山西大学学报(自然科学版)48(2):332－340,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024019

具有变号位势的Kirchhoff-Choquard型问题正解的存在性

车银芳,桑彦彬*
(中北大学 数学学院,山西 太原 030051)

摘 要:本文研究了一类带有变号权函数的Kirchhoff-Choquard型问题。本文将分为两种情况对临界项进行估计。首先运用Nehari流形的极小化方法和与问题相对应的能量泛函及纤维映射,当参数λ在充分小邻域内,获得了该问题正基态解的存在性;其次利用Ekeland变分原理,在一定条件下,得到了该问题正基态解的存在性。

关键词:Kirchhoff-Choquard型问题;临界指数;Nehari流形;正基态解

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2025)02-0332-09

Existence of Positive Solutions for Kirchhoff-Choquard Type Problems with a Sign-changing Potential

CHE Yinfang, SANG Yanbin*
(*School of Mathematics, North University of China, Taiyuan* 030051, *China*)

Abstract: In this paper, we study a class of Kirchhoff-Choquard type problems with sign-changing weight functions. This article will be divided into two cases to estimate the critical term. First, by using the minimization method of Nehari manifold and the energy functional and fiber mapping corresponding to the problem, when the parameter λ is in a sufficiently small neighborhood, the existence of positive ground state solution of the problem is obtained. Second, by using the Ekeland variational principle, the existence of the positive ground state solution of the problem is obtained under certain conditions.

Key words: Kirchhoff-Choquard type problem; critical exponent; Nehari manifold; positive ground state solution

0 引言及主要结果

本文研究一类具有临界指数的Kirchhoff-Choquard型问题解的存在性:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda u+f(x)\left(\int_\Omega\frac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中Ω是$\mathbb{R}^N(N\geqslant3)$中具有光滑边界的有界区域,参数$a,b,\lambda>0$,$0<\mu<N$,$2_\mu^*=\dfrac{2N-\mu}{N-2}$是Hardy-Littlewood-Sobolev不等式意义下的上临界指数。$f(x)$是一变号函数,且满足$f\in L^\infty(\Omega)$与集合

收稿日期:2023-10-20;**接受日期**:2024-02-19
基金项目:山西省基础研究计划项目(202103021224198);中北大学科技创新研究团队项目(TD201901)
作者简介:车银芳(1998—),女,山西吕梁人,硕士研究生,主要研究方向为非线性微分方程。E-mail:c18735122702@163.com
* **通信作者**:桑彦彬(SANG Yanbin),E-mail:sangyanbin@126.com
引文格式:车银芳,桑彦彬.具有变号位势的Kirchhoff-Choquard型问题正解的存在性[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(2):332-340. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024019.

$\{x\in\Omega: f(x)>0\}$ 具有正测度。记 $\|u\|=\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 空间的标准范数,$|u|_p=\left(\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 为 $L^p(\Omega)$ 空间的标准范数。

Kirchhoff型问题与物质世界关系密切,被广泛应用于物理、力学、人口动力学等领域,其具有很高的研究价值。近几十年来,作为非线性椭圆方程的重要分支之一,Choquard型问题也受到众多研究者的青睐,目前对于Choquard型问题的研究主要集中于解的存在性、正则性以及稳定性等方面。本文将两类问题结合推广为含有Choquard项的Kirchhoff型问题。杨柳和王立雄[1]研究下列具有变号位势的临界Kirchhoff型问题:

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda u+g(x)|u|^{2^*-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $2^*=\dfrac{2N}{N-2}(N\geqslant 3)$,参数 $a,b,\lambda>0$,$g(x)$ 是变号函数,且满足 $g\in L^{\infty}(\Omega)$ 与集合 $\{x\in\Omega: g(x)>0\}$ 具有正测度。利用Nehari流形的性质、变分方法和山路引理得到问题解的存在性结果。其他关于Kirchhoff型问题的研究参见文献[2-7]。

Goel等[8]进一步研究下列具有临界增长的Kirchhoff-Choquard型问题:

$$\begin{cases}-\left(a+\varepsilon^p\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\theta-1}\right)\Delta u=\lambda f(x)|u|^{q-2}u+\left(\int_{\Omega}\dfrac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_\mu^*-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $1<q\leqslant 2$,参数 a,λ,p,θ 为正实数,函数 $f(x)$ 是一个连续的实值变号函数,满足 $f\in L^r(\Omega)$,其中 $r=\dfrac{2^*}{2^*-q}$。利用Nehari流形的变分方法及山路引理证明问题(2)两个正解的存在性。Lan和He[9]将问题(2)推广到带有变号权函数的分数阶Choquard型问题上,其中 $1<q<2$,函数 f, g 满足两个条件 (f_1) $f\in C(\overline{\Omega})$ 和 $f^+=\max\{f,0\}\not\equiv 0$, $x\in\Omega$,(g_1) $g\in C(\overline{\Omega})$ 和 $g^+=\max\{g,0\}\not\equiv 0$, $x\in\Omega$。利用Nehari流形建立下列问题解的存在性及多重性:

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=\lambda f(x)|u|^{q-2}u+g(x)\left(\int_{\Omega}\dfrac{|u(y)|^{2_{\mu,s}^*}}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}y\right)|u|^{2_{\mu,s}^*-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega。\end{cases}$$

Li等[10]研究一类具有Hartree型非线性项的Kirchhoff系统的变号解,利用Nehari流形的极小化方法和形变引理,证明了该系统具有变号解。其余具有变号位势的Kirchhoff-Choquard型问题的结果参见文献[11-14]。

受到上述文献的启发,本文将文献[1]中的Kirchhoff型问题推广到带有变号权函数的整数阶Kirchhoff-Choquard型问题上,其中变号函数和临界指数的存在使得证明问题(1)的紧性变得困难,因此关键是克服嵌入紧性的缺失。本文将分类讨论,当 $2_\mu^*>2$ 时,通过Nehari流形和对应的纤维映射,对参数 λ 进行限制后,得到问题(1)的正基态解;当 $1<2_\mu^*<2$ 时,利用Ekeland变分原理,进一步建立问题(1)的正基态解。

根据文献[15],定义下述最佳嵌入常数:

$$S_{H,L}=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{N-2}{2N-\mu}}}。\tag{3}$$

下确界 $S_{H,L}$ 可以达到当且仅当 $u=C\left(\frac{b}{b^2+|x-a|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}$，其中 $C>0$ 是固定常数，$a\in\mathbb{R}^N$，$b\in(0,+\infty)$ 皆为参数。

参照文献[16]，设 λ_1 为 $(-\Delta,H_0^1(\Omega))$ 的主特征值，有以下变分特征

$$\lambda_1:=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x}。\tag{4}$$

能量泛函 J_λ 引入问题(1)，J_λ 可以定义为：

$$J_\lambda(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2\cdot 2_\mu^*}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{5}$$

则

$$\langle J_\lambda'(u),u\rangle=a\|u\|^2+b\|u\|^4-\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。\tag{6}$$

下面给出本文的主要结果及其证明。

定理1 假设 $2_\mu^*>2$，$a,b>0$ 且 $f\in L^\infty(\Omega)$，其中集合 $\{x\in\Omega:f(x)>0\}$ 的测度不为0。若 $\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\theta$ 且 $\theta=\frac{(2_\mu^*-2)\lambda_1 b^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{2(2_\mu^*-1)^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}|f|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}}$，则问题(1)至少有一个正基态解。

定理2 令 $1<2_\mu^*<2$ 且 $f\in L^\infty(\Omega)$，其中集合 $\{x\in\Omega:f(x)>0\}$ 的测度不为0。若

$$4^{N+2-\mu}(N+2-\mu)^{N+2-\mu}|f|_\infty^{N-2}\leqslant a^{\mu-4}b^{N+2-\mu}(2\mu-8)^{4-\mu}(4N-2\mu)^{N-2}S_{H,L}^{2N-\mu},$$

则当 $\lambda>\lambda_1 a$ 时，问题(1)有一个正基态解。

1 定理1的证明

由于能量泛函 $J_\lambda(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是非下方有界的，因此建立Nehari流形

$$\mathcal{N}_\lambda:=\{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}:\langle J_\lambda'(u),u\rangle=0\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 和 $H_0^{-1}(\Omega)$ 之间的对偶积，且 $\mathcal{N}_\lambda$ 包含问题(1)的所有非零解。令 $u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$，定义和 $J_\lambda(u)$ 相对应的纤维映射 $\psi_u(t)=J_\lambda(tu)(t>0)$。这意味着 $tu\in\mathcal{N}_\lambda$ 当且仅当 $\psi_u'(t)=0$，特别的 $u\in\mathcal{N}_\lambda$ 当且仅当 $\psi_u'(1)=0$，且经过计算可得

$$\begin{aligned}\psi_u''(1)&=(2\cdot 2_\mu^*-2)\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-(2\cdot 2_\mu^*-2)a\|u\|^2-(2\cdot 2_\mu^*-4)b\|u\|^4=\\&2b\|u\|^4-(2\cdot 2_\mu^*-2)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)|u(x)|^{2_\mu^*}|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。\end{aligned}\tag{7}$$

和文献[17]的方法类似，可将 $\mathcal{N}_\lambda$ 分为三部分：

$$\mathcal{N}_\lambda^+=\{u\in\mathcal{N}_\lambda:\psi''(1)>0\},\ \mathcal{N}_\lambda^0=\{u\in\mathcal{N}_\lambda:\psi''(1)=0\},\ \mathcal{N}_\lambda^-=\{u\in\mathcal{N}_\lambda:\psi''(1)<0\}。$$

令

$$t_{\max}=\left(\frac{b\|u\|^4}{(2_\mu^*-1)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)\left|u(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u(y)\right|^{2_\mu^*}}{\left|x-y\right|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)^{\frac{1}{2\times 2_\mu^*-4}},$$

则有如下引理成立。

引理1 假设$2_\mu^*>2$,且$u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$满足$\int_\Omega\int_\Omega\left|x-y\right|^{-\mu}\left|u(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u(y)\right|^{2_\mu^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$,有如下结论:

(1)若$a\|u\|^2\geqslant\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$,则存在唯一的$t^-(u)>t_{\max}$使得$t^-u\in\mathcal{N}_\lambda^-$和$J_\lambda(t^-u)=\sup\limits_{t>0}J_\lambda(tu)$。

(2)若$a\|u\|^2<\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$且$\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\theta_0\left(\theta_0=\frac{(2_\mu^*-2)\lambda_1 b^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{(2_\mu^*-1)^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}\left|f\right|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}}\right)$,则存在唯一的$t^+=t^+(u)$,$t^-=t^-(u)$满足$t^-(u)>t_{\max}>t^+(u)$,使得$t^+u\in\mathcal{N}_\lambda^+$,$t^-u\in\mathcal{N}_\lambda^-$和

$$J_\lambda(t^+u)=\inf_{0<t<t_{\max}}J_\lambda(tu),J_\lambda(t^-u)=\sup_{t\geqslant t_{\max}}J_\lambda(tu)。$$

证明 取$u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$满足$\int_\Omega\int_\Omega f(x)\left|u(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u(y)\right|^{2_\mu^*}\left|x-y\right|^{-\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$,令

$$h_\lambda(t)=a\|u\|^2+bt^2\|u\|^4-\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-t^{2\cdot 2_\mu^*-2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)\left|u(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u(y)\right|^{2_\mu^*}}{\left|x-y\right|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

方程$h_\lambda(t)$存在唯一的临界点$t_{\max}$,其中$h_\lambda(0)=a\|u\|^2-\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$。当$t\in(0,t_{\max})$时,$h_\lambda(t)$是严格递增的;当$t\in(t_{\max},+\infty)$时,$h_\lambda(t)$是严格递减的。显然$tu\in\mathcal{N}_\lambda$当且仅当$h_\lambda(t)=0$,并且经计算可得$\psi_u''(t)=th_\lambda'(t)$。因此有$t^+=t^+(u)$(或$t^-=t^-(u)$)当且仅当$h_\lambda'(t)>0$(或$h_\lambda'(t)<0$)。

(1)若$a\|u\|^2\geqslant\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$,则$h_\lambda(t)=0$存在唯一解$t^-$,满足$t^->t_{\max}$且$t^-u\in\mathcal{N}_\lambda^-$。由于当$t\in(0,t^-)$时,有$h_\lambda(t)>0$,当$t\in(t^-,+\infty)$时,有$h_\lambda(t)<0$,因此有$J_\lambda(t^-u)=\sup\limits_{t>0}J_\lambda(tu)$。

(2)若$a\|u\|^2<\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$和$\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\theta_0$,有$h_\lambda(0)=a\|u\|^2-\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x<0$。根据(4)式和Sobolev不等式,可得

$$h_\lambda(t_{\max})=a\|u\|^2+bt_{\max}^2\|u\|^4-\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-t_{\max}^{2\cdot 2_\mu^*-2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)\left|u(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u(y)\right|^{2_\mu^*}}{\left|x-y\right|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant$$

$$\left(a-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2+(2_\mu^*-1)^{\frac{1-2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}\left[(2_\mu^*-1)^{\frac{2_\mu^*-2}{2_\mu^*-2}}-1\right]\frac{b^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{\left|f\right|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}}\|u\|^2=$$

$$\left(a-\frac{\lambda}{\lambda_1}+\frac{2_\mu^*-2}{(2_\mu^*-1)^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}}\frac{b^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{\left|f\right|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}}\right)\|u\|^2>0。$$

方程$h_\lambda(t)=0$恰好有两个解t^-和t^+满足$t^->t_{\max}>t^+>0$,使得$h_\lambda'(t^+)>0$和$h_\lambda'(t^-)<0$。因此,存在

$t^+, t^- > 0$,使得 $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ 和 $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^-$。此外,当 $t \in (t^+, t^-)$ 时,有 $h_\lambda(t) > 0$;当 $t \in (0, t^+) \cup (t^-, +\infty)$ 时,有 $h_\lambda(t) < 0$,因此

$$J_\lambda(t^+u) = \inf_{0<t<t_{\max}} J_\lambda(tu),\ J_\lambda(t^-u) = \sup_{t \geqslant t_{\max}} J_\lambda(tu)。$$

引理2 若 $\lambda_1 a < \lambda < \lambda_1 a + \theta_0$,则 $\mathcal{N}_\lambda^0 = \varnothing$。

证明 通过反证法,假设存在 $\lambda_0 \in (\lambda_1 a, \lambda_1 a + \theta_0)$,使得 $u_0 \in \mathcal{N}_{\lambda_0}^0$。根据(4)式,(7)式和 Sobolev 不等式,得到

$$(2 \times 2_\mu^* - 2)\lambda_0 \int_\Omega {u_0}^2 \mathrm{d}x = (2 \times 2_\mu^* - 2) a \| u_0 \|^2 + (2 \times 2_\mu^* - 4) b \| u_0 \|^4 \leqslant (2 \times 2_\mu^* - 2) \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \| u_0 \|^2, \tag{8}$$

和

$$2b \| u_0 \|^4 = (2 \times 2_\mu^* - 2) \int_\Omega \int_\Omega \frac{f(x) \left| u_0(x) \right|^{2_\mu^*} \left| u_0(y) \right|^{2_\mu^*}}{\left| x - y \right|^\mu} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant (2 \times 2_\mu^* - 2) \left| f \right|_\infty S_{H,L}^{-2_\mu^*} \| u_0 \|^{2 \times 2_\mu^*}, \tag{9}$$

根据(8)式及(9)式可得

$$\left(\frac{b S_{H,L}^{2_\mu^*}}{(2_\mu^* - 1) \left| f \right|_\infty} \right)^{\frac{1}{2_\mu^* - 2}} \leqslant \| u_0 \|^2 \leqslant \frac{2_\mu^* - 1}{2_\mu^* - 2} \times \frac{\lambda_0 - a\lambda_1}{b\lambda_1}。$$

因此有

$$\lambda_0 \geqslant a\lambda_1 + \frac{(2_\mu^* - 2)\lambda_1 b^{\frac{2_\mu^* - 1}{2_\mu^* - 2}} S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^* - 2}}}{(2_\mu^* - 1)^{\frac{2_\mu^* - 1}{2_\mu^* - 2}} \left| f \right|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^* - 2}}} = \lambda_1 a + \theta_0,$$

它与 $\lambda_1 a < \lambda_0 < \lambda_1 a + \theta_0$ 矛盾。因此,若 $\lambda_1 a < \lambda < \lambda_1 a + \theta_0$,则 $\mathcal{N}_\lambda^0 = \varnothing$。

引理3 能量泛函 J_λ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上是强制且下方有界的。

证明 若 $u \in \mathcal{N}_\lambda$,根据(4)式得

$$J_\lambda(u) = \frac{2_\mu^* - 1}{2 \times 2_\mu^*} a \| u \|^2 + \frac{2_\mu^* - 2}{4 \times 2_\mu^*} b \| u \|^4 - \frac{2_\mu^* - 1}{2 \times 2_\mu^*} \lambda \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{2_\mu^* - 1}{2 \times 2_\mu^*} \left(a - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \| u \|^2 + \frac{2_\mu^* - 2}{4 \times 2_\mu^*} b \| u \|^4。$$

因此,J_λ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上强制且下方有界。

若 $\lambda_1 a < \lambda < \lambda_1 a + \theta_0$,根据引理2,有 $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$。

令 $\alpha_\lambda = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_\lambda} J_\lambda(u)$,$\alpha_\lambda^+ = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} J_\lambda(u)$,$\alpha_\lambda^- = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}_\lambda^-} J_\lambda(u)$,有如下结果。

引理4 若 $\lambda_1 a < \lambda < \lambda_1 a + \frac{\theta_0}{2}$ 且 $2_\mu^* > 2$,则存在常数 $C > 0$,有 $\alpha_\lambda \leqslant \alpha_\lambda^+ < 0 < C \leqslant \alpha_\lambda^-$。

证明 此证明分为两步。

步骤1 令 $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$,根据(7)式得

$$\frac{2_\mu^* - 1}{2 \times 2_\mu^*} \lambda \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x > \frac{2_\mu^* - 1}{2 \times 2_\mu^*} a \| u \|^2 + \frac{2_\mu^* - 2}{2 \times 2_\mu^*} b \| u \|^4。 \tag{10}$$

由 $u \in \mathcal{N}_\lambda$ 和(10)式知

$$J_\lambda(u) < \frac{2_\mu^* - 1}{2 \times 2_\mu^*} a \| u \|^2 + \frac{2_\mu^* - 2}{4 \times 2_\mu^*} b \| u \|^4 - \left(\frac{2_\mu^* - 1}{2 \times 2_\mu^*} a \| u \|^2 + \frac{2_\mu^* - 2}{2 \times 2_\mu^*} b \| u \|^4 \right) = \frac{2 - 2_\mu^*}{4 \times 2_\mu^*} b \| u \|^4 < 0。$$

对于任意 $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$,都有 $J_\lambda(u) < 0$ 成立。因此,可得 $\alpha_\lambda \leqslant \alpha_\lambda^+ < 0$。

步骤2 令 $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$,根据(7)式得

$$2b \| u \|^4 < (2 \times 2_\mu^* - 2) \int_\Omega \int_\Omega \frac{f(x) \left| u(x) \right|^{2_\mu^*} \left| u(y) \right|^{2_\mu^*}}{\left| x - y \right|^\mu} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leqslant (2 \times 2_\mu^* - 2) \left| f \right|_\infty S_{H,L}^{-2_\mu^*} \| u \|^{2 \times 2_\mu^*}。$$

根据$\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\dfrac{\theta_0}{2}$,(4)式和$u_\lambda\in\mathcal{N}_\lambda$,可得

$$J_\lambda(u)\geqslant\frac{2_\mu^*-1}{2\times 2_\mu^*}\|u\|^2\left[\left(a-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)+\frac{2_\mu^*-2}{2(2_\mu^*-1)}b\|u\|^2\right]>$$

$$\frac{b^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{2\times 2_\mu^*(2_\mu^*-1)^{\frac{3-2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}\lambda_1|f|_\infty}\left(\lambda_1 a-\lambda+\frac{(2_\mu^*-2)\lambda_1 b^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{2(2_\mu^*-1)^{\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}}|f|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}}\right)=$$

$$\frac{b^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{2\times 2_\mu^*(2_\mu^*-1)^{\frac{3-2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}\lambda_1|f|_\infty}\left(\lambda_1 a-\lambda+\frac{\theta_0}{2}\right)>0。$$

对任意$\lambda\in\left(\lambda_1 a,\ \lambda_1 a+\dfrac{\theta_0}{2}\right)$,都有$\alpha_\lambda^-\geqslant\dfrac{b^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}}{2\times 2_\mu^*(2_\mu^*-1)^{\frac{3-2_\mu^*}{2_\mu^*-2}}\lambda_1|f|_\infty}\left(\lambda_1 a-\lambda+\dfrac{\theta_0}{2}\right)>0$成立。

引理5 若$\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\theta_0$,则泛函$J_\lambda(u)$具有$(PS)_{\alpha_\lambda}$序列$\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$。

证明 令$\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$是$\alpha_\lambda$的一个极小化序列,应用Ekeland变分原理,此时存在序列$\{v_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$,使得$\|u_n-v_n\|<\dfrac{1}{n}$,$J_\lambda(v_n)=\alpha_\lambda+o(1)$和$\left(J_{\lambda|_{\mathcal{N}_\lambda}}\right)'(v_n)=o(1)$,$n\to+\infty$。根据引理3,可得$\{v_n\}$在$H_0^1(\Omega)$中有界。令$\varphi(u):=\langle J_\lambda'(u),u\rangle$,其中$u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$。根据文献[18]的命题5.12,存在序列$\{\alpha_n\}\subset\mathbb{R}$,对于任意的$n\subset\mathbb{N}$,可得

$$0\leqslant\|J_\lambda'(v_n)-\alpha_n\varphi'(v_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}\leqslant\left\|\left(J_{\lambda|_{\mathcal{N}_\lambda}}\right)'(v_n)\right\|_{H_0^{-1}(\Omega)}+\frac{1}{n}。$$

当$n\to+\infty$时,有$\left(J_{\lambda|_{\mathcal{N}_\lambda}}\right)'(v_n)=o(1)$,因此$\lim\limits_{n\to+\infty}\|J_\lambda'(v_n)-\alpha_n\varphi'(v_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}=0$。根据$\{v_n\}$在$H_0^1(\Omega)$中有界和$\{v_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$这一事实可知,当$n\to+\infty$时,有

$$\left|\alpha_n\langle\varphi'(v_n),v_n\rangle\right|=\left|\langle J_\lambda'(v_n)-\alpha_n\varphi'(v_n),v_n\rangle\right|\leqslant\|J_\lambda'(v_n)-\alpha_n\varphi'(v_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}\cdot\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0。\tag{11}$$

此时称$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\langle\varphi'(v_n),v_n\rangle\right|\neq 0$。否则,若$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\langle\varphi'(v_n),v_n\rangle\right|=0$,则存在一子序列(仍用$\{v_n\}$表示),使得$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\langle\varphi'(v_n),v_n\rangle\right|=0$。令$d=\lim\limits_{n\to+\infty}\|v_n\|$,则$d\geqslant 0$。若$d=0$,则$J_\lambda(v_n)\to\alpha_\lambda=0$,这与引理4相矛盾,因此$d>0$。参照引理2的证明,有

$$\left(\frac{bS_{H,L}^{2_\mu^*}}{(2_\mu^*-1)|f|_\infty}\right)^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}\leqslant d^2\leqslant\frac{2_\mu^*-1}{2_\mu^*-2}\cdot\frac{\lambda-\lambda_1 a}{b\lambda_1},$$

与$\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\theta_0$矛盾。

最后,根据(11)式,当$n\to+\infty$时,有$\alpha_n\to 0$。此外,由于$\varphi'(v)$是有界的,因此当$n\to+\infty$时,在$H_0^{-1}(\Omega)$中有$J_\lambda'(u)\to 0$,即$\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$是泛函$J_\lambda(u)$的$(PS)_{\alpha_\lambda}$序列。

引理6 假设$\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\theta_0$,且$u_\lambda$是$J_\lambda$在$\mathcal{N}_\lambda$上的局部极小值点,则在$H_0^{-1}(\Omega)$中有$J_\lambda'(u_\lambda)=0$,即$u_\lambda$是问题(1)的非零弱解。

证明 该引理本质上与文献[1]引理3.6的证明相同,故此处省略。

定理1的证明 令$\lambda_1 a<\lambda<\lambda_1 a+\theta$且$\theta=\dfrac{\theta_0}{2}$($\theta_0$参见引理1),根据引理6,仅需证明$J_\lambda$在$\mathcal{N}_\lambda$中有非负极小值点$u_0$。

现在建立J_λ在$\mathcal{N}_\lambda$上全局极小值的存在性。令$\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$是$J_\lambda$中的极小化序列,即

$$J_\lambda(u_n)=\alpha_\lambda+o(1),\ \|J_\lambda'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}=o(1)。$$

根据引理3,可得$\{u_n\}$在$\mathcal{N}_\lambda$中有界。这意味着序列$\{u_n\}$在$H_0^1(\Omega)$中有界,从而存在子列(仍记为$\{u_n\}$),可以假设当$n\to+\infty$时,有$\|u_n\|\to l$,且$u_n\rightharpoonup u_0$,在$H_0^1(\Omega)$中,$u_n(x)\to u_0(x)$,在Ω中几乎处处成立,$u_n\to u_0$,在$L^p(\Omega)$中,$1\leqslant p<2^*$。根据文献[19]的命题4.4,当$n\to+\infty$时,

$$\left(|x|^{-\mu}*|u_n|^{2_\mu^*}\right)|u_n|^{2_\mu^*-2}u_n\rightharpoonup\left(|x|^{-\mu}*|u_0|^{2_\mu^*}\right)|u_0|^{2_\mu^*-2}u_0。\tag{12}$$

在$L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$中,式(12)中"*"表示卷积运算。由$J_\lambda'(u_n)\to 0$,根据(12)式得

$$o(1)=\left\langle J_\lambda'(u_n),\ u_0\right\rangle=\left(a+b\|u_n\|^2\right)\|u_0\|^2-\lambda\int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)\left|u_0(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u_0(y)\right|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。\tag{13}$$

在(13)式中令$n\to+\infty$,且根据弱下半连续性质有$\|u_0\|^2\leqslant l$,可得

$$\left(a+b\|u_0\|^2\right)\|u_0\|^2\leqslant\lambda\int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)\left|u_0(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u_0(y)\right|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{14}$$

则$\psi_{u_0}'(1)\leqslant 0$。

现在,证明它是极小值点。根据$\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda$,可得

$$\alpha_\lambda=\lim_{n\to\infty}J_\lambda(u_n)=\frac{2_\mu^*-1}{2\times 2_\mu^*}al^2+\frac{2_\mu^*-2}{4\times 2_\mu^*}bl^4-\frac{2_\mu^*-1}{2\times 2_\mu^*}\lambda\int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x。\tag{15}$$

根据引理2,有$\alpha_\lambda<0$,可得

$$a\|u_0\|^2\leqslant al^2<\lambda\int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x,\tag{16}$$

可知在Ω中$u_0(x)\not\equiv 0$,并且引理1的条件(2)在此处成立。因此,根据$\psi_{u_0}'(1)\leqslant 0$,存在唯一的$t^+=t^+(u_0)$和$t^-=t^-(u_0)$,满足$1>t^-(u_0)>t_{\max}>t^+(u_0)>0$或$t^-(u_0)>t_{\max}>t^+(u_0)\geqslant 1$。此处仅$t^-(u_0)>t_{\max}>t^+(u_0)\geqslant 1$成立。反之,若$1>t^-(u_0)>t_{\max}>t^+(u_0)>0$,有

$$2b\|u_0\|^4<(2\times 2_\mu^*-2)\int_\Omega\int_\Omega\frac{f(x)\left|u_0(x)\right|^{2_\mu^*}\left|u_0(y)\right|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant(2\times 2_\mu^*-2)S_{H,L}^{-2_\mu^*}|f|_\infty\|u_0\|^{2\times 2_\mu^*},\tag{17}$$

$$\|u_0\|^2\geqslant\left(\frac{bS_{H,L}^{2_\mu^*}}{(2_\mu^*-1)|f|_\infty}\right)^{\frac{1}{2_\mu^*-2}}。\tag{18}$$

根据(17)式和(18)式,得$\lambda>a\lambda_1+\frac{\theta_0}{2}=\lambda_1 a+\theta$,这和定理1中的假设是矛盾的。因此$t^-(u)>t_{\max}>t^+(u)\geqslant 1$成立,根据(15)式和$\|u_0\|^2\leqslant l$,有

$$J_\lambda(t^+u_0)\leqslant J_\lambda(u_0)\leqslant\frac{2_\mu^*-1}{2\times 2_\mu^*}al^2+\frac{2_\mu^*-2}{4\times 2_\mu^*}bl^4-\frac{2_\mu^*-1}{2\times 2_\mu^*}\lambda\int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x=\alpha_\lambda。$$

因此$\alpha_\lambda\leqslant J_\lambda(t^+u_0)\leqslant J_\lambda(u_0)\leqslant\alpha_\lambda$,可从该式得$t^+=1$,$u_0\in\mathcal{N}_\lambda^+$且$J_\lambda(u_0)=\alpha_\lambda=\alpha_\lambda^+$。此处$J_\lambda(u_0)=J_\lambda(|u_0|)$且$|u_0|\in\mathcal{N}_\lambda^+\subset\mathcal{N}_\lambda$,可以假设$u_0$是非负的。根据强极大值原理,$u_0$是正的。因此,$u_0$是问题(1)的正基态解。

2 定理2的证明

本节,分为三步证明定理2。

步骤1 证明 $m=\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)} J_\lambda(u)$ 是定义合理的。

实际上，根据Sobolev不等式和 $S_{H,L}$ 的定义，有

$$J_\lambda(u)\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2-\frac{|f|_\infty}{2\times 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|u\|^{2\times 2_\mu^*}。\tag{19}$$

通过 $1<2_\mu^*<2$ 和Young不等式，有

$$\frac{|f|_\infty}{2\times 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|u\|^{2\times 2_\mu^*}=\left[\left(\frac{a}{4-2\times 2_\mu^*}\right)^{\frac{4-2\times 2_\mu^*}{2}}\|u\|^{4-2\cdot 2_\mu^*}\right]\left[\left(\frac{a}{4-2\times 2_\mu^*}\right)^{\frac{2\times 2_\mu^*-4}{2}}\frac{|f|_\infty}{2\times 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|u\|^{2\left(2\times 2_\mu^*-2\right)}\right]\leqslant$$

$$\frac{a}{2}\|u\|^2+\left(\frac{a}{4-2\times 2_\mu^*}\right)^{\frac{2_\mu^*-2}{2_\mu^*-1}}\frac{(2_\mu^*-1)|f|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-1}}}{(2\times 2_\mu^*)^{\frac{1}{2_\mu^*-1}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-1}}}\|u\|^4。\tag{20}$$

因此，根据(19)式和(20)式可得

$$J_\lambda(u)\geqslant\left(\frac{b}{4}-\left(\frac{a}{4-2\times 2_\mu^*}\right)^{\frac{2_\mu^*-2}{2_\mu^*-1}}\frac{(2_\mu^*-1)|f|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-1}}}{(2\times 2_\mu^*)^{\frac{1}{2_\mu^*-1}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-1}}}\right)\|u\|^4-\frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2。\tag{21}$$

借助于 $4^{N+2-\mu}(N+2-\mu)^{N+2-\mu}|f|_\infty^{N-2}\leqslant a^{\mu-4}b^{N+2-\mu}(2\mu-8)^{4-\mu}(4N-2\mu)^{N-2}S_{H,L}^{2N-\mu}$，可得出 $J_\lambda(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是强制且下方有界的，则 $m=\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)} J_\lambda(u)$ 是定义合理的。由于 $\lambda>\lambda_1 a$，可得 $m<0$。

步骤2 证明 $m=\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)} J_\lambda(u)$ 是可达到的。

根据 m 的定义和Ekeland变分原理，存在极小化序列 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 使得

$$J_\lambda(u_n)=m+o(1),\ \|J_\lambda'(u_n)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}=o(1)。\tag{22}$$

由步骤1可知 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界，从而存在子列（仍记为 $\{u_n\}$），则存在 $u_*\geqslant 0$，使得

$$\begin{cases} u_n\rightharpoonup u_* & \text{在}H_0^1(\Omega)\text{中}, \\ u_n\to u_* & \text{在}L^p(\Omega)\text{中}, 1\leqslant p<2^*, \\ u_n(x)\to u_*(x) & \text{在}\Omega\text{中几乎处处成立。} \end{cases}\tag{23}$$

令 $\|d_n\|^2=\|u_n-u_*\|^2$，由(23)式有

$$\|u_n\|^4=\|u_*\|^4+\|d_n\|^4+2\|u_*\|^2\|d_n\|^2+o(1)。\tag{24}$$

应用文献[18]的Brézis-Lieb引理，有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\mu}*|u_n|^{2_\mu^*}\right)|u_n|^{2_\mu^*}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\mu}*|u_n-u_*|^{2_\mu^*}\right)|u_n-u_*|^{2_\mu^*}\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-\mu}*|u_*|^{2_\mu^*}\right)|u_*|^{2_\mu^*}\mathrm{d}x。\tag{25}$$

根据(23)式，(24)式和(25)式可得

$$m=J_\lambda(u_n)+o(1)\geqslant J_\lambda(u_*)+\frac{a}{2}\|d_n\|^2+\frac{b}{4}\|d_n\|^4-\frac{|f|_\infty}{2\times 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|d_n\|^{2\times 2_\mu^*}+o(1)。\tag{26}$$

令

$$\frac{a}{2}\|d_n\|^2+\frac{b}{4}\|d_n\|^4-\frac{|f|_\infty}{2\times 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|d_n\|^{2\times 2_\mu^*}\geqslant 0。\tag{27}$$

根据(20)式，可得

$$\frac{a}{2}\|d_n\|^2+\frac{b}{4}\|d_n\|^4-\frac{|f|_\infty}{2\times 2_\mu^* S_{H,L}^{2_\mu^*}}\|d_n\|^{2\times 2_\mu^*}\geqslant\left(\frac{b}{4}-\left(\frac{a}{4-2\times 2_\mu^*}\right)^{\frac{2_\mu^*-2}{2_\mu^*-1}}\frac{(2_\mu^*-1)|f|_\infty^{\frac{1}{2_\mu^*-1}}}{(2\times 2_\mu^*)^{\frac{1}{2_\mu^*-1}}S_{H,L}^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-1}}}\right)\|d_n\|^4。$$

此时(27)式是成立的。

根据(26)式,有$m \geqslant J_\lambda(u_*)$。而根据$m$的定义,有$J_\lambda(u_*) \geqslant m$。因此$J_\lambda(u_*) = m$,故$m = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J_\lambda(u)$是可达到的。

步骤3　证明u_*是问题(1)的正基态解。

由于$J_\lambda(u)$是$H_0^1(\Omega)$的一个C^1泛函,可得u_*是问题(1)的解。根据强极大值原理,可得u_*是问题(1)的一个正解。由于$J_\lambda(u_*) = m$,则u_*是问题(1)的正基态解,即完成定理2的证明。

参考文献:

[1] 杨柳, 王立雄. 具有变号位势的临界Kirchhoff型方程正解的存在性[J]. 数学理论与应用, 2021, **41**(1): 71-90.
YANG L, WANG L X. Existence of Positive Solutions for a Critical Kirchhoff Type Equation with a Sign Changing Potential[J]. *Math Theory Appl*, 2021, **41**(1): 71-90.

[2] DOU X L, HE X M. Multiplicity of Solutions for a Fractional Kirchhoff Type Equation with a Critical Nonlocal Term[J]. *Fract Calc Appl Anal*, 2023, **26**(4): 1941-1963. DOI: 10. 1007/s13540-023-00181-0.

[3] SONG Y Q, ZHAO F, PU H L, *et al*. Existence Results for Kirchhoff Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Nonlinearity[J]. *Nonlinear Anal*, 2020, **198**: 111900. DOI: 10. 1016/j. na. 2020. 111900.

[4] DUAN Y, SUN X, LIAO J F. Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Critical Sobolev Exponent Problems Involving Kirchhoff-type Nonlocal Term[J]. *Comput Math Appl*, 2018, **75**(12): 4427-4437. DOI: 10. 1016/j. camwa. 2018. 03. 041.

[5] LEI C Y, SUO H M, CHU C M, *et al*. On Ground State Solutions for a Kirchhoff Type Equation with Critical Growth[J]. *Comput Math Appl*, 2016, **72**(3): 729-740. DOI: 10. 1016/j. camwa. 2016. 05. 027.

[6] XU L P, CHEN H B. Ground State Solutions for Kirchhoff-type Equations with a General Nonlinearity in the Critical Growth[J]. *Adv Nonlinear Anal*, 2018, **7**(4): 535-546. DOI: 10. 1515/anona-2016-0073.

[7] LIANG S H, PUCCI P, ZHANG B L. Multiple Solutions for Critical Choquard-Kirchhoff Type Equations [J]. *Adv Nonlinear Anal*, 2021, **10**(1): 400-419. DOI: 10. 1515/anona-2020-0119.

[8] GOEL D, SREENADH K. Kirchhoff Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Nonlinearity[J]. *Nonlinear Anal*, 2019, **186**: 162-186. DOI: 10. 1016/j. na. 2019. 01. 035.

[9] LAN F Q, HE X M. The Nehari Manifold for a Fractional Critical Choquard Equation Involving Sign-changing Weight Functions[J]. *Nonlinear Anal*, 2019, **180**: 236-263. DOI: 10. 1016/j. na. 2018. 10. 010.

[10] LI F Y, GAO C J, ZHU X L. Existence and Concentration of Sign-changing Solutions to Kirchhoff-type System with Hartree-type Nonlinearity[J]. *J Math Anal Appl*, 2017, **448**(1): 60-80. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2016. 10. 069.

[11] DE S BÖER E, MIYAGAKI O, PUCCI P. Existence and Multiplicity Results for a Class of Kirchhoff-Choquard Equations with a Generalized Sign-changing Potential[J]. *Atti Accad Naz Lincei Cl Sci Fis Mat Natur*, 2022, **33**(3): 651-675. DOI: 10. 4171/rlm/984.

[12] CLAPP M, SALAZAR D. Positive and Sign Changing Solutions to a Nonlinear Choquard Equation[J]. *J Math Anal Appl*, 2013, **407**(1): 1-15. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2013. 04. 081.

[13] BROWN K J, ZHANG Y P. The Nehari Manifold for a Semilinear Elliptic Equation with a Sign-changing Weight Function[J]. *J Differ Equ*, 2003, **193**(2): 481-499. DOI: 10. 1016/s0022-0396(03)00121-9.

[14] CHEN C Y, KUO Y C, WU T F. The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-changing Weight Functions[J]. *J Differ Equ*, 2011, **250**(4): 1876-1908. DOI: 10. 1016/j. jde. 2010. 11. 017.

[15] GAO F S, YANG M B. The Brezis-Nirenberg Type Critical Problem for the Nonlinear Choquard Equation [J]. *Sci China Math*, 2018, **61**(7): 1219-1242. DOI: 10. 1007/s11425-016-9067-5.

[16] HE Q H, HE Y, LV J T. The Existence of Positive Solutions to the Choquard Equation with Critical Exponent and Logarithmic Term[J]. *J Math Anal Appl*, 2023, **519** (1): 126737. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2022. 126737.

[17] GIACOMONI J, MUKHERJEE T, SREENADH K. Doubly Nonlocal System with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Nonlinearity[J]. *J Math Anal Appl*, 2018, **467** (1): 638-672. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2018. 07. 035.

[18] WILLEM M. Minimax Theorems: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications[M]. Boston: Springer, 1996. DOI: 10. 1007/978-1-4612-4146-1.

[19] GAO F S, YANG M B. On Nonlocal Choquard Equations with Hardy-Littlewood-Sobolev Critical Exponents[J]. *J Math Anal Appl*, 2017, **448**(2): 1006-1041. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2016. 11. 015.