山西大学学报(自然科学版)48(6):1113－1118,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024013

拟微分算子弱(1,1)估计的一个证明

邓宇龙*
(长沙师范学院 数学科学学院,湖南 长沙 410100)

摘 要:本拟微分算子是现代调和分析的核心研究对象之一,在偏微分方程的理论研究中有着重要的应用。本文探讨了象征属于Hörmander类的拟微分算子的弱型端点估计问题,通过运用经典的Calderón-Zygmund分解理论,得到了拟微分算子的弱(1,1)有界性成立的充分条件。具体而言,当象征函数的阶$m\leqslant-(n+1)(1-\rho)$时,这类算子是Lebesgue空间到弱Lebesue空间上有界的线性算子。该研究丰富了拟微分算子的有界性理论。

关键词:拟微分算子;奇异积分算子;弱(1,1)有界性估计;Calderón-Zygmund分解
中图分类号:O175.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2025)06-1113-06

A Proof of Weak (1, 1) Estimates for Pseudodifferential Operators

DENG Yulong*
(*School of Mathematical Science, Changsha Normal University, Changsha* 410100, *China*)

Abstract: Pseudodifferential operators are one of the core research objects in modern harmonic analysis and they have important applications in the theoretical study of partial differential equations. In this paper, we discuss the weak type endpoint estimates for pseudodifferential operators with symbols in Hörmander classes and get a sufficient condition such that these operators are of weak type (1,1) by employing the classical Calderón-Zygmund decomposition theory. Specifically, under the condition that the order of the symbol function $m\leqslant-(n+1)(1-\rho)$, these operators are bounded from Lebesgue spaces to weak Lebesgue spaces. This research enriches the boundedness theory of pseudodifferential operators.

Key words: pseudodifferential operators; singular integral operators; estimates of weak type (1,1); Calerón-Zygmund decomposition

0 引言

拟微分算子在偏微分方程理论研究中有重要的应用,如二阶椭圆方程的解的存在性、线性偏微分方程Cauchy问题解的唯一性和局部可解性问题等[1]。通常,人们把拟微分算子T定义为:

$$Tf(x)=\int_{\mathbf{R}^n}a(x,\xi)\mathrm{e}^{2\pi ix\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi,f\in S(\mathbf{R}^n),$$

其中$\hat{f}$是函数f的Fourier变换,算子T的象征$a(x,\xi)$属于Hörmander象征类$S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)$[2]。称$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$上的光滑函数$a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)$,如果对任意的多重指标$\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$和实数$m\in\mathbf{R}$以及$\rho,\delta\in[0,1]$,成立不等式

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta}\left(1+\left|\xi\right|\right)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|},\tag{1}$$

其中$C_{\alpha,\beta}$是与x和ξ无关的常数。记象征属于Hörmander类$S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)$的拟微分算子全体为$\wp^m_{\rho,\delta}$,由文

收稿日期:2023-07-10;**接受日期**:2024-01-21
基金项目:湖南省教育厅重点科研项目(21A0617)
* **通信作者**:邓宇龙(1980—),男,湖南蓝山人,博士,讲师,研究方向为函数论与分形几何及其应用。E-mail:yuldeng@163.com
引文格式:邓宇龙.拟微分算子弱(1,1)估计的一个证明[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(6):1113-1118. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024013.

献[3]可知,任意的$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$可表示为:

$$Tf(x)=\int_{\mathbf{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y。$$

记R^n中的Schwartz函数空间为$S(\mathbf{R}^n)$,$S'(\mathbf{R}^n)$是其对偶空间。易知,拟微分算子是$S(\mathbf{R}^n)$到$S'(\mathbf{R}^n)$上的有界线性算子,从而分布核$K(x,y)\in S'(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$[3]。

引理1([4]命题3.1或[5]) 设拟微分算子$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$,$\rho\in(0,1]$,$\delta\in[0,1)$,则算子T由

$$K(x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{2\pi i x\xi}a(x,\xi)\psi(\varepsilon\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

定义的分布核$K(x,y)$在对角线$\{(x,x):x\in\mathbf{R}^n\}$外光滑。其中,$\psi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$且当$|\xi|\leqslant 1$时,$\psi(\xi)=1$。(2)式的极限与$\psi$的选取无关且按$S'(\mathbf{R}^n)$意义收敛。则

(i)对任意的多重指标$\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$和自然数$N>0$,有

$$\sup_{|x-y|\geqslant\frac{1}{2}}\left|x-y\right|^N\left|D_x^\alpha D_y^\beta K(x,y)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta,N}。$$

(ii)设$M\in\mathrm{Z}_+$且$M+m+n>0$。则存在常数$C_M>0$,使得

$$\sup_{|\alpha+\beta|=M}\left|D_x^\alpha D_y^\beta K(x,y)\right|\leqslant C_M\frac{1}{|x-y|^{\frac{M+m+n}{\rho}}},x\neq y。$$

随着偏微分方程理论基本问题的重大突破,拟微分算子逐步产生和发展。Kohn和Nirenberg[6]以及Hörmander[2]等对拟微分算子进行了开创性研究。随后,人们广泛研究了拟微分算子的L^p有界性[3,7-9]和加权L^p有界性[10-11]。

本文主要探讨拟微分算子$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$的弱型端点估计问题。在文献[12]中,Álvarez,Hounie和Pérez指出,$m=-\frac{n}{2}(1-\rho)$是考察拟微分算子弱型估计的最大阶。事实上,当$-n<m<-n(1-\rho)$时,他们发现拟微分算子$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$可以被分数阶奇异积分算子$I_{n-\frac{m+n}{\rho}}$逐点控制。这意味着,由分数阶奇异积分算子可以得到拟微分算子的一个弱型估计。

定理A(文献[12]推论5.2) 设拟微分算子$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$,其中$-n<m<-n(1-\rho)$,$0<\rho\leqslant 1$且$0\leqslant\delta<1$。则T为弱$\left(1,\frac{n\rho}{m+n}\right)$型。

令$\lambda=\max\left\{0,\frac{\delta-\rho}{2}\right\}$。Alvarez和Hounie在文献[5]中得到了拟微分算子$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$的一个弱(1,1)型估计,即

定理B(文献[5]定理3.2) 设拟微分算子$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$,其中$0<\rho\leqslant 1$,$0\leqslant\delta<1$且$m<-n\left[\frac{1-\rho}{2}+\lambda\right]$。则$T$为弱(1,1)型。

由引理1以及文献[13]的定理4.1易知,定理B成立。文献[5]关于定理B的证明主要基于泛函分析和算子理论。本文将采用经典调和分析Calderón-Zygmund分解的方法来给出拟微分算子的弱(1,1)型估计。我们的主要结论如下。

定理1 设拟微分算子$T\in \wp^m_{\rho,\delta}$,其中$0<\rho\leqslant 1$,$0\leqslant\delta<1$且

$$-(n+1)<m\leqslant-(n+1)(1-\rho)。$$

则T为弱(1,1)型。特别地,参数m的容许范围可拓宽到$m\leqslant-(n+1)(1-\rho)$。

注意到$-(n+1)(1-\rho)$小于$m=-n\left[\frac{1-\rho}{2}+\lambda\right]$的下确界$-\frac{n}{2}(1-\rho)$,显然,定理1的结论蕴含在定理B中。尽管如此,本文关于定理1的证明与文献[5]不同。同时,我们抛砖引玉,期望探

讨用 Calderón-Zygmund 分解来完成参数 m 在 $-(n+1)(1-\rho)$ 和 $-\dfrac{n}{2}(1-\rho)$ 之间关于拟微分算子弱(1,1)型估计的证明。

1 相关引理和符号说明

我们约定,C 是一个与主要参量无关的常数。若存在常数 $C>0$ 使得 $a<Cb$,则记作 $a\prec b$。$a\sim b$ 当且仅当 $a\prec b$ 且 $b\prec a$。设 A 是 Lebesegue 可测集,$|A|$ 和 χ_A 分别表示集合 A 的 Lebesgue 测度和特征函数。中心在点 x,半边长为 r 的方体 Q 记为 $Q=Q(x,r)$。当 $t>0$ 时,$tQ=Q(x,tr)$。设 $0<p<\infty$,则 L^p 空间表示使

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}=\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \tag{3}$$

成立的 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数 $f(x)$ 全体构成的空间,记为 $L^p(\mathbf{R}^n)$。弱 L^p 空间,记为 $WL^p(\mathbf{R}^n)$,由满足

$$\|f\|_{WL^p(\mathbf{R}^n)}=\sup_{\lambda>0}\lambda\left|\left\{x\in\mathbf{R}^n:|f(x)|>\lambda\right\}\right|^{\frac{1}{p}}<\infty \tag{4}$$

的可测函数 $f(x)$ 全体构成。拟微分算子 $T\in\wp^m_{\rho,\delta}$ 有如下的 L^p 有界性。

引理2 设拟微分算子 $T\in\wp^m_{\rho,\delta}$,其中 $0<\rho\leqslant1,0\leqslant\delta<1$ 且

$$m\leqslant-n(1-\rho)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|+\lambda。$$

则当 $1<p<\infty$ 时,T 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 空间上的有界算子。即存在常数 $C>0$,使

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}。$$

引理2改进了 Fefferman[8] 的结论,把参数 δ 的范围从 $0\leqslant\delta<\rho<1$ 推广到 $0\leqslant\delta<1$。文献[3]指出,$m\leqslant-n(1-\rho)\left|\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right|$ 是 Sharp 的,这个结论为 Hardy-Littlewood-Hirschman-Wainger 不等式。

2 定理1的Calderón-Zygmund分解证明

本节,我们用经典的 Calderón-Zygmund 分解理论来证明拟微分算子 $T\in\wp^m_{\rho,\delta}$ 是从 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 空间到 $WL^1(\mathbf{R}^n)$ 空间上的有界算子。

证明 不妨设 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$,则对任意的 $\lambda>0$,由 Calderón-Zygmund 分解可知,存在互不相交的方体列 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和函数 g,b,使得

$$|f(x)|\leqslant\lambda \text{ a.e. 于}\Omega=\bigcup_k Q_k; \tag{5}$$

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f|\leqslant2^n\lambda; \tag{6}$$

$$|\Omega|\leqslant\sum_k|Q_k|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}; \tag{7}$$

$$f=g+b。 \tag{8}$$

其中,

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\notin\Omega,\\ \dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}f, & x\in Q_k,\end{cases}$$

$$b(x)=\sum_k b_{Q_k}(x),\text{且}\,b_{Q_k}(x)=\left(f(x)-\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}f\right)\chi_{Q_k}(x)。$$

于是，$|g(x)| \leqslant 2^n\lambda$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上几乎处处成立，b_{Q_k} 支撑在 Q_k 上且 $\int_{Q_k} b_{Q_k}(x)\mathrm{d}x=0$。由于 $Tf(x)=Tg(x)+Tb(x)$，我们有

$$\left|\left\{x\in\mathbf{R}^n:|Tf|>\lambda\right\}\right| \leqslant \left|\left\{x\in\mathbf{R}^n:|Tg|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x\in\mathbf{R}^n:|Tb|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right| = I+J。$$

对于 I，由 Chebyshev 不等式和引理 2(取 $p=2$)，可得

$$\begin{aligned} I=&\left|\left\{x\in\mathbf{R}^n:|Tg(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\int_{\left\{x\in\mathbf{R}^n:|Tg(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}}|Tg(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\int_{\mathbf{R}^n}|Tg(x)|^2\mathrm{d}x= \\ &\frac{C}{\lambda^2}\|Tg\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\|g\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \frac{C}{\lambda^2}\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x = \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}。\end{aligned} \tag{9}$$

接下来估计 J。设 $Q_k^*=2\sqrt{n}\,Q_k$，$\Omega^*=\bigcup_k Q_k^*$。可得

$$|\Omega^*| = \left|\bigcup_k Q_k^*\right| \leqslant \sum_k |Q_k^*| \leqslant \left(2\sqrt{n}\right)^n \sum_k |Q_k| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \tag{10}$$

和

$$\left|\left\{x\in\mathbf{R}^n:|Tb(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant |\Omega^*| + \left|\left\{x\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega^*:|Tb(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \left[\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbf{R}^n\backslash\Omega^*} Tb(x)\mathrm{d}x\right]。$$

由于 Q_k 是互不相交的方体，因此 $|Tb(x)| \leqslant \sum_k |Tb_{Q_k}(x)|$ 几乎处处成立。显然，我们只要证明

$$\sum_k \int_{\mathbf{R}^n\backslash\Omega^*} |Tb(x)|\mathrm{d}x \leqslant C\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}。$$

记 $Q_k=Q_k(c_k,r_k)$，则

$$\int_{\mathbf{R}^n\backslash Q_k^*} |Tb_{Q_k}(x)|\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}|Tb_{Q_k}(x)|\mathrm{d}x = \left(\sum_{j=0}^{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty}\right)\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}|Tb_{Q_k}(x)|\mathrm{d}x = (J_1+J_2),$$

其中 $j_0=\max\left\{j\in\mathbf{N}:2^j2\sqrt{n}\,r_k\leqslant 1\right\}$。我们首先证明，对任意的 $y\in Q_k(c_k,r_k)$ 和每一个 $x\in\mathbf{R}^n\backslash Q_k^*$，有 $|x-c_k|\sim|x-y|$。事实上，由 $|y-c_k|\leqslant\sqrt{n}\,r_k$ 和 $|x-c_k|\geqslant 2\sqrt{n}\,r_k$，易知

$$|x-y| \leqslant |x-c_k| + |y-c_k| \leqslant \frac{3}{2}|x-c_k|, \tag{11}$$

$$|x-y| \geqslant |x-c_k| - |y-c_k| \geqslant \frac{1}{2}|x-c_k|。 \tag{12}$$

其次，当 $x\in 2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*$ 时，我们有 $|x-c_k|\sim 2^j2\sqrt{n}\,r_k$。这是因为

$$2^j2\sqrt{n}\,r_k \leqslant |x-c_k| \leqslant 2\sqrt{n}\,2^j2\sqrt{n}\,r_k \Rightarrow |x-c_k|\sim 2^j2\sqrt{n}\,r_k。 \tag{13}$$

进一步，我们还有

$$|2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*| = 2^n(2^n-1)(2^j2\sqrt{n}\,r_k)^n \sim C(2^j2\sqrt{n}\,r_k)^n。 \tag{14}$$

于是，对于 J_1，依次利用 b_{Q_k} 的消失矩条件、中值定理以及引理 1 的(ii)(取 $M=1$)，并注意到 $1+m+n>0$，可得

$$\begin{aligned} J_1=&\sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\left|\int_{Q_k}K(x,y)b_{Q_k}(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\left|\int_{Q_k}(K(x,y)-K(x,c_k))b_{Q_k}(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \leqslant \\ &\sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\int_{Q_k}|K(x,y)-K(x,c_k)||b_{Q_k}(y)|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\int_{Q_k}\frac{|y-c_k|}{|x-c_k|^{\frac{1+m+n}{\rho}}}|b_{Q_k}(y)|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leqslant \\ &\sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\frac{\sqrt{n}\,r_k}{|x-c_k|^{\frac{1+m+n}{\rho}}}\mathrm{d}x\int_{Q_k}|b_{Q_k}(y)|\mathrm{d}y \leqslant \sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\frac{\sqrt{n}\,r_k}{|x-c_k|^{\frac{1+m+n}{\rho}}}\mathrm{d}x\,\|b\|_{L^1(Q_k)}。\end{aligned} \tag{15}$$

由(13)式和(14)式可知

$$\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\frac{\sqrt{n}\,r_k}{|x-c_k|^{\frac{1+m+n}{\rho}}}\mathrm{d}x\leqslant C\frac{(2^j2\sqrt{n}\,r_k)^n\sqrt{n}\,r_k}{(2^j2\sqrt{n}\,r_k)^{\frac{1+m+n}{\rho}}}。\tag{16}$$

显然,当$\frac{1+m+n}{\rho}\leqslant n+1$时,(16)式的右边小于等于$\frac{C}{2^{j+1}}$。因此,当$m\leqslant-(n+1)(1-\rho)$时,我们有

$$J_1\leqslant C\|b\|_{L^1(Q_k)}。\tag{17}$$

对于J_2,根据j_0的选取,注意到对每一个$x\in 2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*$和任意的$y\in Q_k$,都有

$$|x-y|\geqslant|x-c_k|-|y-c_k|\geqslant 2^j2\sqrt{n}\,r_k-\sqrt{n}\,r_k\geqslant(2^j-1)2\sqrt{n}\,r_k\geqslant 1。$$

于是,依次利用引理1的(i)、(13)式以及(14)式,可得

$$\begin{aligned}J_2=&\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\left|\int_{Q_k}K(x,y)b_{Q_k}(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\int_{2^{j+1}Q_k^*\backslash 2^jQ_k^*}\frac{1}{|x-c_k|^{n+1}}\mathrm{d}x\int_{Q_k}\left|b_{Q_k}(y)\right|\mathrm{d}y\leqslant\\&C\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\frac{1}{(2^j2\sqrt{n}\,r_k)}\|b\|_{L^1(Q_k)}\leqslant C\|b\|_{L^1(Q_k)}。\end{aligned}\tag{18}$$

综合(17)式和(18)式,有

$$\int_{\mathbf{R}^n\backslash Q_k^*}\left|Tb_{Q_k}(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant C\|b\|_{L^1(Q_k)}。$$

这说明

$$\sum_k\int_{\mathbf{R}^n\backslash Q_k^*}\left|Tb_{Q_k}(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant C\sum_k\|b\|_{L^1(Q_k)}\leqslant C\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}。\tag{19}$$

最后,我们按文献[14]的方法说明m的容许范围可延拓到整个$m\leqslant-(n+1)(1-\rho)$。事实上,对于$S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)$来说,如果$m_1\leqslant m_2\leqslant 0$,则

$$S^{m_1}_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)\subset S^{m_2}_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)。$$

令$m_c=-(n+1)(1-\rho)$,对任意的$a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)$,注意到$0<\rho\leqslant 1$,显然

$$a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)\subset S^{m_c}_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)。$$

从而,m的容许范围可延拓到整个$m\leqslant-(n+1)(1-\rho)$。综上,定理1得证。

参考文献:

[1] 陈恕行. 拟微分算子[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2006. CHEN S X. Pseudodifferential operators[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006.

[2] HÖRMANDER L. Pseudo-differential Operators and Hypoelliptic Equations[J]. *Proc Sympos Pure Math*, 1966, **10**: 138-183. DOI: 10.1090/pspum/010/0383152.

[3] STEIN E M, MURPHY T S. Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals [M]. Princeton, N.J: Princeton University Press, 1993.

[4] HOUNIE J, DOS SANTOS KAPP R A. Pseudodifferential Operators on Local Hardy Spaces[J]. *J FourierAnal Appl*, 2009, **15**(2):153-178. DOI: 10.1007/S00041-008-9021-5.

[5] ALVAREZ J, HOUNIE J. Estimates for the Kernel and Continuity Properties of Pseudo-differential Operators [J]. *Ark För Mat*, 1990, **28**(1): 1-22. DOI: 10.1007/BF02387364.

[6] KOHN J J, NIRENBERG L. An Algebra of Pseudo-differential Operators[J]. *Comm Pure Appl Math*, 1965, **18** (1/2): 269-305. DOI: 10.1002/cpa.3160180121.

[7] CALDERÓN A P, VAILLANCOURT R. A Class of Bounded Pseudo-differential Operators[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1972, **69**(5): 1185-1187. DOI: 10.1073/pnas.69.5.1185.

[8] FEFFERMAN C. Lp Bounds for Pseudo-differential Operators[J]. *Isr J Math*, 1973, **14**(4): 413-417. DOI: 10.1007/BF02764718.

[9] DAI J,GUO J, ZHU X. L^p Boundedness of Fourier Integral Operators with Rough Symbds[J]. *J Math Anal Appl*, 2023, **517**(2): 126654. DOI: 10.1016/j.jmaa.2022.126654.

[10] 邓宇龙, 龙顺潮. Ap(妒)权, 拟微分算子及其交换子[J]. 数学物理学报, 2021, **41**(2): 313-325. DOI: 10.3969/j.issn.1003-3998.2021.02.004.
DENG Y L, LONG S C. Ap(ψ) Weights, Pseudo-differ-

ential Operators and Their Commutators[J]. *Acta Math Sci*, 2021, **41**(2): 313−325. DOI: 10.3969/j. issn. 1003-3998.2021.02.004.

[11] DENG Y L, LONG S C. Pseudodifferential Operators on Weighted Hardy Spaces[J]. *J Funct Spaces*, 2020, **2020**: 7154125. DOI: 10.1155/2020/7154125.

[12] ÁLVAREZ J, HOUNIE J, PÉREZ C. A Pointwise Estimate for the Kernel of a Pseudo-differential Operator, with Applications[J]. *Rev Un Mat Argentina*, 1991,**37**:184−199. DOI: 10.33044/revuma.

[13] ÁLVAREZ J, MILMAN M. Vector Valued Inequalities for Strongly Singular Calderón-zygmund Operators[J]. *Rev Mat Iberoam*, 1986, **2**(4): 405−426. DOI: 10.4171/rmi/42.

[14] DENG Y L, CHEN Z T, LONG S C. Double Weighted Commutators Theorem for Pseudo-differential Operators with Smooth Symbols[J]. *Czechoslov Math J*, 2021, **71**(1): 173−190. DOI: 10.21136/CMJ.2020.0246-19.