山西大学学报(自然科学版)49(1):71−77,2026
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024017

完备Witt李代数的1/2−导子及转置泊松结构

张雯婷,吴鹤楠*
(山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006)

摘　要:完备Witt李代数$\hat{L}$是由形式幂级数代数的导子构成的李代数。我们确定了$\hat{L}$的所有1/2−导子,证明了$\hat{L}$有非平凡的转置泊松结构,并且给出了$\hat{L}$的转置泊松结构的乘法的一般形式为$\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)=\sum_{q=-1}^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q$,其中,$a_1,a_2,\cdots\in\mathbb{C}$。对广义的完备Witt李代数也得到了类似的结果。

关键词:完备Witt李代数;广义完备Witt李代数;1/2−导子;转置泊松结构
中图分类号:O151　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2026)01-0071-07

1/2-Derivations and Transposed Poisson Structures on the Completed Witt Lie Algebra

ZHANG Wenting, WU Henan*
(*School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: The completed Witt Lie algebra $\hat{L}$ is a Lie algebra consisting of derivations of the algebra of formal series. We determine all 1/2-derivations of $\hat{L}$. We prove transposed Poisson structures of $\hat{L}$ are nontrivial, and the general form of multiplication of transposed Poisson structures of $\hat{L}$ is $\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)=\sum_{q=-1}^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q$, where $a_1,a_2,\cdots\in\mathbb{C}$. Similar results are also obtained for the generalized completed Witt Lie algebra.

Key words: completed Witt Lie algebra; generalized completed Witt Lie algebra; 1/2-derivation; transposed Poisson structure

0　引言

泊松代数起源于20世纪70年代的泊松几何,从那时起,泊松代数已经在数学和物理的几个领域显示了它的重要性,如泊松流形,代数几何,量子化理论,量子群和量子力学。许多学者对泊松代数及其相关的代数结构进行了深入的研究,例如generic Poisson代数[1],Novikov−Poisson代数[2],quiver Poisson代数[3]。当下研究具有固定李代数上的所有可能的泊松结构是泊松代数理论中的热门课题,学者们研究了oscillator李代数[4],有限维半单李代数及Kac−Moody代数[5]的泊松结构。

近年,Bai等通过交换定义泊松代数的莱布尼茨规则中两个二元运算的角色,引入了泊松代数

收稿日期:2023-09-07;**修回日期**:2024-02-19
基金项目:国家自然科学基金(11701345)
作者简介:张雯婷(1998—),女,新疆人,硕士研究生,研究方向为李代数。E-mail:202122201017@email.sxu.edu.cn
* **通信作者**:吴鹤楠(WU Henan),E-mail:wuhenan@sxu.edu.cn
引文格式:张雯婷,吴鹤楠.完备Witt李代数的1/2−导子及转置泊松结构[J].山西大学学报(自然科学版),2026,49(1):71-77. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024017.

的对偶概念,称为转置泊松代数[6]。研究具有固定李代数上的所有可能的转置泊松结构有助于理解一般的转置泊松代数的结构问题。为了研究固定李代数上的所有可能的转置泊松结构,Ferreira等[7]引出了1/2-导子的定义,他们指出转置泊松代数的每个左乘算子都是相应李代数上的1/2-导子,从而可以利用李代数的1/2-导子去确定它上面的转置泊松结构。之后学者们根据李代数的1/2-导子与转置泊松代数之间的关系,研究了具有固定李代数的转置泊松结构。这些学者们发现了一些李代数没有非平凡的转置泊松结构,例如,Yuan,Hua[8]研究了twisted Heisenberg-Virasoro代数,Schrödinger-Virasoro代数,扩张的Schrödinger-Virasoro代数,twisted Schrödinger-Virasoro代数的转置泊松结构,发现了这些李代数没有非平凡的1/2-导子,所以这些李代数上没有非平凡的转置泊松结构。Kaygorodov等[9]对伽利略型李代数上的转置泊松结构进行了研究,Kaygorodov等证明了伽利略型李代数没有非平凡的1/2-导子,所以伽利略型李代数上没有非平凡的转置泊松结构。而一些李代数上有非平凡的转置泊松结构,例如,Kaygorodov等[10]对block李(超)代数上的转置泊松结构进行了研究,证明了block李(超)代数上有非平凡的转置泊松结构。Witt类代数是一类重要的李代数,最早Ferreira等[7]研究了Witt代数和Virasoro代数上的所有转置泊松结构,发现了Witt代数上有非平凡的转置泊松结构,Virasoro代数上没有非平凡的1/2-导子,所以没有非平凡的转置泊松结构。之后Kaygorodov等[11]研究了Witt型李代数上的转置泊松结构,发现了当$f(\Gamma)=1$时,Witt型李代数上没有非平凡的1/2-导子,所以没有非平凡的转置泊松结构,当$f(\Gamma)\geqslant 2$时,Witt型李代数上有非平凡的转置泊松结构。完备Witt李代数是经典Witt代数的一种推广,它是一元形式幂级数代数$\mathbb{C}[[t]]$的导子代数。在本文中,我们想要研究完备Witt李代数的转置泊松结构,进而更清楚地了解Witt类代数上的转置泊松代数结构。

本篇论文有以下几个部分构成,第1节介绍了转置泊松代数、1/2-导子、完备Witt李代数及广义完备Witt李代数的定义。第2节计算了完备Witt李代数的1/2-导子并且研究了它的转置泊松结构,第3节计算了广义完备Witt李代数的1/2-导子并且研究了它的转置泊松结构,第4节进行总结。

1 基本概念

在这一节中我们给出了转置泊松代数的定义,1/2-导子的定义,以及完备Witt李代数、广义完备Witt李代数的定义。

定义1[6] 若L是带有两个乘法运算$\cdot$和$[\cdot,\cdot]$的线性空间,并且满足三个条件:

(1)$(L,\cdot)$是一个交换结合代数,

(2)$(L,[\cdot,\cdot])$是一个李代数,

(3)对$\forall x,y,z\in L$,

$$2z\cdot[x,y]=[z\cdot x,y]+[x,z\cdot y],$$

则称$(L,[\cdot,\cdot])$是一个转置泊松代数。

定义2[7] 设$(L,[\cdot,\cdot])$是一个李代数,并且ϕ是L的线性变换。若

$$\phi[x,y]=\frac{1}{2}\big([\phi(x),y]+[x,\phi(y)]\big),$$

则ϕ被称为是L的1/2-导子,L的所有1/2-导子构成的线性空间记为$\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}L$。

设$(L,[\cdot,\cdot])$是一个转置泊松代数,对任意$x\in L$,左乘变换

$$L_x: y\mapsto xy,\ \forall y\in L$$

是$(L,[\cdot,\cdot])$的1/2-导子。

众所周知,单边Witt代数W_1^+是一元多项式代数$\mathbb{C}[t]$的导子代数,即$W_1^+=\mathrm{Der}\mathbb{C}[t]=$

$\mathbb{C}[t]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$。若令 $L_i=t^{i+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则 W_1^+ 具有一组基为 $\{L_i|i\in\mathbb{Z},i\geqslant-1\}$, 括积运算为 $[L_i,L_j]=(j-i)L_{i+j}$。类似地也可以考虑一元形式幂级数代数 $\mathbb{C}[[t]]$ 的导子,那么就会得到完备Witt李代数的定义。

定义3[12] 完备Witt李代数 $\hat{L}$ 是一元形式幂级数代数 $\mathbb{C}[[t]]$ 的导子代数,简单计算可知 $\mathrm{Der}\mathbb{C}[[t]]=\mathbb{C}[[t]]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$。令 $L_i=t^{i+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 那么 $\hat{L}$ 是由元素 $\sum\limits_{i=-1}^{\infty}a_iL_i$ 构成的不可数维的线性空间,可以推出括积运算为

$$\left[\sum_{i=-1}^{\infty}a_iL_i,\ \sum_{j=-1}^{\infty}b_jL_j\right]=\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\sum_{j=-1}^{k+1}(2j-k)a_{k-j}b_j\right)L_k。\tag{1}$$

上述是经典的完备Witt李代数的定义,还可以推广这个概念,定义 $\tilde{L}$ 为所有下截断的形式幂级数

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_iL_i,\exists m\in\mathbb{Z},a_i=0,i<m$$

构成的李代数,其括积由下式给出

$$\left[\sum_i a_iL_i,\ \sum_j b_jL_j\right]=\sum_k\left(\sum_j(2j-k)a_{k-j}b_j\right)L_k。\tag{2}$$

我们称 $\tilde{L}$ 为广义的完备Witt李代数。

2 完备Witt李代数 $\hat{L}$ 的1/2-导子及转置泊松结构

这节将计算 $\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}\hat{L}$。首先注意到 $\{L_i|i\in\mathbb{Z},i\geqslant-1\}$ 并不是 $\hat{L}$ 的一组基, $\hat{L}$ 上的一般的线性变换在所有 $L_i,i\geqslant-1$ 上的取值并不能确定这个线性变换。文献[12]证明了 $\hat{L}$ 的导子由其在 $L_i,i\geqslant-1$ 上的取值完全确定。这个结论也可以推广到1/2-导子上来。

引理1 设 $D\in\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\hat{L})$,使得 $D(L_i)=0,\forall i\geqslant-1$, 那么 $D=0$。

证明 设 $x=\sum\limits_{i=-1}^{\infty}a_iL_i\in\hat{L}$,假设 $D(x)=\sum\limits_{i=-1}^{\infty}b_iL_i$, 接下来计算 b_{i_0},其中 $i_0\geqslant-1$,取 $N>i_0+1$,然后得到

$$D(x)=D\left(\sum_{i=-1}^{\infty}a_iL_i\right)=D\left(\sum_{i=-1}^{N-2}a_iL_i+\sum_{i=N-1}^{\infty}a_iL_i\right)=D\left(\sum_{i=N-1}^{\infty}a_iL_i\right)=$$

$$D\left(\sum_{i=-1}^{\infty}a_{i+N}L_{i+N}\right)=D\left(\left[L_N,\ \sum_{i\neq N}\frac{a_{i+N}}{i-N}L_i\right]+a_{2N}L_{2N}\right)=\frac{1}{2}\left[L_N,D\left(\sum_{i\neq N}\frac{a_{i+N}}{i-N}L_i\right)\right]。$$

若 $D\left(\sum\limits_{i\neq N}\frac{a_{i+N}}{i-N}L_i\right)=\sum\limits_{i=-1}^{\infty}c_iL_i$,然后得到 $\sum\limits_{i=-1}^{\infty}b_iL_i=\frac{1}{2}\left[L_N,\ \sum\limits_{i=-1}^{\infty}c_iL_i\right]=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=-1}^{\infty}c_i(i-N)L_{i+N}$,这表明 $b_{i_0}=0$。因为 i_0 是任意取的,所以得到 $D(x)=0$。

设 $D\in\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\hat{L})$, 并且有

$$D(L_i)=\sum_{j=-1}^{\infty}a_{j,i}L_j,$$

其中 $a_{j,i}\in\mathbb{C}$。令 $a_k=a_{k,0},k\geqslant-1$, 约定 $a_k=0,k<-1$。我们将计算 $a_{j,i},i,j\geqslant-1$。为了下面讨论中的式子写起来简单可以约定 $a_{j,i}=0,j<-1$。

引理2 对任意的 $j,m\geqslant-1,a_{j,m}=a_{j-m}$。

证明 因为$[L_m,L_i]=(i-m)L_{m+i}$，将D作用在上式可以得到

$$2(i-m)\sum_{j=-1}^{\infty}a_{j,m+i}L_j=\sum_{j=-1}^{\infty}a_{j,m}(i-j)L_{i+j}+\sum_{j=-1}^{\infty}a_{j,i}(j-m)L_{m+j}。\tag{3}$$

比较L_j前面的系数得到，

$$2(i-m)a_{j,m+i}=(2i-j)a_{j-i,m}-(2m-j)a_{j-m,i},\forall m,j,i\geqslant -1。\tag{4}$$

在公式(4)中令$i=0$得到$(2m-j)a_{j,m}=(2m-j)a_{j-m,0}$，当$j\neq 2m$时，有

$$a_{j,m}=a_{j-m,0}。\tag{5}$$

下面计算$a_{2m,m}$。只需考虑$m>0$，在公式(4)中令$j=5m,i=3m$，有

$$4ma_{5m,4m}=ma_{2m,m}+3ma_{4m,3m}。\tag{6}$$

根据公式(5)得到$a_{5m,4m}=a_{4m,3m}=a_{m,0}$，将式子代入公式(6)得到$a_{2m,m}=a_{m,0}$。综上所述$a_{j,m}=a_{j-m}$。

引理3 $a_{-1}=0$。

证明 在公式(4)中，令$j=-1,i=1,m=-1$得到$4a_{-1,0}=3a_{-2,-1}+a_{0,1}$，又因为$a_{-2,-1}=0$，可以得到$3a_{-1,0}=0$，所以$a_{-1}=0$。

由引理2与引理3可得到$D(L_i)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kL_{i+k},\forall i\geqslant -1$。

相反，对任意的一组复数$a_i,i\geqslant 0$，我们定义

$$D'\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)=\sum_{t=-1}^{\infty}\left(\sum_{i=-1}^{t}x_ia_{t-i}\right)L_t。$$

容易看出，D'是$\hat{L}$的一个线性变换。特别地，对任意$i\geqslant -1$，$D'(L_i)=\sum_{t=-1}^{\infty}a_{t-i}L_t=\sum_{k=0}^{\infty}a_kL_{i+k}=D(L_i)$。

引理4 $D'\in \mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\hat{L})$，从而$D=D'$。

证明 根据式(1)得到

$$2D'\left[\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i,\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right]=2D'\left(\sum_{i=-1}^{\infty}\sum_{j=-1}^{i}(2j-i)x_{i-j}y_jL_j\right)=\sum_{t=-1}^{\infty}\sum_{i=-1}^{t}\sum_{j=-1}^{i}(4j-2i)x_{i-j}y_ja_{t-i}L_t。\tag{7}$$

$$\left[D'\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right),\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right]=\sum_{t=-1}^{\infty}\sum_{i=-1}^{t}\sum_{j=-1}^{i}(2j-t)x_{i-j}y_ja_{t-i}L_t。\tag{8}$$

$$\left[\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i,D'\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)\right]=\sum_{t=-1}^{\infty}\sum_{i=-1}^{t}\sum_{j=-1}^{i}(t-2i+2j)x_{i-j}y_ja_{t-i}L_t。\tag{9}$$

根据式(7)—式(9)然后可以得到

$$2D'\left[\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i,\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right]=\left[D'\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right),\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right]+\left[\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i,D'\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)\right]。$$

根据定义2推出$D'\in \mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\hat{L})$。因为$D\in \mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\hat{L})$，所以$D-D'\in \mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\hat{L})$，根据引理1可以得到$D-D'=0$，也就是$D=D'$。

令$\mathbb{N}$表示自然数的集合，$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$表示从$\mathbb{N}$到$\mathbb{C}$的所有函数构成的线性空间，即

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}=\{(a_0,a_1,\cdots,a_m,\cdots)|a_i\in\mathbb{C}\}。$$

命题1 作为线性空间，$\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\hat{L})\cong\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。

证明 由引理1、2、3、4可以得到每一个D都与线性空间$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$中的一个向量一一对应。这里

$D\in \mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}\left(\hat{L}\right),(a_0,a_1,\cdots,a_m,\cdots)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。所以 $\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}\left(\hat{L}\right)\cong\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。

定理1 完备Witt李代数 $\hat{L}$ 的转置泊松结构是非平凡的,$\hat{L}$ 的转置泊松结构的乘法的一般形式为

$$\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)=\sum_{q=-1}^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots\in\mathbb{C}$。

证明 设 $\mathcal{T}$ 是 $\hat{L}$ 上的一个转置泊松代数,D_i 表示左乘 L_i 这个变换,由命题1知存在 $a_{k,i}\in\mathbb{C},k\in\mathbb{N}$ 使得

$$D_i(L_j)=\sum_{k\geqslant 0}a_{k,i}L_{j+k},\forall j\geqslant -1。$$

由乘法的交换律知 $D_j(L_i)=L_i\cdot L_j=L_j\cdot L_i=D_i\left(L_j\right)$。当 $i\geqslant 0$ 时,由 $D_0(L_i)=L_i\cdot L_0=L_0\cdot L_i=D_i(L_0)$ 得

$$a_{m,i}=\begin{cases}a_{m-i,0} & m\geqslant i\\ 0 & m<i\end{cases}。$$

当 $i=-1$ 时,由 $D_0(L_{-1})=L_{-1}\cdot L_0=D_{-1}(L_0)$,得 $\sum_{k\geqslant 0}a_{k,0}L_{-1+k}=\sum_{k\geqslant 0}a_{k,-1}L_k$,根据上式比较基 L_m 前的系数得到 $a_{m,-1}=a_{m+1,0}$,比较基 L_{-1} 前的系数得到 $a_{0,0}=0$。令 $a_k=a_{k,0}$。

$$L_i\cdot L_j=\sum_{k=1}^{\infty}a_kL_{i+j+k}。\tag{10}$$

根据引理4得到 $\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)\cdot L_j=D_j\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)=\sum_{t=-1}^{\infty}\left(\sum_i x_ia_{t-i-j}\right)L_t$,同理根据引理4将 $\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j$ 看成一个整体,得到

$$\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)=\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)\cdot\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)=\sum_{q=-1}^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q。$$

可以验证这样定义的乘法符合转置泊松代数的要求。

3 广义完备Witt李代数 $\tilde{L}$ 的1/2-导子及转置泊松结构

这节将计算 $\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\tilde{L})$。首先注意到对任意的 $i\in\mathbb{Z},L_i\in\tilde{L}$。但 $\{L_i|i\in\mathbb{Z}\}$ 并不是 $\tilde{L}$ 的一组基,$\tilde{L}$ 上的线性变换在所有 $L_i,i\in\mathbb{Z}$ 上的取值并不能确定这个线性变换。但是,下面的结论实际上告诉我们,$\tilde{L}$ 的1/2-导子由其 $L_i,i\in\mathbb{Z}$ 上的取值完全确定。

引理5 设 $D\in\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}(\tilde{L})$,使得 $D(L_i)=0,\forall i\geqslant -1$,那么 $D=0$。

证明 对任意的 $x=\sum_i^{\infty}a_iL_i\in\tilde{L},D(x)=\sum_j^{\infty}b_jL_j$。对任意的 $N\in\mathbb{Z}$,令 $x_N=x-a_{2N}L_{2N}=\sum_{i\neq 2N}^{\infty}a_iL_i$,则 $D(x_N)=D(x)-a_{2N}D(L_{2N})=D(x)$。令 $z_N=\sum_{i\neq N}^{\infty}\frac{a_i}{i-N}L_i$,则 $[L_N,z_N]=x_N$。由 $D\in\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}\tilde{L},D(L_N)=0$ 知

$$2D(x)=2D(x_N)=\left[L_N,D(z_N)\right]。\tag{11}$$

由此可推断出 $D(x)$ 不含 L_{2N} 的项,即 $b_{2N}=0,\forall N\in\mathbb{Z}$。从而可以得到对任意的 $x\in\tilde{L},D(x)$ 只含奇数下标的项。在式(11)中令 $N=1$ 得 $2D(x)=\left[L_1,D(z_1)\right]$。比较左右两边项的奇偶性可得 $D(x)=0$。

设$D\in\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}\left(\tilde{L}\right)$,并且有

$$D(L_i)=\sum_j^{\infty}a_{j,i}L_j,$$

其中$a_{j,i}\in\mathbb{C}$。令$a_k=a_{k,0},k\in\mathbb{Z}$,类似于完备Witt李代数$\hat{L}$的情形,也可以证明

$$a_{j,m}=a_{j-m},\forall j,m\in\mathbb{Z},$$

并且

$$D\left(\sum_i^{\infty}x_iL_i\right)=\sum_t^{\infty}\left(\sum_i x_ia_{t-i}\right)L_t。$$

令V表示从$\mathbb{Z}$到$\mathbb{C}$的下截断函数构成的线性空间,即

$$V=\{(\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots)|a_i\in\mathbb{C},\exists m\in\mathbb{Z},a_j=0,j\leqslant m\}。$$

由引理5及以上结论可完全确定$\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}\left(\tilde{L}\right)$。类似于命题1的证明可得。

命题2 作为线性空间$\mathrm{Der}_{\frac{1}{2}}\left(\tilde{L}\right)\cong V$。

定理2 广义完备Witt李代数$\tilde{L}$的转置泊松结构是非平凡的,$\tilde{L}$的转置泊松结构的乘法的一般形式为

$$\left(\sum_i^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_j^{\infty}y_jL_j\right)=\sum_q^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q,$$

其中$(\cdots,a_k,\cdots)\in V$。

证明 设$\mathcal{T}$是$\tilde{L}$上的一个转置泊松代数,类似定理1的证明可推出存在$\vec{a}=(\cdots,a_k,\cdots)\in V$。使得

$$L_i\cdot L_j=\sum_k^{\infty}a_kL_{i+j+k},\tag{12}$$

并且

$$\left(\sum_i^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_j^{\infty}y_jL_j\right)=\left(\sum_j^{\infty}y_jL_j\right)\cdot\left(\sum_i^{\infty}x_iL_i\right)=\sum_q^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q。\tag{13}$$

可以验证这样定义的乘法符合转置泊松代数的要求。

4 结论

完备Witt李代数是由形式幂级数代数的导子构成的李代数。$\hat{L}$是由元素$\sum\limits_{i=-1}^{\infty}a_iL_i$构成的不可数维的线性空间,$\{L_i|i\in\mathbb{Z},i\geqslant-1\}$并不是$\hat{L}$的一组基,但$\hat{L}$的1/2-导子由其在$L_i,i\geqslant-1$上的取值完全确定。本文确定了完备Witt李代数的所有1/2-导子,并且研究得到了完备Witt李代数上有非平凡的转置泊松结构。$\hat{L}$的转置泊松结构的乘法的一般形式为

$$\left(\sum_{i=-1}^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_{j=-1}^{\infty}y_jL_j\right)=\sum_{q=-1}^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q,$$

其中$a_1,a_2,\cdots\in\mathbb{C}$。

对广义的完备Witt李代数,我们也得到了类似的结果。广义完备Witt李代数$\tilde{L}$有非平凡的转置泊松结构,$\tilde{L}$的转置泊松结构的乘法的一般形式为

$$\left(\sum_i^{\infty}x_iL_i\right)\cdot\left(\sum_j^{\infty}y_jL_j\right)=\sum_q^{\infty}\left(\sum_i\sum_j x_iy_ja_{q-i-j}\right)L_q,$$

其中 $\vec{a}=(\cdots,a_k,\cdots)\in V$，并且 $V=\left\{(\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots)|a_i\in\mathbb{C},\exists m\in\mathbb{Z},a_j=0,j\leqslant m\right\}$。

参考文献：

[1] KAYGORODOV I, SHESTAKOV I, UMIRBAEV U. Free Generic Poisson Fields and Algebras[J]. *Commun Algebra*, 2018, **46**(4): 1799−1812. DOI: 10.1080/00927872.2017.1358269.

[2] XU X P. Novikov-Poisson Algebras[J]. *J Algebra*, 1997, **190**(2): 253−279. DOI: 10.1006/jabr.1996.6911.

[3] YAO Y, YE Y, ZHANG P. Quiver Poisson Algebras[J]. *J Algebra*, 2007, **312**(2): 570−589. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.03.034.

[4] ALBUQUERQUE H, BARREIRO E, BENAYADI S, *et al*. Poisson Algebras and Symmetric Leibniz Bialgebra Structures on Oscillator Lie Algebras[J]. *J Geom Phys*, 2021, **160**: 103939. DOI: 10.1016/j.geomphys.2020.103939.

[5] KUBO F. Non-commutative Poisson Algebra Structures on Affine Kac-moody Algebras[J]. *J Pure Appl Algebra*, 1998, **126**(1/2/3): 267−286. DOI: 10.1016/s0022-4049(96)00141-7.

[6] BAI C M, BAI R P, GUO L, *et al*. Transposed Poisson Algebras, Novikov-poisson Algebras and 3-lie Algebras[J]. *J Algebra*, 2023, **632**: 535−566. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2023.06.006.

[7] FERREIRA B L M, KAYGORODOV I, LOPATKIN V. $\frac{1}{2}$-Derivations of Lie Algebras and Transposed Poisson Algebras[J]. *Rev R Acad Cienc Exactas Fís Nat Ser A Mat RACSAM*, 2021, **115**(3). DOI: 10.1007/s13398-021-01088-2.

[8] YUAN L M, HUA Q Y. $\frac{1}{2}$-(Bi)Derivations and Transposed Poisson Algebra Structures on Lie Algebras[J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2022, **70**(22): 7672−7701. DOI: 10.1080/03081087.2021.2003287.

[9] KAYGORODOV I, LOPATKIN V, ZHANG Z R. Transposed Poisson Structures on Galilean and Solvable Lie Algebras[J]. *J Geom Phys*, 2023, **187**: 104781. DOI: 10.1016/j.geomphys.2023.104781.

[10] KAYGORODOV I, KHRYPCHENKO M. Transposed Poisson Structures on Block Lie Algebras and Superalgebras[J]. *Linear Algebra Appl*, 2023, **656**: 167−197. DOI: 10.1016/j.laa.2022.09.024.

[11] KAYGORODOV I, KHRYPCHENKO M. Transposed Poisson Structures on Witt Type Algebras[J]. *Linear Algebra Appl*, 2023, **665**: 196−210. DOI: 10.1016/j.laa.2023.02.003.

[12] WU Y P, XU Y, YUAN L M. Derivations and Automorphism Group of Completed Witt Lie Algebra[J]. *Algebra Colloq*, 2012, **19**(3): 581−590. DOI: 10.1142/s1005386712000454.