山西大学学报(自然科学版)48(4):700－704,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024012

广义$*$-Sylvester矩阵方程的重新表述

马昌凤[1],柯艺芬[2],谢亚君[1*]
(1.福州外语外贸学院 大数据学院 数据科学与智能计算重点实验室,福建 福州 350202;
2.福州师范大学 数学与统计学院,福建 福州 350117)

摘　要:本文主要考虑$*$-Sylvester矩阵方程$AXB+CX^*D=E$的重构问题。通过分离矩阵的实部和虚部,在一定条件下可将广义$*$-Sylvester矩阵方程重新表述为广义Sylvester矩阵方程,以便更好地构造数值算法。

关键词:广义$*$-Sylvester矩阵方程;广义Sylvester矩阵方程;重新表述
中图分类号:O241　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2025)04-0700-05

The Reformulation of a Generalized $*$-Sylvester Matrix Equation

MA Changfeng[1], KE Yifen[2], XIE Yajun[1*]
(1. *Key Laboratory of Data Science and Intelligent Computing, School of Big Data, Fuzhou University of International Studies and Trade, Fuzhou* 350202, *China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350117, *China*)

Abstract: This paper considers the generalized $*$-Sylvester matrix equation $AXB+CX^*D=E$. By separating the real and imaginary parts of the matrices, the generalized $*$-Sylvester matrix equation is reformulated into the generalized Sylvester matrix equation under a certain condition, which can better construct numerical algorithms

Key words: generalized $*$-Sylvester matrix equation; generalized Sylvester matrix equation; reformulation

0　引言

设数域$\mathbb{F}$表示实数域$\mathbb{R}$或复数域$\mathbb{C}$。我们考虑广义$*$-Sylvester矩阵方程

$$AXB+CX^*D=E \tag{1}$$

的重构问题,此处$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$,$B,C,E\in\mathbb{F}^{m\times m}$,$D\in\mathbb{F}^{n\times m}$是给定的已知矩阵,$X\in\mathbb{F}^{n\times m}$是待求的未知矩阵。算子$*$表示矩阵的转置或共轭转置运算。方程(1)在系统与控制论中具有广泛而重要的应用[1-5],例如:观测器设计[6],特征结构配置[7],有约束输入的系统控制[8],故障检测[9],等等。

方程(1)是$*$-Sylvester方程$AX+X^*D=E$的自然拓展。当$*$表示共轭转置时,方程(1)称为广义$*$-Sylvester矩阵方程。当$*$表示转置时,方程(1)称为广义T-Sylvester矩阵方程

$$AXB+CX^{\mathrm{T}}D=E, \tag{2}$$

它是T-Sylvester方程

$$AX+X^{\mathrm{T}}D=E \tag{3}$$

收稿日期:2023-07-03;**接受日期**:2024-01-21
基金项目:国家自然科学基金(12371378);福建省自然科学基金(2024J01980;2023J01955)
作者简介:马昌凤(1962—),男,湖南邵阳人,教授,博士,研究方向数值代数及其应用。E-mail:mcf@fzfu.edu.cn
* **通信作者**:谢亚君(XIE Yajun),E-mail:xyj@fzfu.edu.cn
引文格式:马昌凤,柯艺芬,谢亚君.广义$*$-Sylvester矩阵方程的重新表述[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(4):700-704. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024012.

的拓展。

最近，Oozawa 等[10]证明了方程(3)在一定条件下且当 $m=n$ 时能够转换成 Lyapunov 矩阵方程。由于矩阵被假设为方阵($m=n$)，因此在理论上仍有一定的局限性。在文献[11]，Satake 等在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是长方阵的情形下将方程(3)等价转换为广义 Sylvester 矩阵方程。

本文旨在当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是长方阵的情形下将广义*-Sylvester 矩阵方程(1)进行重新表述。由于存在共轭运算，文献[11]中的相似变换不能应用于广义*-Sylvester 矩阵方程(1)。通过分离实部和虚部，我们可以将广义*-Sylvester 矩阵方程(1)等价转换为广义 Sylvester 矩阵方程，这样能更方便地构造数值算法。这一结果可视为文献[10-11]中结果的推广。

本文组织如下：第 1 节回顾一些基本记号和预备结论；第 2 节提出并证明本文的主要结果；最后在第 3 节给出小结。整篇论文，用符号 $(\cdot)_{\mathrm{R}}$ 和 $(\cdot)_{\mathrm{I}}$ 表示矩阵或向量的实部和虚部。$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\lambda(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱，即特征值的集合。

1 预备知识

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{F}^{m\times n}$，$a_i$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列，算子 $\mathrm{vec}:\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{F}^{mn}$ 定义为 $\mathrm{vec}(A)=(a_1^{\mathrm{T}},a_1^{\mathrm{T}},\cdots,a_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{F}^{mn}$，其逆算子 $\mathrm{vec}^{-1}:\mathbb{F}^{mn}\to\mathbb{F}^{m\times n}$ 定义为 $\mathrm{vec}^{-1}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{A}$。

对于给定的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbb{F}^{p\times q}$，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{mp\times nq}$ 表示它们的 Kronecker 积，其 (i,j)-块为 $a_{ij}\boldsymbol{B}$。此外，Kronecker 积具有如下基本性质：

(1) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(2) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{AC})\otimes(\boldsymbol{BD})$, $\forall\boldsymbol{C}\in\mathbb{F}^{n\times l},\boldsymbol{C}\in\mathbb{F}^{q\times r}$；

(3) $\mathrm{vec}(\boldsymbol{AXB})=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})$, $\forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{F}^{n\times p}$。

引理 1[12] 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{p\times q}$，$\boldsymbol{P}_{mn}$ 为置换阵，定义为

$$\boldsymbol{P}_{mn}:=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(e_{kn}\otimes e_{jm})(e_{jm}\otimes e_{kn})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{F}^{mn\times mn},$$

其中 e_{jm} 分别是 m 阶单位阵 $\boldsymbol{I}_m$ 的第 j 列，则下列性质成立：

(1) $\boldsymbol{P}_{mn}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_{mn}$；

(2) $\boldsymbol{P}_{mn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{mn}=\boldsymbol{P}_{mn}\boldsymbol{P}_{mn}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_{mn}$；

(3) $\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}_{mn}\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$；

(4) $\boldsymbol{P}_{mp}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}_{nq}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$。

将 vec 算子应用于广义*-Sylvester 矩阵方程(1)，可得

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{P}_{mn}(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(\bar{\boldsymbol{X}})=\mathrm{vec}(\boldsymbol{E}),\tag{4}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的共轭。分裂矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的实部和虚部，得：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}},\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}},$$
$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}},\ \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}},\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}},$$

那么方程(4)变为

$$\mathcal{A}x=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12}\\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{R}}\\ x_{\mathrm{I}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_{\mathrm{R}}\\ e_{\mathrm{I}}\end{pmatrix},\tag{5}$$

此处，$x_{\mathrm{R}}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{R}})$, $x_{\mathrm{I}}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}})$, $e_{\mathrm{R}}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}})$, $e_{\mathrm{I}}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}})$, 以及

$$\mathcal{A}_{11}=(+_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}})+\boldsymbol{P}_{mn}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}),$$
$$\mathcal{A}_{12}=-(\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}})+\boldsymbol{P}_{mn}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}),$$
$$\mathcal{A}_{12}=(\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}})+\boldsymbol{P}_{mn}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}),$$
$$\mathcal{A}_{22}=(\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}})-\boldsymbol{P}_{mn}(\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})。$$

下面给出*-非互倒的定义。注意到在此定义下 0 和 ∞ 将会成为谱集 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 的可能元素。

定义1 称集合$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$是$*$-非互倒的,若$\lambda_i\neq 1/\bar{\lambda}_j,\ \forall 1\leqslant i,j\leqslant n$。

注意到在该定义下,$\lambda=0,\infty$这两个值与传统假设是相同的,即对于$\lambda=0$,有$\lambda^{-1}=\bar{\lambda}^{-1}=\infty$;对于$\lambda=\infty$有$\lambda^{-1}=\bar{\lambda}^{-1}=0$。

引理2 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$,则方程$\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{E}$存在唯一解的充分必要条件是对任意的右端项$\boldsymbol{E}$,谱集$\lambda(\boldsymbol{AB}^*)$是$*$-非互倒的。

2 主要结果

本节我们将广义$*$-Sylvester矩阵方程(1)转换为广义Sylvester矩阵方程。考虑如下两种情形:(1) $m\geqslant n$,(2) $m\leqslant n$。

定理1 ($m\geqslant n$情形)设$m\geqslant n$,$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}\in\mathbb{C}^{m\times m}$。如果存在矩阵$\boldsymbol{S}\in\mathbb{C}^{m\times m}$使得$\boldsymbol{B}^*\otimes(\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{A}})=\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$且$\lambda(\boldsymbol{S})$是$*$-非互倒的,则广义$*$-Sylvester方程(1)等价于如下广义Sylvester矩阵方程

$$\boldsymbol{AXB}-\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XC}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}。\tag{6}$$

证 令

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}) & -\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_I)\\ -\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}) & \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_R)\end{pmatrix},$$

则$\boldsymbol{K}$是非奇异的。事实上,考虑下面的线性方程组

$$\boldsymbol{K}y=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}) & -\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}})\\ -\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}) & \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{P}_{mm}(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{\mathrm{R}}\\ y_{\mathrm{I}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{\mathrm{R}}\\ f_{\mathrm{I}}\end{pmatrix},$$

这一方程组等价于下面的$*$-Stein矩阵方程

$$\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F},\tag{7}$$

这里$\boldsymbol{Y}=\mathrm{vec}^{-1}(y_{\mathrm{R}})+\mathrm{i}\,\mathrm{vec}^{-1}(y_{\mathrm{I}})\in\mathbb{C}^{m\times m}$,$\boldsymbol{F}=\mathrm{vec}^{-1}(f_{\mathrm{R}})+\mathrm{i}\,\mathrm{vec}^{-1}(f_{\mathrm{I}})\in\mathbb{C}^{m\times m}$。因此,矩阵$\boldsymbol{K}$非奇异当且仅当矩阵方程(7)对任意的右端项$F$有唯一解。根据引理2,易知$*$-Stein矩阵方程(7)对任意的右端项$F$有唯一解当且仅当谱集$\lambda(\boldsymbol{S})$是$*$-非互倒的。因此根据定理的条件,矩阵$\boldsymbol{K}$是非奇异的。

由$B^*\otimes(S\bar{A})=C\otimes D^{\mathrm{T}}$,可得

$$B_R^{\mathrm{T}}\otimes(S_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}+S_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}})+B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes(S_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{R}}-S_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{I}})=C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}},\tag{8}$$

$$-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes(S_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}+S_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}})+B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes(S_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{R}}-S_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{I}})=C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}。\tag{9}$$

用非奇异矩阵$\boldsymbol{K}$乘以方程(5)的两边,得

$$\boldsymbol{KA}x=\begin{pmatrix}K_{11}A_{11}+K_{12}A_{21} & K_{11}A_{12}+K_{12}A_{22}\\ K_{21}A_{11}+K_{22}A_{21} & K_{21}A_{12}+K_{22}A_{22}\end{pmatrix}x=\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}e_{\mathrm{R}}\\ e_{\mathrm{I}}\end{pmatrix},\tag{10}$$

这里$K_{ij}(i,j=1,2)$表示矩阵$\boldsymbol{K}$的(i,j)-块。根据式(8)和式(9),可得

$$\begin{aligned}K_{11}A_{11}+K_{12}A_{21}&=(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})-[(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{R}}+S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{I}})\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{I}}-S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{R}})\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}],\\ K_{11}A_{12}+K_{12}A_{22}&=-(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})-[(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{R}}+S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{I}})\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}-(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{I}}-S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{R}})\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}],\\ K_{21}A_{11}+K_{22}A_{21}&=(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})+[(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{R}}+S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{I}})\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}-(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{I}}-S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{R}})\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}],\\ K_{21}A_{12}+K_{22}A_{22}&=(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})-[(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{R}}+S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{I}})\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-(S_{\mathrm{R}}C_{\mathrm{I}}-S_{\mathrm{I}}C_{\mathrm{R}})\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}],\end{aligned}$$

以及

$$\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}e_{\mathrm{R}}\\ e_{\mathrm{I}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_{\mathrm{R}}-P_{mm}(I_m\otimes S_{\mathrm{R}})e_{\mathrm{R}}-P_{mm}(I_m\otimes S_{\mathrm{I}})e_{\mathrm{I}}\\ e_{\mathrm{I}}-P_{mm}(I_m\otimes S_{\mathrm{I}})e_{\mathrm{R}}+P_{mm}(I_m\otimes S_{\mathrm{R}})e_{\mathrm{I}}\end{pmatrix}。$$

另一方面,将算子vec作用于广义Sylvester矩阵方程(6)并考虑分离矩阵的实部和虚部,我们可以把广义Sylvester方程(6)看作线性方程组(10)。这就完成了定理的证明。

定理2 ($m\leqslant n$情形)设$m\leqslant n$,$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$,$B,C,D,E\in\mathbb{C}^{m\times m}$。若存在矩阵$\boldsymbol{H}\in\mathbb{C}^{n\times m}$和$\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{m\times m}$

使得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AH}$, $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{GB}$ 且 $\lambda(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{H}})$ 是*-非互倒的,则广义*-Sylvester 方程(1)等价于如下广义 Sylvester 矩阵方程

$$\boldsymbol{A}\tilde{X}\boldsymbol{B}-(\bar{C}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})\tilde{X}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{D}})=\boldsymbol{E}, \tag{11}$$

其中 $\tilde{X}$ 满足 $X=\tilde{X}-H\tilde{X}^{*}G$。

证明 设

$$Q=\begin{pmatrix} I_m\otimes I_m-Q_1 & -Q_2 \\ -Q_2 & I_m\otimes I_m+Q_1 \end{pmatrix},$$

这里 $Q_1=P_{mm}(H_{\mathrm{R}}\otimes G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-H_{\mathrm{I}}\otimes G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})$, $Q_2=P_{mm}(H_{\mathrm{R}}\otimes G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}+H_{\mathrm{I}}\otimes G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})$。那么 Q 是非奇异的。事实上,考虑下面的线性方程组

$$Qy=Q\begin{pmatrix} y_{\mathrm{R}} \\ y_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{\mathrm{R}} \\ f_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}。$$

此方程组等价于下面的*-Stein 矩阵方程

$$Y-HY^{*}G=F, \tag{12}$$

这里 $Y=\mathrm{vec}^{-1}(y_R)+\mathrm{i}\,\mathrm{vec}^{-1}(y_I)\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $F=\mathrm{vec}^{-1}(f_R)+\mathrm{i}\,\mathrm{vec}^{-1}(f_I)\in\mathbb{C}^{m\times m}$。因此,矩阵 Q 非奇异当且仅当矩阵方程(12)对任意的右端项 F 有唯一解。根据引理2,易知*-Stein 矩阵方程(12)对任意的右端项 F 有唯一解当且仅当谱集 $\lambda(G^{\mathrm{T}}\bar{H})$ 是*-非互倒的。因此根据定理的条件,矩阵 Q 是非奇异的。

因 $C=AH$ 和 $D=GB$,即

$$C=C_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\,C_{\mathrm{I}}=(A_{\mathrm{R}}H_{\mathrm{R}}-A_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}})+\mathrm{i}(A_{\mathrm{R}}H_{\mathrm{I}}-A_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{R}}), \tag{13}$$

$$D=D_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\,D_{\mathrm{I}}=(G_{\mathrm{R}}B_{\mathrm{R}}-G_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{I}})+\mathrm{i}(G_{\mathrm{R}}B_{\mathrm{I}}-G_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{R}})。 \tag{14}$$

我们可推得

$$(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})Q_1-(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})Q_2=P_{mm}(C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}), \tag{15}$$

$$(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})Q_1+(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})Q_2=P_{mm}(C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})。 \tag{16}$$

事实上,由引理1、式(13)和式(14)可得

$$\begin{gathered}P_{mm}[(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})Q_1-(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})Q_2]-P_{mm}[P_{mm}(C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})]= \\ (A_{\mathrm{R}}\otimes B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-A_{\mathrm{I}}\otimes B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})(H_{\mathrm{R}}\otimes G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-H_{\mathrm{I}}\otimes G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})-(A_I\otimes B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+A_{\mathrm{R}}\otimes B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})(H_{\mathrm{R}}\otimes G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}+H_{\mathrm{I}}\otimes G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})- \\ (C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})=(A_{\mathrm{R}}H_{\mathrm{R}}-A_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}})\otimes(G_{\mathrm{R}}B_{\mathrm{R}}-G_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}- \\ (A_{\mathrm{R}}H_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{R}})\otimes(G_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{R}}-G_{\mathrm{R}}B_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}-(C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})=0,\end{gathered}$$

和

$$\begin{gathered}P_{mm}[(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})Q_1+(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})Q_2]-P_{mm}[P_{mm}(C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})]= \\ (A_{\mathrm{I}}\otimes B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+A_{\mathrm{R}}\otimes B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})(H_{\mathrm{R}}\otimes G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-H_{\mathrm{I}}\otimes G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})+(A_{\mathrm{R}}\otimes B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-A_{\mathrm{I}}\otimes B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})(H_{\mathrm{R}}\otimes G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}+H_{\mathrm{I}}\otimes G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})- \\ (C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})=(A_{\mathrm{R}}H_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{R}})\otimes(G_{\mathrm{R}}B_{\mathrm{R}}-G_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}+ \\ (A_{\mathrm{R}}H_{\mathrm{R}}-A_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}})\otimes(G_{\mathrm{I}}B_{\mathrm{R}}+G_{\mathrm{R}}B_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}-(C_{\mathrm{I}}\otimes D_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+C_{\mathrm{R}}\otimes D_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})=0。\end{gathered}$$

因为 P_{mm} 是非奇异的,关系式(15)和(16)成立。

将线性方程组(5)重写为

$$AQ\begin{pmatrix} \tilde{x}_{\mathrm{R}} \\ \tilde{x}_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}Q_{11}+A_{12}Q_{21} & A_{11}Q_{12}+A_{12}Q_{22} \\ A_{21}Q_{11}+A_{22}Q_{21} & A_{21}Q_{11}+A_{22}Q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_{\mathrm{R}} \\ \tilde{x}_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_{\mathrm{R}} \\ e_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 $Q_{ij}(i,j=1,2)$ 是矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的 (i,j)-块,且

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{\mathrm{R}} \\ \tilde{x}_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{R}} \\ x_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}。 \tag{18}$$

根据式(15)和式(16),我们有

$$\begin{gathered}A_{11}Q_{11}+A_{12}Q_{21}=(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})-[(H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}+H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})- \\ (H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}-H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})],\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
A_{11}Q_{12}+A_{12}Q_{22}=&-(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})-[(H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}+H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{I})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})+\\
&(H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}-H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})],\\
A_{21}Q_{11}+A_{22}Q_{21}=&(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}})+[(H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}+H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})+\\
&(H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}-H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})],\\
A_{21}Q_{11}+A_{22}Q_{22}=&(B_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{R}}-B_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\otimes A_{\mathrm{I}})-[(H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}+H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}+C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}})-\\
&(H_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{R}}-H_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}D_{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\otimes(C_{\mathrm{R}}G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}-C_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})]。
\end{aligned}
$$

此外,x_R 和 x_I 满足

$$
\begin{pmatrix} x_{\mathrm{R}} \\ x_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} \tilde{x}_{\mathrm{R}} \\ \tilde{x}_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (I_m\otimes I_m-Q_1)\tilde{x}_{\mathrm{R}}-Q_2\tilde{x}_{\mathrm{I}} \\ -Q_2\tilde{x}_{\mathrm{R}}+(I_m\otimes I_m+Q_1)\tilde{x}_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}。
$$

记 $X=\mathrm{vec}^{-1}(x_{\mathrm{R}})+\mathrm{i}\,\mathrm{vec}^{-1}(x_{\mathrm{I}})$,$\tilde{X}=\mathrm{vec}^{-1}(\tilde{x}_{\mathrm{R}})+\mathrm{i}\,\mathrm{vec}^{-1}(\tilde{x}_{\mathrm{I}})$,那么有 $X=\tilde{X}-H\tilde{X}^{*}G$。

另一方面,将算子 vec 作用于广义 Sylvester 方程(11)并考虑分离矩阵的实部和虚部,我们可以把广义 Sylvester 方程(11)看成线性方程组(17)。证毕。

3 小结

本文证明了在一定条件下,广义 $*$-Sylvester 矩阵方程可以转化为广义 Sylvester 矩阵方程。我们注意到,定理 1 和定理 2 分别是文献[11]中的定理 6 和定理 8 的拓展。

本文的主要结果表明,广义 $*$-Sylvester 矩阵方程可以等价转换为相应的广义 Sylvester 矩阵方程,而求解广义 Sylvester 矩阵方程已存在大量有效的数值算法。

参考文献:

[1] FUJIOKA H, HARA S. State Covariance Assignment Problem with Measurement Noise: A Unified Approach Based on a Symmetric Matrix Equation[J]. *Linear Algebra Appl*, 1994, **203/204**: 579-605. DOI: 10. 1016/0024-3795(94)90215-1.

[2] YASUDA K, SKELTON R E. Assigning Controllability and Observability Gramians in Feedback Control[J]. *J Guid Contr Dyn*, 1991, **14**(5): 878-885. DOI: 10. 2514/3. 20727.

[3] MA C F, YAN T X. A Finite Iterative Algorithm for the General Discrete-Time Periodic Sylvester Matrix Equations [J] *J Frankl Inst*, 2022, **359**(9): 4410-4432. DOI: 10. 1016/j. jfranklin. 2022. 03. 047.

[4] LI S H, MA C F. Factor Gradient Iterative Algorithm for Solving a Class of Discrete Periodic Sylvester Matrix Equations[J]. *J Frankl Inst*, 2022, **359**(17): 9952-9970. DOI: 10. 1016/j. jfranklin. 2022. 09. 041.

[5] LI S H, MA C F. An Improved Gradient Neural Network for Solving Periodic Sylvester Matrix Equations[J]. *J Frankl Inst*, 2023, **360**(6): 4056-4070. DOI: 10. 1016/j. jfranklin. 2023. 02. 019.

[6] DAI L. Singular Control Systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[7] DUAN G R, PATTON R J. Eigenstructure Assignment in Descriptor Systems via Proportional Plus Derivative State Feedback[J]. *Int J Contr*, 1997, **68**(5): 1147-1162. DOI: 10. 1080/002071797223253.

[8] DUAN G R. The Solution to the Matrix equation AV + BW = EVJ + R[J]. *Appl Math Lett*, 2004, **17**(10): 1197-1202. DOI: 10. 1016/j. aml. 2003. 05. 012.

[9] FRANK P M. Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Analytical and Knowledge-based Redundancy—A Survey and some New Results[J]. *Autom J IFAC*, 1990, **26**(3): 459-474. DOI: 10. 1016/0005-1098(90)90018-D.

[10] OOZAWA M, SOGABE T, MIYATAKE Y, *et al*. On a Relationship Between the T-congruence Sylvester Equation and the Lyapunov Equation[J]. *J Comput Appl Math*, 2018, **329**: 51-56. DOI: 10. 1016/j. cam. 2017. 05. 044.

[11] SATAKE Y, OOZAWA M, SOGABE T, *et al*. Relation between the T-congruence Sylvester Equation and the Generalized Sylvester Equation[J]. *Appl Math Lett*, 2019, **96**: 7-13. DOI: 10. 1016/j. aml. 2019. 04. 007.

[12] ZHANG H M, DING F. On the Kronecker Products and Their Applications[J]. *J Appl Math*, 2013, **2013**: 296185. DOI: 10. 1155/2013/296185.