

全局意大利控制数较大的图的刻画

郝国亮^{1,2}, 吴愉琪², 谢智红^{3*}, 姜海宁¹

(1. 菏泽学院 数学与统计学院, 山东 菏泽 274015;

2. 东华理工大学 理学院, 江西 南昌 330013;

3. 菏泽学院 商学院, 山东 菏泽 274015)

摘要:研究了图的全局意大利控制问题。通过对图的结构分析,利用分类讨论法刻画了全局意大利控制数等于顶点数的所有连通图。在此基础上,进一步刻画了全局意大利控制数等于顶点数减一且直径不小于3的所有连通图。

关键词:意大利控制;全局意大利控制;连通图

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2026)01-0064-07

Characterization of Graphs with Large Global Italian Domination Numbers

HAO Guoliang^{1,2}, WU Yuqi², XIE Zhihong^{3*}, JIANG Haining¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze 274015, China;

2. College of Science, East China University of Technology, Nanchang 330013, China;

3. School of Business, Heze University, Heze 274015, China)

Abstract: This paper studies the problems of global Italian domination in graphs. By analyzing the structure of graphs and using the method of categorical discussion, all connected graphs with global Italian domination number equal to the number of vertices are characterized. On this basis, all connected graphs of diameter no less than 3 with global Italian domination number equal to the number of vertices minus one are further characterized.

Key words: Italian domination; global Italian domination; connected graph

0 引言

近几十年来,以图的控制参数为研究对象的控制理论逐渐成为图论中一个非常活跃的研究分支。各种控制参数的研究不仅丰富和发展了图的理论,而且也在组合优化、计算机科学、计算科学及网络工程等应用领域得到了很好的发展。关于图的控制问题的研究始于20世纪60年代^[1]。控制集问题一经提出,便引起了学术界的广泛关注^[2-9]。2004年,Cockayne等^[10]受“Defend the Roman Empire”^[11]中防御策略的启发,引入了图的罗马控制的概念。2016年,Chellali等^[12]弱化了“Defend the Roman Empire”中的防御策略,提出了图的罗马 $\{2\}$ -控制的概念,并证明了确定二部图的罗马 $\{2\}$ -控制数问题是NP-完全的。2017年,Henning和Klostermeyer^[13]将罗马 $\{2\}$ -控制重新命名为意

收稿日期:2023-10-28;修回日期:2024-01-30

基金项目:国家自然科学基金(12061007);菏泽学院博士基金(XY23BS12;XY23BS48)

作者简介:郝国亮(1980-),男,山东泰安人,博士,教授,研究方向为图论及其应用。E-mail:guoliang-hao@163.com

* 通信作者:谢智红(XIE Zhihong),E-mail:xiezh168@163.com

引文格式:郝国亮,吴愉琪,谢智红,等.全局意大利控制数较大的图的刻画[J].山西大学学报(自然科学版),2026,49(1):64-70. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024016.

大利控制。Varghese 和 Lakshmanan^[14]得到了 Mycielskian 图和 Sierpinski 图的意大利控制数的上下界。Bommel^[15]计算了有向圈的笛卡尔乘积图的意大利控制数。Gao 等^[16]确定了广义彼得森图的意大利控制数的精确值。Haynes 等^[17]给出了最小度至少为 2 的任意图的意大利控制数的上界并且刻画了等号成立的极图。2019 年, Hao 等^[18]引入了图的意大利控制数的一个衍生变量, 即全局意大利控制数, 并且分别刻画了全局意大利控制数与意大利控制数的差为 1 和 2 的所有树。

1 预备知识

本文用 $G=(V(G), E(G))$ 表示一个无向简单连通图, 其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。用 $N(v)=N_G(v)=\{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ 与 $N[v]=N_G[v]=N_G(v) \cup \{v\}$ 分别表示图 G 中顶点 v 的开邻域与闭邻域。图 G 中顶点 v 的度 $d(v)=d_G(v)=|N_G(v)|$ 。阶为 n 的路记为 P_n 。

图中顶点 u 与 v 的距离 $d(u, v)$ 是指连接这两个顶点的最短路的长度。图 G 的直径 $\text{diam}(G)$ 是指图 G 中任意两个顶点的最大距离。图中长度等于直径的最短路称为直径路。图 G 的补图 \bar{G} 是指满足 $V(\bar{G})=V(G)$ 且 $uv \in E(\bar{G})$ 当且仅当 $uv \notin E(G)$ 的图。顶点数为 $n+1$ 的完全二部图 $K_{1,n}$ 称为星图, 其中度为 n 的顶点称为星图的中心。双星图 $S_{r,s}$ 是指由含有 $r+1$ 个顶点的星图 $K_{1,r}$ 和含有 $s+1$ 个顶点的星图 $K_{1,s}$ 组成的图, 且使得星图 $K_{1,r}$ 的中心与星图 $K_{1,s}$ 的中心相邻。

若函数 $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 使得对图 G 中所有满足 $f(v)=0$ 的顶点 v , 都有 $\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq 2$ 成立, 则称 f 为 G 的意大利控制函数。称 $\omega(f) = \sum_{x \in V(G)} f(x)$ 为 f 的权。 G 的意大利控制数 $\gamma(G)$ 是指 G 的意大利控制函数的最小权。若 f 不仅是图 G 的意大利控制函数, 而且还是图 \bar{G} 的意大利控制函数, 则称 f 为 G 的全局意大利控制函数。 G 的全局意大利控制数 $\gamma_{gl}(G)$ 是指 G 的全局意大利控制函数的最小权。称权为 $\gamma_{gl}(G)$ 的全局意大利控制函数为 $\gamma_{gl}(G)$ -函数。本文继续研究图的全局意大利控制问题, 得到了如下结果:

定理 1 对于任意 n 阶连通图 G , $\gamma_{gl}(G)=n$ 当且仅当图 G 满足下列条件之一:

- (1) $n \leq 4$; (2) $n \geq 5$ 且 \bar{G} 的每个连通分支都是路 P_1 或路 P_2 。

定理 2 对于直径不小于 3 的任意 n 阶连通图 G , $\gamma_{gl}(G)=n-1$ 当且仅当图 G 满足下列条件之一: (1) $G \in \{P_5, S_{1,2}\}$; (2) $G \in \{G_1, G_2, \dots, G_6\}$, 其中图 $G_i (1 \leq i \leq 6)$ 如图 1 所示。

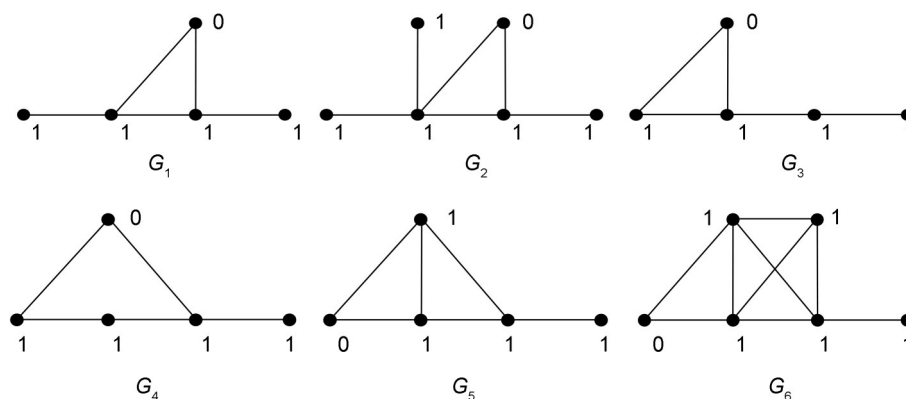


图 1 定理 2 中的图及其权最小的全局意大利控制函数

Fig. 1 Graphs in theorem 2 and their global Italian dominating functions with the minimum weights

2 定理 1 的证明

首先假设 $n \leq 4$ 。令 f 是一个 $\gamma_{gl}(G)$ -函数。如果 G 中每个顶点 v 都满足 $f(v) \neq 0$, 则 $\gamma_{gl}(G)=$

$\omega(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v) \geq n$; 如果存在某个顶点 $v \in V(G)$ 使得 $f(v) = 0$, 则由 $\gamma_{gl}(G)$ -函数的定义知,

$$\sum_{x \in N_G(v)} f(x) \geq 2 \text{ 且 } \sum_{x \in N_G(v)} f(x) \geq 2, \text{ 于是 } \gamma_{gl}(G) = \omega(f) = f(v) + \sum_{x \in N_G(v)} f(x) + \sum_{x \in N_G(v)} f(x) \geq 4 \geq n.$$

另一方面, 显然有 $\gamma_{gl}(G) \leq n$. 故 $\gamma_{gl}(G) = n$.

下设 $n \geq 5$. 如果 \bar{G} 的每个连通分支都是路 P_1 或路 P_2 , 则不难验证函数 f 使得对任意顶点 $x \in V(G)$, 都有 $f(x) = 1$ 是一个 $\gamma_{gl}(G)$ -函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) = n$. 因此充分性成立. 为证明必要性, 假设 $\gamma_{gl}(G) = n$. 我们给出以下断言.

断言 1 对于任意顶点 $v \in V(G)$, $d(v) \in \{1, n - 2, n - 1\}$.

断言 1 的证明 假设存在顶点 $v \in V(G)$ 使得 $2 \leq d(v) \leq n - 3$. 则不难验证函数 f 使得 $f(v) = 0$ 且当 $x \in V(G) - \{v\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 1$, 与 $\gamma_{gl}(G) = n$ 矛盾. 断言 1 得证.

断言 2 $\text{diam}(G) = 2$.

断言 2 的证明 假设 $\text{diam}(G) \geq 3$. 不失一般性, 令 $P = v_1 v_2 \cdots v_{\text{diam}(G)+1}$ 是图 G 的一条直径路. 因为 $v_3, v_4 \notin N(v_1)$, 所以 $d(v_1) \leq n - 3$. 故由断言 1 知, $d(v_1) = 1$. 同理可得 $d(v_4) = 1$. 因此 $\text{diam}(G) = 3$. 又因为 $v_1, v_3 \in N(v_2)$ 且 $v_4 \notin N(v_2)$, 所以 $2 \leq d(v_2) \leq n - 2$. 于是由断言 1 知, $d(v_2) = n - 2$. 同理可得 $d(v_3) = n - 2$. 又因为 $n \geq 5$ 且 $d(v_1) = d(v_4) = 1$, 所以对于任意顶点 $x \in V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 都有 $v_2, v_3 \in N(x)$ 且 $v_1, v_4 \notin N(x)$, 故 $2 \leq d(x) \leq n - 3$, 与断言 1 矛盾. 因此 $\text{diam}(G) \leq 2$. 又因为 $n \geq 5$, 所以 $\text{diam}(G) = 2$. 断言 2 得证.

断言 3 \bar{G} 的每个连通分支都是路 P_1 或路 P_2 .

断言 3 的证明 首先假设图 G 中存在 1 度顶点 v . 令 $N(v) = \{u\}$. 则由断言 2 知, $\text{diam}(G) = 2$. 因此对于任意顶点 $x \in V(G) - \{u, v\}$, 都有 $x \in N(u) - N(v)$ 成立. 于是不难看出函数 f 使得 $f(u) = f(v) = 2$ 且当 $x \in V(G) - \{u, v\}$ 时, $f(x) = 0$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = 4 \leq n - 1$, 矛盾. 因此 G 中不存在 1 度顶点. 故由断言 1 可得, 对于任意顶点 $x \in V(G)$, 都有 $d_G(x) \in \{n - 2, n - 1\}$, 即在 \bar{G} 中, 任意顶点的度都为 0 或 1. 因此 \bar{G} 的每个连通分支都是路 P_1 或路 P_2 . 断言 3 得证.

由断言 3 知, 当 $\gamma_{gl}(G) = n$ 时, 如果 $n \geq 5$, 则图 \bar{G} 的每个连通分支都是路 P_1 或路 P_2 . 因此必要性成立.

3 定理 2 的证明

为证明定理 2, 我们首先给出以下两个引理.

引理 1 对于直径不小于 4 的任意 n 阶连通图 G , $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 当且仅当 $G = P_5$.

证明 因为 $\text{diam}(G) \geq 4$, 所以 $n \geq 5$. 若 $n = 5$, 则易见 $G = P_5$ 且 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$. 下设 $n \geq 6$. 在这种情况下, 为证明结论成立, 只需要证明 $\gamma_{gl}(G) \neq n - 1$ 即可. 设 $P = v_1 v_2 \cdots v_{\text{diam}(G)+1}$ 是图 G 的一条直径路. 如果 $\text{diam}(G) \geq 5$, 则函数 f 使得 $f(v_2) = f(v_4) = 0$ 且当 $x \notin \{v_2, v_4\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$. 因此不妨假设 $\text{diam}(G) = 4$.

若 $d(v_1) \geq 2$, 则不妨设 $u \in N(v_1) - \{v_2\}$. 因为 P 是图 G 的直径路, 所以 $u \notin N(v_4)$. 于是函数 f 使得 $f(v_1) = f(v_4) = 2, f(v_2) = f(v_3) = f(v_5) = f(u) = 0$ 且当 $x \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$. 同理, 若 $d(v_5) \geq 2$, 则 $\gamma_{gl}(G) \leq n - 2$. 因此可以假设 $d(v_1) = d(v_5) = 1$.

如果 $d(v_2) \geq 3$, 则不妨假设 $u \in N(v_2) - \{v_1, v_3\}$. 易见函数 f 使得 $f(v_2) = f(v_5) = 2, f(v_1) =$

$f(v_3)=f(v_4)=f(u)=0$ 且当 $x \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u\}$ 时, $f(x)=1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$ 。同理, 如果 $d(v_4) \geq 3$, 则 $\gamma_{gl}(G) \leq n - 2$ 。因此可以假设 $d(v_2)=d(v_4)=2$ 。注意到 $d(v_1)=d(v_5)=1$ 。又因为 $n \geq 6$, 所以 $d(v_3) \geq 3$ 。于是函数 f 使得 $f(v_2)=f(v_4)=0$ 且当 $x \notin \{v_2, v_4\}$ 时, $f(x)=1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$ 。

引理2 对于直径为3的任意 n 阶连通图 G , $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 当且仅当图 G 满足下列条件之一:

(1) $G = S_{1,2}$; (2) $G \in \{G_1, G_2, \dots, G_6\}$, 其中图 $G_i (1 \leq i \leq 6)$ 如图1所示。

证明 如果 $G = S_{1,2}$ 或 $G \in \{G_1, G_2, \dots, G_6\}$, 则由图1知, $\gamma_{gl}(G) = n - 1$, 因此充分性成立。下面证明必要性也成立。设 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 。令 $P = v_1 v_2 v_3 v_4$ 是图 G 的一条直径路。

首先证明 $d(v_1) + d(v_4) \leq 3$ 。(反证法) 假设 $d(v_1) + d(v_4) \geq 4$ 。因为 P 是图 G 的直径路, 所以 $N(v_1) \cap N(v_4) = \emptyset$ 。于是函数 f 使得 $f(v_1)=f(v_4)=2$; 当 $x \in N(v_1) \cup N(v_4)$ 时, $f(x)=0$ 且当 $x \notin N[v_1] \cup N[v_4]$ 时, $f(x)=1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故

$$\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = (n - |N[v_1] \cup N[v_4]|) + 4 = (n - d(v_1) - d(v_4) - 2) + 4 \leq n - 2,$$

与 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 矛盾。因此 $d(v_1) + d(v_4) \leq 3$ 。不失一般性, 假设 $d(v_1) = d(v_4) = 1$ 或 $d(v_1) = 2$ 且 $d(v_4) = 1$ 。下面分两种情形考虑。

情形1 $d(v_1) = d(v_4) = 1$ 。

在这种情形下, 我们给出以下两个断言。

断言1 $|N(v_2) \cap N(v_3)| \in \{0, 1\}$ 且 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| \in \{2, 3\}$ 。

断言1的证明 首先证明 $|N(v_2) \cap N(v_3)| \in \{0, 1\}$ 。(反证法) 假设 $|N(v_2) \cap N(v_3)| \geq 2$ 。则函数 f 使得当 $x \in N(v_2) \cap N(v_3)$ 时, $f(x)=0$ 且当 $x \notin N(v_2) \cap N(v_3)$ 时, $f(x)=1$ 是 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - |N(v_2) \cap N(v_3)| \leq n - 2$, 与 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 矛盾。因此 $|N(v_2) \cap N(v_3)| \in \{0, 1\}$ 。

其次证明 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| \in \{2, 3\}$ 。因为

$$v_1, v_4 \in (N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3]),$$

所以

$$|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| \geq 2.$$

下证 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| \leq 3$ 。(反证法) 假设

$$|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| \geq 4.$$

易见函数 f 使得 $f(v_2)=f(v_3)=2$; 当 $x \in (N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])$ 时, $f(x)=0$, 且当 $x \notin (N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])$ 时, $f(x)=1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故

$$\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = (n - 2 - |(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])|) + 4 \leq (n - 2 - 4) + 4 = n - 2,$$

与 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 矛盾。因此 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| \leq 3$ 。断言1得证。

断言2 $G \in \{S_{1,2}, G_1, G_2\}$ 。

断言2的证明 由断言1知, $|N(v_2) \cap N(v_3)| \in \{0, 1\}$ 且 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| \in \{2, 3\}$ 。

注意到 $\text{diam}(G) = 3$ 且 $d(v_1) = d(v_4) = 1$ 。因此, 如果 $|N(v_2) \cap N(v_3)| = 0$ 且 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| = 2$, 则显然 $G = P_4$ 并且由定理1知, $\gamma_{gl}(P_4) = n$, 矛盾; 如果 $|N(v_2) \cap N(v_3)| = 0$ 且 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| = 3$, 则易见 $G = S_{1,2}$ 。

下面假设 $|N(v_2) \cap N(v_3)| = 1$ 。令 $N(v_2) \cap N(v_3) = \{w\}$ 。首先设

$$|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| = 2,$$

即 $(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3]) = \{v_1, v_4\}$ 。则 $N(v_2) = \{v_1, v_3, w\}$ 且 $N(v_3) = \{v_2, v_4, w\}$ 。注意

到 $d(v_1)=d(v_4)=1$ 。因此如果 $n \geq 6$, 则 $V(G)-\{v_1, v_2, v_3, v_4, w\}$ 中一定存在某个顶点, 不妨设为 w' , 使得 $w' \in N(w)$ 且 $w' \notin N(v_1) \cup N(v_2) \cup N(v_3) \cup N(v_4)$ 。于是不难验证函数 g 使得 $g(v_2)=g(v_3)=0$ 且当 $x \notin \{v_2, v_3\}$ 时, $g(x)=1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(g) = n - 2$, 矛盾。因此 $n = 5$, 即 $G = G_1$ 。

其次设 $|(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3])| = 3$ 。不失一般性, 假设

$$(N(v_2) \cup N(v_3)) - (N[v_2] \cap N[v_3]) = \{v_1, v_4, u\},$$

其中 $N(v_2) - \{v_1, v_3, w\} = \{u\}$ 。因为 $N(v_2) \cap N(v_3) = \{w\}$, 所以 $u \notin N(v_3)$ 。如果 $n \geq 7$, 则前面定义的函数 g 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(g) = n - 2$, 矛盾。因此 $n = 6$ 。如果 $uw \in E(G)$, 则函数 f 使得 $f(v_3) = f(w) = 0$ 且当 $x \notin \{v_3, w\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。因此 $uw \notin E(G)$, 即 $G = G_2$ 。断言 2 得证。

情形 2 $d(v_1) = 2$ 且 $d(v_4) = 1$ 。

在这种情形下, 设 $N(v_1) - \{v_2\} = \{u\}$ 。我们给出以下四个断言。

断言 3 $|N(u) \cap \{v_2, v_3\}| \in \{1, 2\}$ 。

断言 3 的证明 假设 $|N(u) \cap \{v_2, v_3\}| = 0$ 。因为 $P = v_1v_2v_3v_4$ 是图 G 的一条直径路且 $d(v_4) = 1$, 所以一定存在某个顶点 $w \in N(v_3) \cap N(u)$ (否则, $d(u, v_4) \geq 4 > 3 = \text{diam}(G)$, 矛盾)。又因为 $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(v_4) = \{v_3\}$, 所以函数 f 使得 $f(v_2) = f(w) = 0$, 且当 $x \notin \{v_2, w\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。因此断言 3 得证。

断言 4 如果 $|N(u) \cap \{v_2, v_3\}| = 1$, 则 $G \in \{G_3, G_4\}$ 。

断言 4 的证明 假设 $G \notin \{G_3, G_4\}$ 。则 $|V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4, u\}| \geq 1$ 。不失一般性, 假设 $w \in V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4, u\}$ 。注意到 $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(v_4) = \{v_3\}$ 。因此如果 $|N(w) \cap \{v_2, v_3\}| = 2$, 则函数 f 使得 $f(u) = f(w) = 0$, 且当 $x \notin \{u, w\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。如果 $|N(w) \cap \{v_2, v_3\}| = 1$, 则因为 $|N(u) \cap \{v_2, v_3\}| = 1$, 所以函数 f 使得 $f(v_2) = f(v_3) = 2, f(v_1) = f(v_4) = f(u) = f(w) = 0$, 且当 $x \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, u, w\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。因此 $N(w) \cap \{v_2, v_3\} = \emptyset$ 。

注意到 $|N(u) \cap \{v_2, v_3\}| = 1$ 。若 $N(u) \cap \{v_2, v_3\} = \{v_2\}$, 则函数 f 使得 $f(v_1) = f(v_3) = 0$, 且当 $x \notin \{v_1, v_3\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。因此 $N(u) \cap \{v_2, v_3\} = \{v_3\}$ 。

如果 $uw \in E(G)$, 则函数 f 使得 $f(u) = f(v_3) = 0$, 且当 $x \notin \{u, v_3\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。如果 $uw \notin E(G)$, 则函数 f 使得 $f(u) = f(v_2) = 0$, 且当 $x \notin \{u, v_2\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。因此 $G \in \{G_3, G_4\}$ 。断言 4 得证。

断言 5 如果 $|N(u) \cap \{v_2, v_3\}| = 2$, 则对任意 $x \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, u\}$, $|N(x) \cap \{v_2, v_3\}| = 2$ 。

断言 5 的证明 假设存在顶点 $w \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4, u\}$ 使得 $|N(w) \cap \{v_2, v_3\}| \leq 1$ 。如果 $|N(w) \cap \{v_2, v_3\}| = 0$, 则函数 f 使得 $f(v_2) = f(v_3) = 0$, 且当 $x \notin \{v_2, v_3\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。下设 $|N(w) \cap \{v_2, v_3\}| = 1$ 。

如果 $w \in (N(v_i) - N(v_{5-i})) \cap N(u)$, 其中 $i \in \{2, 3\}$, 则函数 f 使得 $f(v_1) = f(w) = 0$, 且当 $x \notin \{v_1, w\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。如果 $w \in N(v_i) - (N(v_{5-i}) \cup N(u))$, 其中 $i \in \{2, 3\}$, 则函数 f 使得 $f(u) = f(v_{5-i}) = 0$, 且当 $x \notin \{u, v_{5-i}\}$

时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。断言 5 得证。

断言 6 如果 $|N(u) \cap \{v_2, v_3\}| = 2$, 则 $G \in \{G_5, G_6\}$ 。

断言 6 的证明 如果 $n \geq 7$, 则不妨设 $w, w' \in V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4, u\}$ 。于是由断言 5 知, $|N(w) \cap \{v_2, v_3\}| = |N(w') \cap \{v_2, v_3\}| = 2$ 。注意到 $N(v_1) = \{u, v_2\}$ 且 $N(v_4) = \{v_3\}$ 。因此函数 f 使得 $f(w) = f(w') = 0$, 且当 $x \notin \{w, w'\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 于是 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。故 $n \in \{5, 6\}$ 。

如果 $n = 5$, 则显然 $G = G_5$ 。下设 $n = 6$ 且 $V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4, u\} = \{w\}$ 。于是由断言 5 知, $|N(w) \cap \{v_2, v_3\}| = 2$ 。如果 $uw \notin E(G)$, 则函数 f 使得 $f(v_1) = f(w) = 0$, 且当 $x \notin \{v_1, w\}$ 时, $f(x) = 1$ 是图 G 的全局意大利控制函数, 故 $\gamma_{gl}(G) \leq \omega(f) = n - 2$, 矛盾。因此 $uw \in E(G)$, 即 $G = G_6$ 。断言 6 得证。

因此如果 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$, 则由断言 2、4 和 6 知, $G = S_{1,2}$ 或 $G \in \{G_1, G_2, \dots, G_6\}$, 即必要性成立。

定理 2 的证明 由引理 1 和引理 2 知, 定理 2 显然成立。

4 结论

本文主要研究了图的控制理论中的全局意大利控制问题。通过对图的结构分析, 利用分类讨论法刻画了 $\gamma_{gl}(G) = n$ 成立的所有 n 阶连通图。此外, 还刻画了 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 成立的所有直径不小于 3 的 n 阶连通图。在未来的研究中, 可以考虑刻画 $\gamma_{gl}(G) = n - 1$ 成立的直径为 2 的 n 阶连通图。

参考文献:

- [1] ORE O. Theory of Graphs[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1962. DOI: 10.1090/coll/038.
- [2] BABIKIR A, HENNING M A. Domination Versus Total Domination in Claw-free Cubic Graphs[J]. *Discrete Math*, 2022, **345**(4): 112784. DOI: 10.1016/j.disc.2021.112784.
- [3] BLIDIA M, BOUCHOU A, CHELLALI M. Extremal Graphs for a Bound on the Roman Domination Number [J]. *Discuss Math Graph Theory*, 2020, **40**(3): 771. DOI: 10.7151/dmgt.2142.
- [4] MEIYANATHAN M, ANITHA K. Domination, Edge Domination and Roman Domination in Human Chain Graph[J]. *J Phys: Conf Ser*, 2021, **1724**(1): 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1724/1/012023.
- [5] SUN X L, DU J W. On Sombor Index of Trees with Fixed Domination Number[J]. *Appl Math Comput*, 2022, **421**: 126946. DOI: 10.1016/j.amc.2022.126946.
- [6] 张新鸿, 郭亚丽. 有向 de Bruijn 图与广义有向 de Bruijn 图的罗马控制数[J]. *山西大学学报(自然科学版)*, 2023, **46**(5): 1042-1049. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2023007.
ZHANG X H, GUO Y L. The Roman Domination Numbers of the Directed de Bruijn and Generalized Directed de Bruijn Graphs[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2023, **46**(5): 1042-1049. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2023007.
- [7] JOSEPH J, JOSEPH M. Roman Domination in Signed Graphs[J]. *Commun Comb Optim*, 2023, **8**(2): 349-358. DOI:10.22049/cco.2022.27438.1264.
- [8] 郝国亮, 曾淑婷, 庄蔚, 等. 全局 3-彩虹控制数与 3-彩虹控制数之差为 2 和 3 的树的刻画[J]. *大连理工大学学报*, 2023, **63**(5): 544-550. DOI: 10.7511/dllgxb202305014.
HAO G L, ZENG S T, ZHUANG W, et al. Characterization of Trees with Difference of Their Global 3-rainbow Domination Number and 3-rainbow Domination Number being 2 and 3[J]. *J Dalian Univ Technol*, 2023, **63**(5): 544-550. DOI: 10.7511/dllgxb202305014.
- [9] HAO G L, XIE Z H, SHEIKHOLESAMI S M, et al. Bounds on the Total Double Roman Domination Number of Graphs[J]. *Discuss Math Graph Theory*, 2023, **43**(4): 1033. DOI: 10.7151/dmgt.2417.
- [10] COCKAYNE E J, DREYER P A, HEDETNIEMI S M, et al. Roman Domination in Graphs[J]. *Discrete Math*, 2004, **278**(1/2/3): 11-22. DOI: 10.1016/j.disc.2003.06.004.
- [11] STEWART I. Defend the Roman Empire! [J]. *Sci Am*, 1999, **281**(6): 136-138. DOI: 10.1038/scientificamerican1299-136.
- [12] CHELLALI M, HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, et al. Roman $\{2\}$ -domination[J]. *Discrete Appl Math*, 2016, **204**(C): 22-28. DOI: 10.1016/j.dam.2015.11.013.

- [13] HENNING M A, KLOSTERMEYER W F. Italian Domination in Trees[J]. *Discrete Appl Math*, 2017, **217** (P3): 557–564. DOI: 10.1016/j.dam.2016.09.035.
- [14] VARGHESE J, APARNA LAKSHMANAN S. Italian Domination on Mycielskian and Sierpinski Graphs[J]. *Discrete Math Algorithm Appl*, 2021, **13**(4): 2150037. DOI: 10.1142/s1793830921500373.
- [15] VAN BOMMEL C M. Italian Domination of Cartesian Products of Directed Cycles[J]. *Discrete Appl Math*, 2021, **299**: 82–86. DOI: 10.1016/j.dam.2021.04.023.
- [16] GAO H, XIC Q, LI K, *et al.* The Italian Domination Numbers of Generalized Petersen Graphs $P(N, 3)$ [J]. *Mathematics*, 2019, **7**(8): 714. DOI: 10.3390/math7080714.
- [17] HAYNES T W, HENNING M A, VOLKMANN L. Graphs with Large Italian Domination Number[J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2020, **43**(6): 4273–4287. DOI: 10.1007/s40840-020-00921-y.
- [18] HAO G L, HU K X, WEI S L, *et al.* Global Italian Domination in Graphs[J]. *Quaest Math*, 2019, **42**(8): 1101–1115. DOI: 10.2989/16073606.2018.1506831.