2(-1) \\ \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}\phi_1(0) \end{pmatrix},$$

$$G(\phi, \mu) = \mu d\Delta\phi(0) + \mu L_0(\phi) + (\mu + \tau_0)F_0(\phi),$$

$$F_0(\phi) = \begin{pmatrix} (\phi_1(0)+u_*) \left(1 - \frac{\phi_1(0)+u_*}{K} \right) - \frac{m(\phi_1(0)+u_*)^2(\phi_2(-\tau)+v_*)}{1+(\phi_1(0)+u_*)^2} + \left(1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} \right) \phi_1(0) + \theta\phi_2(-\tau) \\ -\theta(\phi_2(0)+v_*) + \frac{m(\phi_1(0)+u_*)^2(\phi_2(0)+v_*)}{1+(\phi_1(0)+u_*)^2} - \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} \phi_1(0) \end{pmatrix}.$$

同时在(0,0)处对系统(9)进行线性化处理,得到相应的线性化系统为

$$\frac{dU(t)}{dt} = \tau_0 d\Delta U(t) + \tau_0 L_0(U_t). \tag{24}$$

根据先前节所述,可以确认线性化系统(24)存在特征值±iω₀τ₀。根据里斯表示定理,存在2×2的有界变差函数矩阵η(θ,μ)(θ∈[-1,0])使得

$$(\tau_0 + \mu)L_0(\phi) = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta), \phi(\theta) \in C([-1, 0], \mathbf{R}^2),$$

其中

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} 1 - \frac{2u_*}{K} - \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2} & 0 \\ \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2} & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta) - (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + 1),$$

同时对δ(θ):[-1,0]→(X,X),(X,X)表示双线性型的定义域,有

$$\delta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0), \\ -1, & \theta = 0. \end{cases}$$

下面定义算子A(0),若满足条件φ(θ)∈C¹([-1,0],R²),则规定A(0)为

$$A(0)(\phi(\theta)) = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\phi(\theta), & \theta = 0. \end{cases}$$

定义算子A*,若满足条件ψ(s)∈C¹([-1,0],(R²)*),则规定A*为

$$A^*(\psi(s)) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 \psi(-s)d\eta(\theta, 0), & s = 0. \end{cases}$$

对于u=(u₁,u₂),v=(v₁,v₂)∈X=C([0,lπ],R²),我们规定其内积如下

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{l\pi} \int_0^{l\pi} u_1 \bar{v}_1 dx + \frac{1}{l\pi} \int_0^{l\pi} u_2 \bar{v}_2 dx.$$

另外,对于φ(θ)∈C¹([-1,0],R²)和ψ(s)∈C¹([-1,0],(R²)*)引入如下双线性型的情形

$$\langle \phi(\theta), \psi(s) \rangle_0 = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{\psi}(\xi - \theta)d\eta(\theta, 0)\phi(\xi)d\xi.$$

我们得到A(0)和A*的定义为一对双线性形式下的伴随算子。通过计算,求得算子A(0)和A*的特征值为±iω₀τ₀,令A(0)的特征值iω₀τ₀的特征向量为q(θ),令A*的特征值-iω₀τ₀的特征向量为q*(s),同时使得

$$A(0)q(\theta) = i\omega_0\tau_0q(\theta), A^*q^*(s) = -i\omega_0\tau_0q^*(s),$$

然后得到q(θ)和q*(s)的表达式如下

$$q(\theta) = (q_1, q_2)^T e^{i\omega_0\tau_0\theta} (\theta \in [-1, 0]), q^*(s) = \frac{1}{D} (q_1^*, q_2^*) e^{i\omega_0\tau_0s} (s \in [-1, 0]).$$

根据A(0)和A*的定义计算可得

$$(q_1, q_2) = \left(1, \frac{i\omega_0 - 1 + \frac{2u_*}{K} + \frac{2mu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}}{\theta e^{-i\omega_0\tau_0}} \right),$$

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(1, -\frac{i\theta}{\omega_0} \right).$$

对于 $q(\theta)$ 和 $q^*(s)$, 当 $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle_0 = 1, \langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle_0 = 0$ 时, 则有

$$D = 1 + \frac{-\omega_0 - i + \frac{2iu_*}{K} + \frac{2imu_*v_*}{1+(u_*^2)^2}}{\omega_0 e^{-i\omega_0\tau_0}} - i\tau_0\omega_0 + \tau_0 - \frac{2u_*\tau_0}{K} - \frac{2mu_*v_*\tau_0}{1+(u_*^2)^2}.$$

接下来考虑系统 (24) 的中心子空间, 设为 $Y = \{(zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)): z \in C\}$, 在系统 (23) 中令 $\mu = 0$, 我们得以确立一个相应的中心流形存在, 为

$$W(z, \bar{z}) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(3),$$

其中 $O(3) = O(\|(z, \bar{z})\|^3)$.

令 $\phi = (q(\theta), \bar{q}(\theta)), \psi = (q^*(s), \bar{q}^*(s))^T$, 同时系统 (23) 在中心流形中的流可表述为以下形式

$$u_i = \phi(z(t), \bar{z}(t))^T + W(z(t), \bar{z}(t)) = zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) + W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(3).$$

由内积公式得 $\langle \phi, f_0 \rangle = (\langle \phi, f_0^1 \rangle, \langle \phi, f_0^2 \rangle)^T$, 其中

$$\phi \in C([-1, 0], X), f_0 = (f_0^1, f_0^2)^T, f_0^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此, 当 $\mu = 0$ 有

$$\frac{\partial z}{\partial t} = i\omega_0\tau_0 z(t) + \bar{q}^*(0) \langle G(U, 0), f_0 \rangle = i\omega_0\tau_0 z(t) + g(z, \bar{z}),$$

其中

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) \langle G(U, 0), f_0 \rangle = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2\bar{z}}{2} + O(4), \tag{25}$$

式中 $O(4) = O(\|(z, \bar{z})\|^4)$. 根据 $G(\phi, \mu)$ 的表达式可知 $G(\phi, 0) = \tau_0 F_0(\phi) = \tau_0 (G_1, G_2)^T$, 其中

$$G_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K} + \frac{mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1+u_*^2)^3} \right) \phi_1^2(0) - \frac{2mu_*}{(1+u_*^2)^2} \phi_1(0)\phi_2(-1) + \frac{4mu_*v_*(1-u_*^2)}{(1+u_*^2)^4} \phi_1^3(0) + \frac{m(3u_*^2 - 1)}{(1+u_*^2)^3} \phi_1^2(0)\phi_2(-1) + O(4), \tag{26}$$

$$G_2 = -\frac{m(3u_*^2 - 1)}{(1+u_*^2)^3} \phi_1^2(0) + \frac{2mu_*}{(1+u_*^2)^2} \phi_1(0)\phi_2(0) + \frac{4mu_*v_*(u_*^2 - 1)}{(1+u_*^2)^4} \phi_1^3(0) + \frac{m(3u_*^2 - 1)}{(1+u_*^2)^3} \phi_1^2(0)\phi_2(0) + O(4), \tag{27}$$

式中 $O(4) = O(\|(u, v)\|^4)$.

由式 (25) 一式 (27) 可得

$$g_{20} = \frac{2\bar{q}_1^*\tau_0}{D} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K} + \frac{mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1+u_*^2)^3} \right) q_1^2 - \frac{2mu_*}{(1+u_*^2)^2} q_1 q_2 e^{-i\omega_0\tau_0} \right] + \frac{2\bar{q}_2^*\tau_0}{D} \left[-\frac{m(3u_*^2 - 1)}{(1+u_*^2)^3} q_1^2 + \frac{2mu_*}{(1+u_*^2)^2} q_1 q_2 \right],$$

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \frac{\bar{q}_1^* \tau_0}{D} \left[\left(1 - \frac{2}{K} + \frac{2mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} \right) q_1 \bar{q}_1 - \frac{2mu_*}{(1 + u_*^2)^2} (q_1 \bar{q}_2 e^{i\omega_0 \tau_0} + \bar{q}_1 q_2 e^{-i\omega_0 \tau_0}) \right] + \\
 &\quad \frac{\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[-2 \frac{mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} q_1 \bar{q}_1 + \frac{2mu_*}{(1 + u_*^2)^2} (q_1 \bar{q}_2 + \bar{q}_1 q_2) \right], \\
 g_{02} &= \frac{2\bar{q}_1^* \tau_0}{D} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K} + \frac{mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} \right) \bar{q}_1^2 - \frac{2mu_*}{(1 + u_*^2)^2} \bar{q}_1 \bar{q}_2 e^{i\omega_0 \tau_0} \right] + \\
 &\quad \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[-\frac{mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} \bar{q}_1^2 + \frac{2mu_*}{(1 + u_*^2)^2} \bar{q}_1 \bar{q}_2 \right], \\
 g_{21} &= \frac{2\bar{q}_1^* \tau_0}{D} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K} + \frac{mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} \right) (2q_1 W_{11}^1(0) + \bar{q}_1 W_{20}^1(0)) \right] - \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{2mu_*}{(1 + u_*^2)^2} (2q_1 W_{11}^2(-1) + \bar{q}_1 W_{20}^2(-1) + \bar{q}_2 W_{20}^1(0) e^{-i\omega_0 \tau_0} + 2q_2 e^{i\omega_0 \tau_0} W_{11}^1(0)) \right] + \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{4mu_* v_*(1 - u_*^2)}{(1 + u_*^2)^4} (6q_1 W_{11}^1(0) + 3q_1^2 \bar{q}_1 + \bar{q}_1 W_{20}^1(0)) \right] + \left[\frac{m(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} (q_1^2 \bar{q}_2 e^{i\omega_0 \tau_0} + 2q_1 q_2 \bar{q}_1 e^{-i\omega_0 \tau_0}) \right] \right\} + \\
 &\quad \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left\{ \left[-\frac{mv_*(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} (2q_1 W_{11}^1(0) + \bar{q}_1 W_{20}^1(0)) \right] + \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{2mu_*}{(1 + u_*^2)^2} (2q_1 W_{11}^2(0) + \bar{q}_1 W_{20}^2(0) + \bar{q}_2 W_{20}^1(0) + 2q_2 W_{11}^1(0)) \right] + \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{4mu_* v_*(1 - u_*^2)}{(1 + u_*^2)^4} (6q_1 W_{11}^1(0) + 3q_1^2 \bar{q}_1 + \bar{q}_1 W_{20}^1(0)) \right] + \left[\frac{m(3u_*^2 - 1)}{(1 + u_*^2)^3} (q_1^2 \bar{q}_2 + 2q_1 q_2 \bar{q}_1) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

为了得到 g_{21} 的值,需计算 $W_{20}(\theta)$ 和 $W_{11}(\theta)$ 。由于 $W(z(t), \bar{z}(t))$ 满足

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A(0)W + X_0 G(u, 0) - \phi < \phi, \tag{28}$$

$$\langle X_0 G(u, 0), f_0 \rangle \cdot f_0 = A(0)W + H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z \bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(3),$$

式中 $O(3) = O(\|(z, \bar{z})\|^3)$, $X_0 = \begin{cases} O, \theta \in [-1, 0) \\ I, \theta = 0, \end{cases}$ I 为单位矩阵,通过链式法则

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W(z, \bar{z})}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial W(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial t},$$

可得

$$H_{20} = [2i\omega_0 \tau_0 - A(0)]W_{20}, H_{11} = -A(0)W_{11}, H_{02} = [-2i\omega_0 \tau_0 - A(0)]W_{02}. \tag{29}$$

当 $\theta \in [-1, 0)$ 时,由式(28)可得

$$-\phi < \phi, \langle X_0 G(u, 0), f_0 \rangle \cdot f_0 = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z \bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(3),$$

其中 $O(3) = O(\|(z, \bar{z})\|^3)$, 则当 $\theta \in [-1, 0)$ 时,有

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta), H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \tag{30}$$

结合式(29)和式(30)得到微分方程

$$\frac{dW_{20}(\theta)}{d\theta} = 2i\omega_0 \tau_0 W_{20}(\theta) + g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta), \frac{dW_{11}(\theta)}{d\theta} = g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \tag{31}$$

由此可得微分方程(31)的解为

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\omega_0 \tau_0} q(\theta) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0 \tau_0} \bar{q}(\theta) + K_1 e^{2i\omega_0 \tau_0 \theta}, W_{11}(\theta) = \frac{ig_{11}}{\omega_0 \tau_0} q(\theta) + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0 \tau_0} \bar{q}(\theta) + K_2.$$

当 $\theta = 0$ 时,由式(29)和

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + \tau_0 K_1^{(2)}, H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau_0 K_2^{(2)},$$

可得 $K_1 = K_1^{(1)} \cdot K_1^{(2)}, K_2 = K_2^{(1)} \cdot K_2^{(2)}$, 其中

$$K_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2i\omega_0 - 1 + \frac{2u_*}{K} + \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} & -\theta e^{-2i\omega_0\tau_0} \\ \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} & 2i\omega_0 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$K_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K} + \frac{mv_*(3u_*^2-1)}{(1+u_*^2)^3}\right)q_1^2 + \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2}q_1q_2e^{-i\omega_0\tau_0} \\ -\frac{mv_*(3u_*^2-1)}{(1+u_*^2)^3}q_1^2 + \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2}q_1q_2 \end{pmatrix},$$

$$K_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2u_*}{K} + \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} & -\theta \\ \frac{2mu_*v_*}{(1+u_*^2)^2} & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$K_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2}{K} + \frac{2mv_*(3u_*^2-1)}{(1+u_*^2)^3}\right)q_1\bar{q}_1 - \frac{2mu_*}{(1+u_*^2)^2}(q_1\bar{q}_2e^{i\omega_0\tau_0} + \bar{q}_1q_2e^{-i\omega_0\tau_0}) \\ -2\frac{mv_*(3u_*^2-1)}{(1+u_*^2)^3}q_1\bar{q}_1 + \frac{2mu_*}{(1+u_*^2)^2}(q_1\bar{q}_2 + \bar{q}_1q_2) \end{pmatrix},$$

最后得到了 g_{21} 的表达式。在综合前述理论分析之后,我们得以推导出一系列用以确定 Hopf 分支方向及其周期解稳定性参数的数值。

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0\tau_0^0} \left(g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}, \mu_2 = \frac{\text{Re}(C_1(0))}{\text{Re}(\lambda'(\tau_0^0))},$$

$$\beta_2 = 2\text{Re}(C_1(0)), T_2 = -\frac{\text{Im}(C_1(0)) + \mu_2\text{Im}(\lambda'(\tau_0^0))}{\omega_0\tau_0^0}.$$

因此,我们得出了定理3。

定理3 针对模型(8),有

- (1) Hopf 分支方向由 μ_2 决定,当 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$) 时,分支方向超临界的(次临界的);
- (2) 分支周期解的稳定性由 β_2 决定,当 $\beta_2 < 0$ 时,分支周期解渐近稳定,当 $\beta_2 > 0$ 时,分支周期解不稳定;
- (3) 分支周期解的周期由 T_2 决定,当 $T_2 > 0$ 时,周期增大,当 $T_2 < 0$ 时,周期减少。

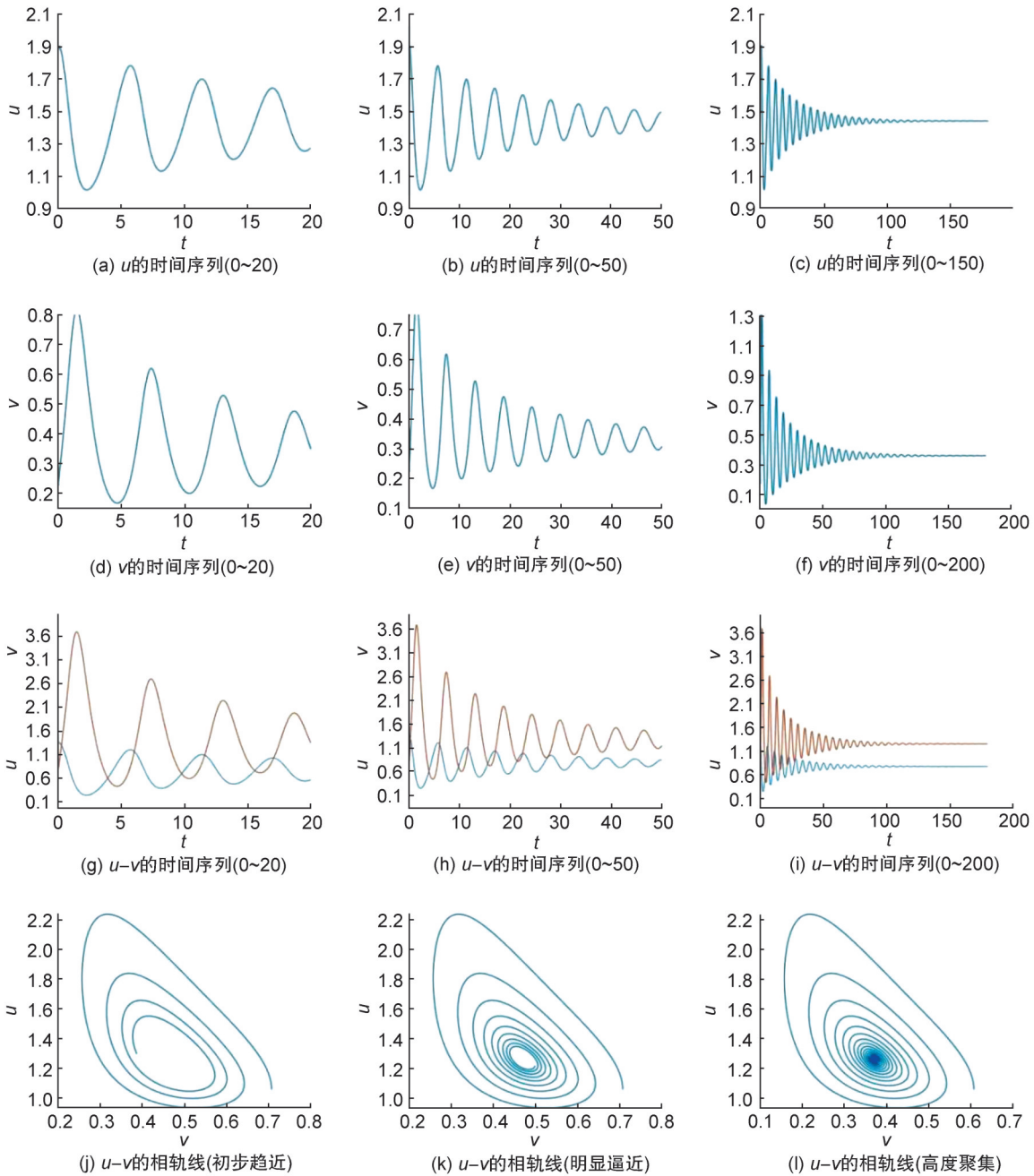
3 数值模拟

本节通过运用 MATLAB 软件对先前推导的理论成果进行了进一步的检验。

对于系统(2)进行参数分析时,本研究选定参数 K, m, θ 分别赋值为 $K = 3, m = 3, \theta = 2$,在此参数条件下,通过精确计算,得到了正常数平衡点为 $E_*(u_*, v_*) = (1.414, 0.374)$,同时满足条件

$0 < K < \frac{2\theta\sqrt{\frac{\theta}{m-\theta}}}{2\theta-m}$, 且获得 τ_0^0 的取值, $\tau_0^0 = 1.3046$, 取 $\tau = 0.7 < \tau_0^0$, 因此由定理1可以归纳判断,在给定的参数条件下,系统(2)中所推导出的正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 确实表现出局部渐近稳定的性质,图2分别给出 t 取不同值时的情形。

对参数 K, m, θ 分别赋值为 $K = 3, m = 3, \theta = 2$,在此参数条件下,正常数平衡点为 $E_*(u_*, v_*) = (1.414, 0.374)$,取 $\tau = 1.4 > \tau_0^0$,由定理1知,正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 失去稳定性,此时系



注:参数 $\tau=0.7 < \tau_0^0$,初值取 $(u_0, v_0)=(0.707, 0.457)$ 。

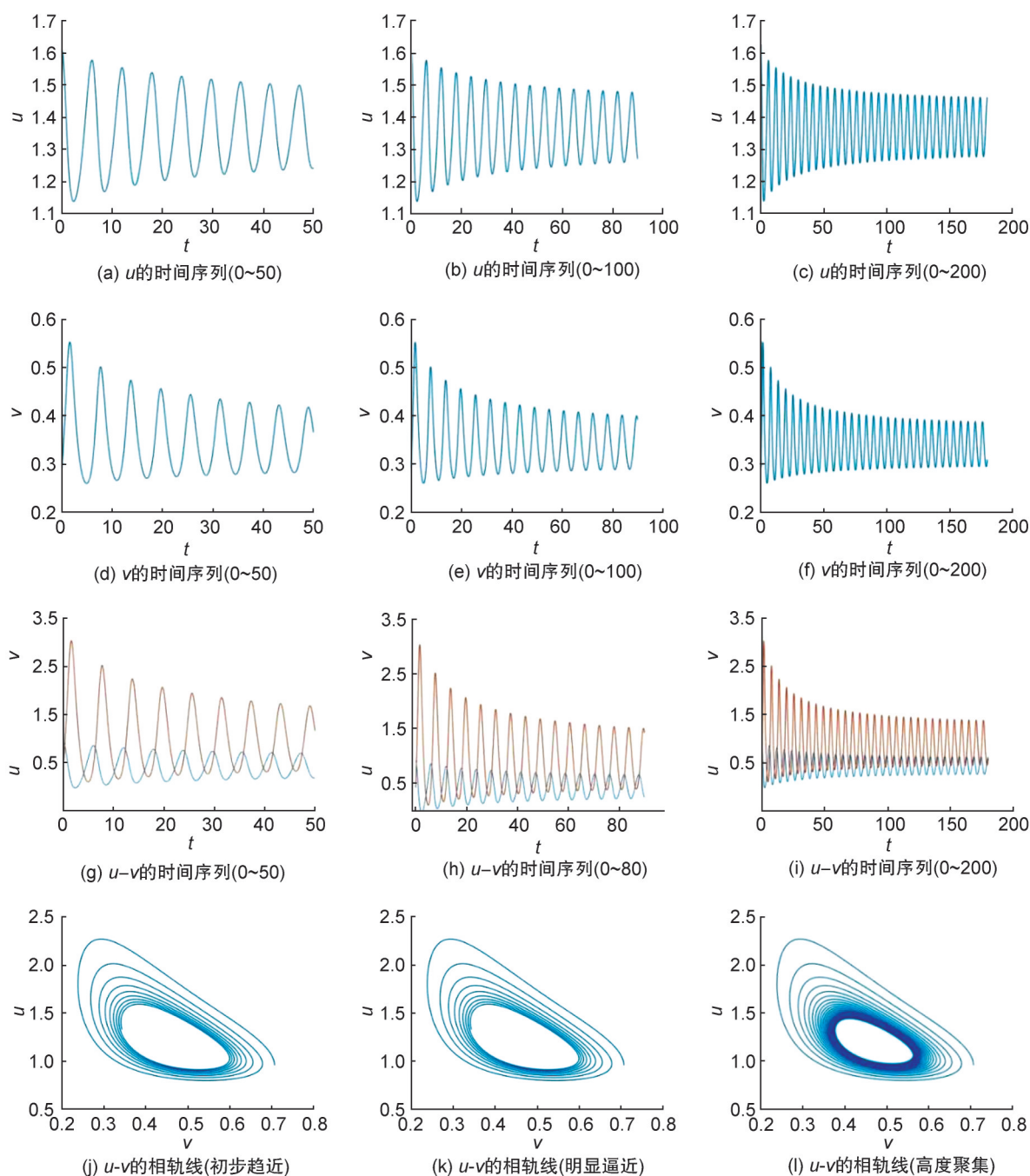
图2 常微分系统增加小于 τ_0^0 的时滞后,系统(2)的正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 局部渐近稳定

Fig. 2 When a delay less than τ_0^0 is added to the ordinary differential system, the positive constant equilibrium point $E_*(u_*, v_*)$ of system (2) is locally asymptotically stable

统(2)在 (u_*, v_*) 处产生Hopf分支,图3分别给出 t 取不同值时的情形。

针对系统(8),参数 K, m, θ, d_1, d_2 取 $K=5, m=0.7, \theta=0.4, d_1=1, d_2=0.5$,经计算可知正

常数平衡点为 $E_*(u_*, v_*)=(1.155, 2.217)$,且满足条件 $0 < K < \frac{2\theta\sqrt{m-\theta}}{2\theta-m}$,此时有 $\tau_0^0=1.106$,根据定理2和定理3可知,当 τ 经过 $\tau_0^0=1.106$ 时,正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 会失去它的稳定性并产生Hopf分支,见图3—图5。根据定理3和第2节的公式推导可得 $\mu_2=1.8816 \times 10^{-4} > 0, \beta_2=-0.0038 < 0, T_2=0.0207 > 0$,由此可知当 τ 经过 $\tau_0^0=1.106$ 时,产生的Hopf分支方向为超临界,

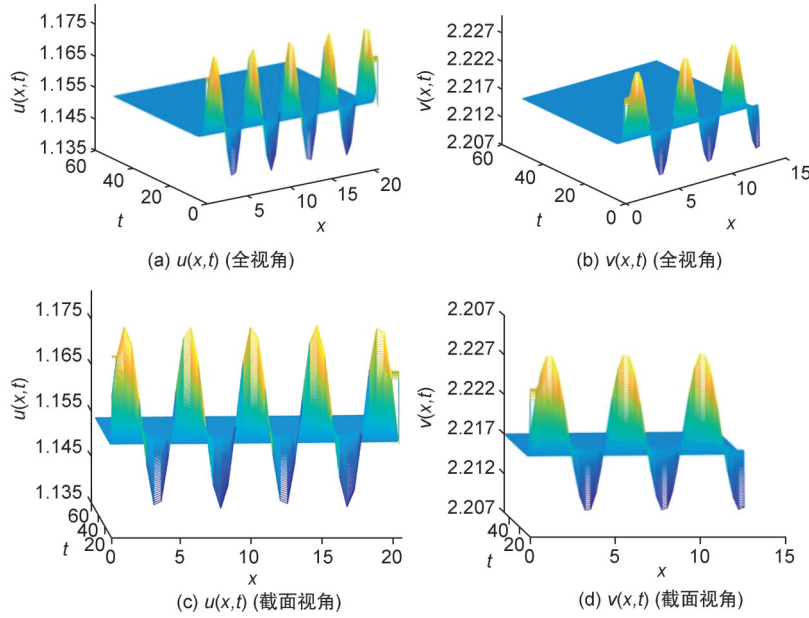


注:参数 $\tau = 1.4 > \tau_0^0$, 初值取 $(u_0, v_0) = (0.707, 0.457)$ 。

图3 常微分系统增加大于 τ_0^0 的时滞后,系统(2)的正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 失去稳定性。此时系统(3)在 $E_*(u_*, v_*)$ 处产生Hopf分支

Fig. 3 When a time delay greater than τ_0^0 is added to an ordinary differential system, the positive constant equilibrium point $E_*(u_*, v_*)$ of system (2) loses stability. At this point, a Hopf bifurcation occurs at $E_*(u_*, v_*)$ in system (3)

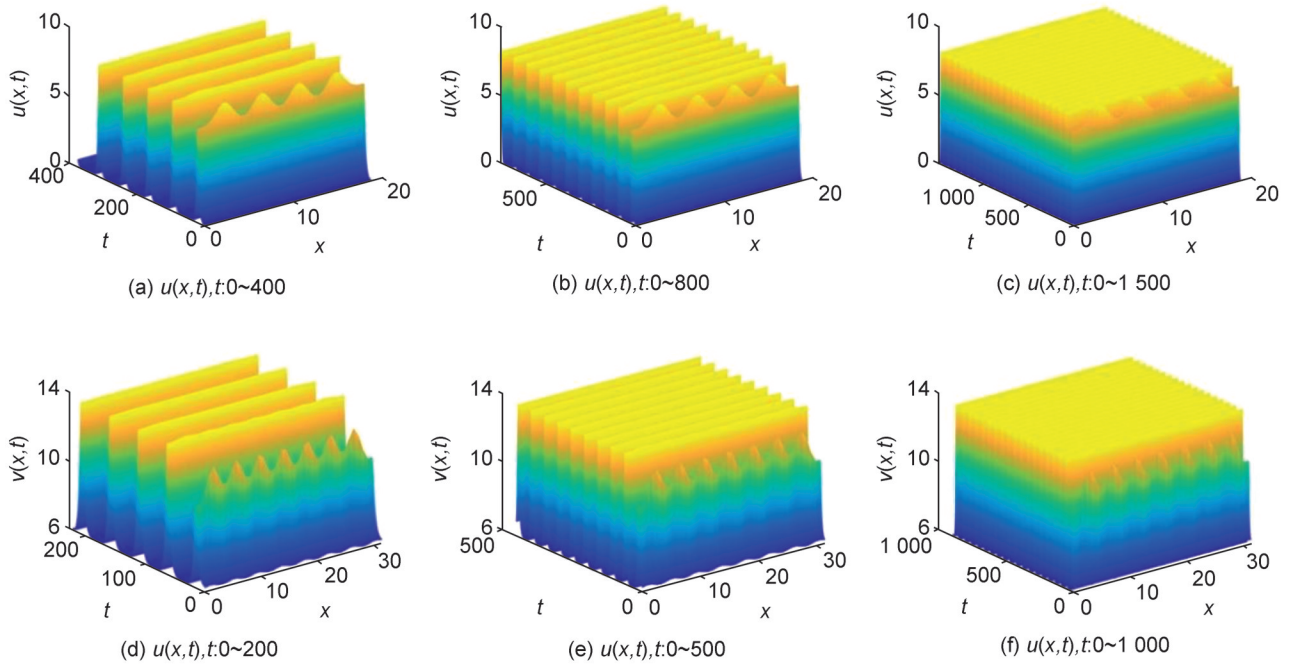
并且分支周期解是稳定的,周期增加。取 $\tau = 0.7 < \tau_0^0$ 和初值 $u(x, t) = u_* + 0.01 \sin(3x), v(x, t) = v_* + 0.01 \sin(3x)$, 因此系统(8)在正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 处局部渐近稳定,图4分别给出 t 取不同值时的情形。参数 K, m, θ, d_1, d_2 取 $K = 5, m = 0.7, \theta = 0.4, d_1 = 1, d_2 = 0.5$, 经计算可知正常数平衡点为 $E_*(u_*, v_*) = (1.155, 2.217)$, 取 $\tau = 15 > \tau_0^0$, 由定理2和定理3可知系统(8)在正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 处产生Hopf分支,当初值取 $u(x, t) = u_* + 0.01 \cos(1.5x), v(x, t) = v_* + 0.01 \sin(3x)$ 时,图5分别给出 t 取不同值时的情形。



注: 参数 $\tau = 0.7 < \tau_0^0$, 初值取 $u(x, t) = u_* + 0.01\sin(1.5x), v(x, t) = v_* + 0.01\sin(3x)$ 。

图4 偏微分系统增加小于 τ_0^0 的时滞后, 系统(8)的正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 局部渐近稳定

Fig. 4 Making partial differential system with less than τ_0^0 time lag, system (8) on the number of normal balance $E_*(u_*, v_*)$ locally asymptotically stable



注: 参数 $\tau = 15 > \tau_0^0$, 初值取 $u(x, t) = u_* + 0.01\sin(1.5x), v(x, t) = v_* + 0.01\sin(3x)$ 。

图5 偏微分系统增加大于 τ_0^0 的时滞后, 系统(8)在正常数平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 处产生Hopf分支和空间齐次分支周期解

Fig. 5 Making partial differential system with greater than τ_0^0 time lag, system (8) in the normal balance $E_*(u_*, v_*)$ Hopf bifurcation branch and spatial homogeneous periodic solution

参考文献:

[1] HOLING C S. The Functional Response of Predators to Prey Density and Its role in mimicry and Population Regulation[J]. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 1965, 97:5-60. 10. 4039/entm9745fv.

[2] KARA OGLU E, MERDAN H. Hopf Bifurcations of a Ratio-dependent Predator-Prey Model Involving Two Discrete Maturation Time Delays[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2014, 68: 159-168. DOI: 10. 1016/j. chaos. 2014. 07. 011.

[3] HU D P, CAO H J. Stability and Bifurcation Analysis in a

- Predator-Prey System with *Michaelis-Menten* Type Predator Harvesting[J]. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2017, **33**: 58–82. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2016.05.010.
- [4] HU X M, PRATAP A, ZHANG Z Z, *et al.* Hopf Bifurcation and Global Exponential Stability of an Epidemiological Smoking Model with Time Delay[J]. *Alex Eng J*, 2022, **61** (3): 2096–2104. DOI: 10.1016/j.aej.2021.08.001.
- [5] QIU S Y, MU C L, TU X Y. Dynamics for a Three-species Predator-prey Model with Density-dependent Motilities[J]. *J Dyn Differ Equ*, 2021, **35**(1): 1–25. DOI: 10.1007/s10884-021-10020-6.
- [6] 郭改慧, 赵诗涵. 一类具有时滞的水-植被模型的分支分析[J]. *山西大学学报(自然科学版)*, 2023, **46**(5): 1050–1057. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2022104.
GUO G H, ZHAO S H. Bifurcation Analysis for a Water-vegetation Model with Time Delay[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2023, **46**(5): 1050–1057. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2022104.
- [7] SUROSH A H, ALIDOUSTI J, GHAZIANI R K. Stability and Hopf Bifurcation Analysis for a Three-species Food Chain Model with Fear and Two Different Delays[J]. *Comput Appl Math*, 2022, **41**(3): 110. DOI: 10.1007/s40314-021-01727-9.
- [8] DU L L, WANG M X. Hopf Bifurcation Analysis in the 1-D Lengyel-Epstein Reaction-Diffusion Model[J]. *J Math Anal Appl*, 2010, **366**(2): 473–485. DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.02.002.
- [9] KASHYAP A J, ZHU Q X, SARMAH H K, *et al.* Dynamical Study of a Predator-Prey System with *Michaelis-Menten* Type Predator-harvesting[J]. *Int J Biomath*, 2023, **16**(8): 2250135. DOI: 10.1142/s1793524522501352.
- [10] YI F Q, WEI J J, SHI J P. Global Asymptotical Behavior of the Lengyel-Epstein Reaction-Diffusion System[J]. *Appl Math Lett*, 2009, **22**(1): 52–55. DOI: 10.1016/j.aml.2008.02.003.
- [11] 王婷婷, 唐浩彭, 马智慧. 具有生境复杂性效应的时滞捕食-食饵系统[J]. *兰州大学学报(自然科学版)*, 2018, **54**(5): 682–690. DOI: 10.13885/j.issn.0455-2059.2018.05.016.
WANG T T, TANG H P, MA Z H. Research on a Delay-induced Predator-prey System with Holling III Functional Response and Habitat Complexity[J]. *J Lanzhou Univ Nat Sci*, 2018, **54**(5): 682–690. DOI: 10.13885/j.issn.0455-2059.2018.05.016.
- [12] XU X Y, MENG Y, SHAO Y Y. Hopf Bifurcation of a Delayed Predator-Prey Model with Allee Effect and Anti-predator Behavior[J]. *Int J Biomath*, 2023, **16**(7): 2250125. DOI: 10.1142/s179352452250125x.
- [13] XIE Y N, ZHAO J, YANG R Z. Stability Analysis and Hopf Bifurcation of a Delayed Diffusive Predator-Prey Model with a Strong Allee Effect on the Prey and the Effect of Fear on the Predator[J]. *Mathematics*, 2023, **11** (9): 1996. DOI: 10.3390/math11091996.
- [14] YAN X P, SHI J P. Stability Switches in a Logistic Population Model with Mixed Instantaneous and Delayed Density Dependence[J]. *J Dyn Differ Equ*, 2017, **29**(1): 113–130. DOI: 10.1007/s10884-015-9432-3.
- [15] 沈维. 具有Holling-III型功能反应的时滞食饵-捕食系统的稳定性和Hopf分支[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2023. DOI: 10.27205/d.cnki.gltec.2022.001082.
SHEN W. Stability and Hopf Bifurcation of a Time-delayed Predator-prey System with Holling-III Functional Responses[D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2023. DOI: 10.27205/d.cnki.gltec.2022.001082.
- [16] 李静, 孙桂全, 靳祯. 种内竞争时滞对植被周期振荡模式的影响研究[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(6): 669–681. DOI: 10.21656/1000-0887.420190.
LI J, SUN G Q, JIN Z. Effects of Intraspecific Competition Delay on Vegetation Periodic Oscillation Patterns[J]. *Appl Math Mech*, 2022, **43**(6): 669–681. DOI: 10.21656/1000-0887.420190.
- [17] 袁海龙, 王雅迪. 一类具有扩散的营养-微生物模型的Hopf分支周期解[J]. *西北师范大学学报(自然科学版)*, 2023, **59**(4): 16–22. DOI: 10.16783/j.cnki.nwnuz.2023.04.003.
YUAN H L, WANG Y D. The Hopf Bifurcation Periodic Solutions in the Nutrient-microorganism Model with Diffusion[J]. *J Northwest Norm Univ Nat Sci*, 2023, **59**(4): 16–22. DOI: 10.16783/j.cnki.nwnuz.2023.04.003.
- [18] 焦淑云. 食饵具有避难和强Allee效应的时滞捕食者-食饵扩散模型研究[J]. *山西大学学报(自然科学版)*, 2021, **44**(2): 234–240. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2020002.
JIAO S Y. Study on a Delay-diffusive Predator-prey Model with Refuge and Strong Allee Effect in Prey[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2021, **44**(2): 234–240. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2020002.
- [19] 王雅迪, 袁海龙. 时滞Lengyel-Epstein反应扩散系统的Hopf分支[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2023, **58**(8): 92–103. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.539.
WANG Y D, YUAN H L. Hopf Bifurcation Analysis in the Lengyel-Epstein Reaction Diffusion System with Time Delay[J]. *J Shandong Univ Nat Sci*, 2023, **58**(8): 92–103. DOI: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.539.
- [20] 马亚妮, 袁海龙. 一类具有时滞的Gierer-Meinhardt活化抑制模型的分支分析[J]. *数学物理学报*, 2023, **43**(6): 1774–1788.
MA Y N, YUAN H L. Bifurcation Analysis of a Class of Gierer-meinhardt Activation Inhibition Model with Time Delay[J]. *Acta Math Sci*, 2023, **43**(6): 1774–1788.