

基于QR分解的正则化回溯匹配追踪算法DOA估计

张宁宁,张骄*

(山西大学 物理电子工程学院,山西 太原 030006)

摘要:针对传统算法在低信噪比、小快拍、信源相干等情况下,波达方向(Directional of Arrival, DOA)估计精度低的问题,提出了一种基于正交三角分解(Orthogonal Triangular Decomposition, QR)的正则化回溯匹配追踪算法(QR-Regularized Backtracking Matching Pursuit, QR-RBMP)。该算法首先对感知矩阵进行QR分解,以增大感知矩阵的独立性;再利用正则化思想和回溯机制优化匹配追踪算法,来提高信号重构精度;正则化思想对匹配追踪算法初次选择的原子进行二次筛选,选出最相关且能量最大的相关原子,回溯思想对正则化选择得到的原子进行再次筛选,删除不正确的原子,提高所选择原子的正确性,进而提高了匹配追踪算法的重构精度。最后得到重构的信号,信号非零元素所对应的位置即为DOA估计的结果。通过一系列仿真实验,并与多重信号分类算法(Multiple Signal Classification, MUSIC)、正则化正交匹配追踪算法(Regularized Orthogonal Matching Pursuit, ROMP)、基于子空间追踪算法(Subspace Tracking Algorithm, SP)、无平方根方法的SP算法(ISP)以及能量排序的回溯正则化匹配追踪算法(Backtracking Regularization Matching Pursuit for Energy Sorting, ESBMP)估计方法基于均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)、分辨概率(Probability of Resolution, POR)进行对比分析。结果表明该算法在相同条件下均方根误差比现有最优方法降低了约42%,成功分辨率提高了8%。

关键词:波达方向估计;嵌套阵列;矩阵分解;正则化思想;回溯机制;压缩感知

中图分类号:TN911.7 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2025)03-0565-13

DOA Estimation of Regularization Backtracking Algorithms Based on QR Decomposition

ZHANG Ningning, ZHANG Jiao*

(College of Physics and Electronics Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: A matching pursuit algorithm for regularization backtracking based on QR decomposition (QR-RBMP) is proposed in this paper to solve the problems of low precision of directional of arrival (DOA) estimation in the cases of low signal noise ratio (SNR), small snapshot and coherent signals. Firstly, the algorithm is performed on sensing matrix by QR decomposition to increase the independence of the sensing matrix. Then, the regularization idea and backtracking mechanism are used to optimize matching pursuit algorithm to improve the signal reconstruction precision. The regularization idea carries out secondary screening on the atoms initially selected by the matching tracking algorithm, and selects the most relevant atoms with the largest energy. The backtracking idea carries out secondary screening on the atoms selected by the regularization, deletes the incorrect atoms, improves the correctness of the selected atoms, and thus improves the reconstruction accuracy of the matching tracking algorithm. Finally, we obtain the reconstructed signal. The position of the non-zero element of the signal is the result of DOA estimation. Through a series of simulation experi-

收稿日期:2023-06-30; **接受日期:**2024-01-21

基金项目:广东省光纤传感与通信技术重点实验室开放基金资助(01110122120181)

作者简介:张宁宁(1997—),女,河南驻马店人,硕士研究生,研究方向为阵列天线的波束赋形。E-mail:1844373085@qq.com

* **通信作者:**张骄(ZHANG Jiao),E-mail:zhangjiao@sxu.edu.cn

引文格式:张宁宁,张骄.基于QR分解的正则化回溯匹配追踪算法DOA估计[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(3):565-577. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024034.

ments, the proposed algorithm is compared with MUSIC algorithm, regularized orthogonal matching pursuit algorithm (ROMP), subspace tracking algorithm, SP algorithm without Square Root (ISP) and energy sorting based backtracking regularized matching pursuit algorithm (ESBRMP) based on RMSE and POR. The results show that the proposed algorithm reduces the RMSE by 42% and improves the POR by 8% compared with the existing optimal methods under the same conditions.

Key words: DOA estimation; nested array; matrix decomposition; regularization idea; backtracking mechanism; compressed sensing

0 引言

波达方向(Directional of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理领域研究的热点和关键技术之一,在目标监测、定位等领域有着广泛的应用^[1]。最常用的传统波束形成方法是常规波束形成算法(Conventional Beamforming, CBF)^[2],由于瑞利极限, CBF具有波束宽度宽和空间分辨率差的缺点。为了克服这一缺点,多重信号分类方法(Multiple Signal Classification, MUSIC)被引入,利用信号子空间和噪声子空间之间的正交性实现方向估计^[3]。随后,为提高计算效率,旋转不变子空间(Estimating Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)算法通过利用两个子阵之间的旋转不变性,实现了无需谱峰搜索的DOA估计^[4]。在80年代后期,最大似然算法(Maximum Likelihood, ML)^[5-7],加权子空间拟合算法(Weighted Subspace Fitting, WSF)^[8]相继出现,通过多维搜索对角度进行估计,但是在实际应用中存在灵敏度和快照缺陷问题^[9]。科研工作者们后续又提出了一系列改进算法,比如Root-MUSIC算法^[10]、最小范数算法(Minimum Norm Method, MNM)^[11]、Multiple-Toeplitz算法^[12]等,但此类算法仍存在计算复杂度大,估计精度不高的缺点。随着通信技术的不断发展,人们对于更高带宽的信号需求日益增加,传统的DOA估计算法不能满足现代信号处理的要求。这对信号的采样频率提出了更高的要求。

2006年,压缩感知算法被Donoho等^[13]提出。压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[14-15]因其低采样率的优势吸引了广大学者们的关注,被广泛应用于图像处理 and 信号识别等领域。其对于压缩或稀疏的信号处理问题,可以对信号进行低于奈奎斯特速率的采样,可以减少冗余的数据处理、传输和存储压力,为未来的DOA估计提供一种新的解决方案。感知矩阵的设计对于压缩感知是否能准确获得测量值起着重要的作用。压缩感知理论表明,信号重构所需的测量数目与重构矩阵的列独立性有关联:其列独立性越大,所需测量数目越少。同时根据矩阵原理,矩阵的奇异值越大,矩阵的独立性越强。故感知矩阵必须具备一定的独立性,且独立性越大越好^[13]。正交三角分解(Orthogonal Triangular Decomposition, QR)^[16]可以增大矩阵的最小奇异值,而且不会改变矩阵的基本性质。因此可以将该分解方法应用于感知矩阵的优化。

典型的压缩感知算法包括凸优化算法^[17-18]和贪婪算法。凸优化算法具有较好的重构效果,但其运行时间过长,往往不利于实际应用。正因为如此,贪婪算法受到了绝大多数研究者的青睐。贪婪算法是通过求解 l_0 范数来寻找近似解,并利用稀疏近似的方法来求解原始信号,如正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[19]、正则化正交匹配追踪算法(Regularized Orthogonal Matching Pursuit, ROMP)^[20]、子空间追踪算法(Subspace Pursuit, SP)^[21]、稀疏度自适应匹配追踪算法(Sparsity Adaptive Matching Pursuit)^[22]、压缩采样匹配追踪算法(Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP)^[23]等。ROMP算法通过正则化原则对原子进行选择,能够保证能量大的原子被选出,但是一旦原子被选中,直到迭代结束它才会被删除。同时,ROMP算法不能保证每次选择的原子都是我们所需要的,如果在前一次选择了不正确的原子,则下一次选择也会不正确;而SP算法在选择匹配的原子后,添加了回溯思想来删除不稳定的原子,可以更好地保证重建信号的质量。近几年也提出了很多基于贪婪类算法的改进算法,Zhao等^[24]提出了利用随机增强自适应子空间追踪(Random Enhanced Adaptive Subspace Tracking, REASP)来细化估计支持集,引入改进的OMP算法来提高稀疏信号恢复性能,但该方法也存在稀疏性更新速度较低的问题。Zhang^[25]提出了一

种基于奇异值分解的正交匹配追踪算法(SVD-OMP),该算法是利用奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)对感知矩阵进行分解,有效地消除了测量值之间的相关性,显著提高了图像的平均信噪比,同时比经典的正交匹配追踪算法具有更强的鲁棒性。Liu等^[26]提出了一种基于无平方根方法的SP算法,使得SP算法的复杂度大大降低。Li等^[27]提出了一种结合QR分解和压缩感知的新方法,可以有效提高测量矩阵的独立性。Zhang等^[28]提出了一种基于能量排序的回溯正则化匹配追踪算法,该算法利用能量排序进行二次原子筛选,通过ROMP算法回溯删除单个错误原子,支持集在每次迭代期间不断更新和扩展,该算法具有较高的重构效率。

针对感知矩阵对列独立性的要求、ROMP算法正则化思想选择原子时不能正确选择以及SP算法中的回溯机制可以删除掉不正确的原子的的问题,本文提出了一种基于QR分解的正则化回溯匹配追踪算法(QR-Regularized Backtracking Matching Pursuit, QR-RBMP)来进行DOA估计。本文以嵌套阵列为模型,利用所提出的算法对嵌套阵列接收到的采样数据进行压缩重构。该算法对低信噪比和小快拍数下也可以很好地进行DOA估计,而且所提出的算法利用信号源的稀疏性来求解DOA估计值,不对矩阵进行特征分解,不用加入解相干算法就可以实现对相干信号的DOA准确估计。通过与MUSIC、ROMP、SP算法以及文献[26]中的ISP算法和文献[28]的能量排序的回溯正则化匹配追踪算法(Backtracking Regularization Matching Pursuit Algorithm for Energy Sorting, ES-BRMP)相比,特别是对于低信噪比和快照数目较少的情况,该方法提供了更尖锐的空间谱、更好的均方根误差和更好的分辨成功概率,对于相干信号源,也具有很好的估计效果。仿真实验验证了所提算法的有效性。

1 阵列信号模型

1.1 嵌套阵列结构模型

嵌套阵列在同阵元数下估计性能远远超过均匀阵列^[29]。嵌套阵列与其他类型的非均匀阵列相比,更具优势。两个或多个阵元间隔相同的均匀线性阵列组成嵌套阵列,下面以2级嵌套阵列为例进行说明。如图1所示,两级嵌套阵列由均匀子阵1和均匀子阵2嵌套而成,子阵1的阵元个数为 M_1 ,阵元间距为 d_1 ,子阵2的阵元个数为 M_2 ,阵元间距为 $d_2=(M_1+1)d_1$,且 $d_1 \neq d_2$ 。

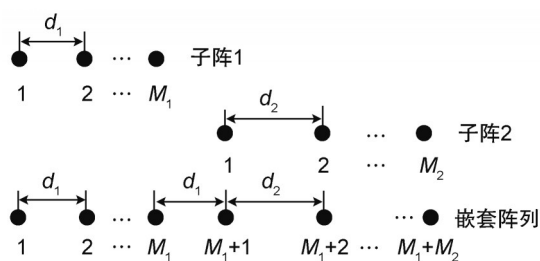


图1 二阶嵌套阵列结构图

Fig. 1 Structure of second-order nested array

嵌套阵列的阵元位置集合可以表示为

$$P_{\text{NA}} = \{0, 1, \dots, M_1 - 1, M_1, 2(M_1 + 1) - 1, \dots, M_2(M_1 + 1) - 1\}d_1. \quad (1)$$

假设有 K 个远场随机信号入射到嵌套阵列上,其方位角分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$,则该阵列的阵列流形矢量

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \left[1, e^{-\frac{j2\pi d \sin \theta_k}{\lambda}}, \dots, e^{-\frac{j2\pi (M_2(M_1+1)-1)d \sin \theta_k}{\lambda}} \right], \quad (2)$$

阵列流型矩阵为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)], \quad (3)$$

那么在 t 时刻嵌套阵列的接收信号可以表示为： $X(t) = AS(t) + N(t)$ ，其中 $X(t) = [X_0(t), X_1(t), \dots, X_{M_1+M_2-1}(t)]^T$ 为接收信号矢量； $S(t) = [S_0(t), S_1(t), \dots, S_{K-1}(t)]^T$ 为源信号矢量； $N(t)$ 表示均值为 0，能量为 δ_n^2 的加性高斯白噪声。

1.2 嵌套阵列的虚拟扩展

对嵌套阵列进行扩展使得阵列孔径增大，进而使得阵列的自由度得到提高^[30]。最优二阶嵌套阵列的阵列自由度为： $D_{NA-DOF} = 2M_2(M_1 + 1) - 1$ ，对二阶嵌套阵的二阶统计量信息进行矩阵矢量变换后可以产生 $2M_2(M_1 + 1) - 1$ 个虚拟阵元，其范围为 $[-(M_2(M_1 + 1) - 1), (M_2(M_1 + 1))]$ ，其阵元排列如图 2 所示。

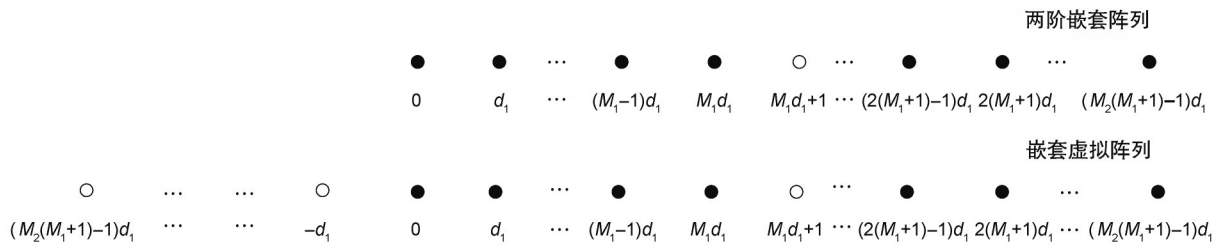


图2 虚拟扩展阵列

Fig. 2 Virtual expansion array

由扩展后的阵元分布图可知其扩展后的阵元位置

$$P_{NA} = \{ -(M_2(M_1 + 1) - 1), -(M_2(M_1 + 1)), \dots, (M_2(M_1 + 1) - 1) \} d_1, \tag{4}$$

由阵元位置可以得到扩展后的嵌套阵列的阵列流形矢量

$$\mathbf{b}(\theta_k) = \left[e^{-\frac{j2\pi(-(M_2(M_1+1)-1))d \sin \theta_k}{\lambda}}, e^{-\frac{j2\pi(-(M_2(M_1+1)))d \sin \theta_k}{\lambda}}, \dots, 1, \dots, e^{\frac{j2\pi(M_2(M_1+1)-1)d \sin \theta_k}{\lambda}} \right], \tag{5}$$

得到扩展后的嵌套阵列的阵列流形矩阵： $B = [\mathbf{b}(\theta_1), \mathbf{b}(\theta_2), \dots, \mathbf{b}(\theta_K)]$ ，则 t 时刻虚拟阵列的接收信号为

$$Y(t) = BS(t) + N(t). \tag{6}$$

虚拟阵列的接收信号的协方差矩阵为： $R_{YY} = E[Y(t)Y^H(t)] = BR_{SS}B^H + R_{NN}$ ，其中 $R_{SS} = E[S(t)S(t)^H]$ 是入射信号的协方差矩阵， E 是期望算子， H 上标表示共轭转置。

2 压缩感知框架下的 DOA 估计模型

压缩感知的主要思想是对于具有稀疏性的信号进行压缩采样和精准重构，突破了传统的 Nyquist 采样定理的限制，可以采集较少的数据就能够对信号进行精准重构。

压缩感知数学模型：

$$\mathbf{y} = \mathcal{D}\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}\mathbf{s}, \tag{7}$$

式中 \mathbf{y} 是实验测得的信号， $\boldsymbol{\psi}$ 是稀疏基矩阵， \mathbf{s} 为稀疏系数。 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{s}$ 是在 $\boldsymbol{\psi}$ 稀疏基上进行稀疏表示， $\mathcal{D} = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}$ 为感知矩阵。稀疏系数 \mathbf{s} 内只有少量系数不为零。测量矩阵 $\boldsymbol{\varphi}$ 与稀疏矩阵 $\boldsymbol{\psi}$ 不相关，也就是要求测量矩阵 $\boldsymbol{\varphi}$ 与稀疏矩阵 $\boldsymbol{\psi}$ 的乘积满足有限等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP)^[31]：

$$(1 - \delta) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathcal{D}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{x}\|_2^2, \tag{8}$$

其中 $\delta \in (0, 1)$ 是满足上式的最小常数，一般把 δ 描述为约束等距常数。

由上节可以通过对嵌套阵列进行虚拟扩展，可以将阵列流形由 A 扩展到 B ，又由于信号在空域中本身就具有稀疏性，因此可以根据空域的划分方式将 B 从 $2(M_2(M_1 + 1) - 1) \times K$ 阶扩展到 $2(M_2(M_1 + 1) - 1) \times N$ 阶，其中 $N \gg K$ ，即可以得到过完备阵列流形矩阵 $C = [\mathbf{b}(\theta_1), \mathbf{b}(\theta_2), \dots, \mathbf{b}(\theta_N)]$ 。

于是稀疏信号表示的DOA估计数学模型为

$$X = CS + N, \quad (9)$$

其中 $S = [S_1, S_2, \dots, S_N]$ 表示空域信号; C 是压缩感知中的观测矩阵, 又因为目标信号 S 在整个空域内是稀疏的, 所以 C 也是感知矩阵。到此基于压缩感知的模型就建造完成。

3 基于QR分解的正则化回溯匹配追踪算法

本文算法首先对感知矩阵进行QR分解得到独立性更强的感知矩阵, 构造出稀疏信号表示的DOA估计数据模型; 再通过构造的模型利用正则化回溯匹配追踪算法重构信号, 重构出的信号非零元素对应的位置就是信号实际入射方位, 根据重构信号非零元素对应的位置即可得到信号的DOA估计。

3.1 对感知矩阵进行矩阵分解

对感知矩阵 C 进行标准QR分解:

$$C = QR, \quad (10)$$

式中 Q 是正交矩阵, R 是上三角矩阵。对 R 进行分析, 将 R 中的非对角线元素设置为零, 得到 R' , 同时得到新的矩阵 $\hat{C} = QR'$, 即得到独立性更强的感知矩阵 \hat{C} 。DOA估计的数学模型为

$$X = \hat{C}S + N. \quad (11)$$

我们关心的是从观测信号 X 恢复目标稀疏信号 S 的问题, 可以转换为求解 l_0 范数最小化问题。已知观测信号 X 和感知矩阵 \hat{C} , 重构出目标稀疏信号 S , 可表示为

$$\hat{S} = \arg \min \|S\|_{l_0} \text{ s.t. } X = \hat{C}S. \quad (12)$$

3.2 正则化思想

正则化思想是对初始迭代的结果进行再选择, 每次迭代中选择 T 个合格的原子, 从而可以保证信号的重构质量。通过计算感知矩阵 \hat{C} 与观测信号残差 r 之间内积的绝对值来进行选择, 计算相关系数 $u = |\hat{C}^T r|_1$, 之后将与残差值匹配的 T 个原子 (即, 对应于感知矩阵 \hat{C} 中最大 T 值的列原子) 放入集合 J 中。根据相关系数 $|u(i)| \leq 2|u(j)| (i, j \in J_0)$ 的测量, 将集合中的原子分组, 具有最大相关系数的原子集合被输入到集合 J_0 。正则化思想选出能量最大的原子, 保证了信号的重构质量。

3.3 回溯机制

回溯机制是在进行迭代的过程中找到集合 L_0 中最大的 T 项, 并把它们放入索引集, 接下来更新索引集、计算残差以及求解最小二乘解, 逐步扩展和更新索引集。这样先前选择的可能不正确的原子就会被回溯方法删除, 保证了所选原子的正确性。这样, 当达到迭代停止条件时, 进行循环迭代以完成信号的重构。当残差小于 ϵ (其中 ϵ 是一个任意小的常数) 或达到最大迭代次数时, 算法即停止迭代, 重构出稀疏信号。回溯思想剔除了不符合条件的原子, 保证了信号的重构质量。

3.4 算法工作原理

基于QR分解的正则化回溯自适应匹配追踪算法分为三个阶段, 第一个阶段是通过QR分解对感知矩阵 C 进行优化, 得到独立性更强的感知矩阵 \hat{C} , 以便于提高重构精确度; 第二个阶段是利用正则化原则选取能量值最大的原子, 当达到迭代停止条件时停止迭代, 进入第三个阶段。第三个阶段用回溯思想, 剔除掉不符合要求的原子, 当达到最大迭代次数时停止迭代, 最终得到重构的信号。该算法主要的思想是通过QR分解增大感知矩阵的独立性又通过正则化思想和回溯机制对原子多次进行选择, 保证了信号重构的准确性, 进而使得信号的重构精度更高。

对感知矩阵 C 进行标准QR分解:

$$C = QR, \quad (13)$$

式中 Q 是正交矩阵, R 是上三角矩阵。对 R 进行分析, 将 R 中的非对角线元素设置为零, 得到 R' , 得到新的矩阵 $\hat{C} = QR'$ 。即得到独立性更强的感知矩阵 \hat{C} 。

计算残差 $r_{t-1}^{(1)}$ 与感知矩阵 \hat{C} 之间的相关系数, 即:

$$u = |\hat{C}^T r_{t-1}^{(1)}|, \quad (14)$$

其中 t 代表迭代次数, 初始值为 1, u 中 T 个最大值 (若非零值个数小于 T 则选择所有非零值) 对应感知矩阵的序列号 j 构成集合 J 。

对集合 J 进行正则化处理, 在所有满足 $|u(i)| \leq 2|u(j)| (i, j \in J_0)$ 的子集 $J_0 \subset J$ 中, 选择具有最大能量且包括最大相关系数的子集 J_0 加入集合 $\Lambda_t^{(1)}$ 。进行迭代运算, 更新索引集和原子集合:

$$\Lambda_t^{(1)} = \Lambda_{t-1}^{(1)} \cup J_0, \quad (15)$$

$$\hat{C}_{\Lambda_t}^{(1)} = [\hat{C}_{\Lambda_{t-1}}^{(1)}, \hat{C}_{J_0}], \quad (16)$$

其中 $\Lambda_t^{(1)}$ 表示第 t 次迭代得到的原子集合, $\hat{C}_{\Lambda_t}^{(1)}$ 表示按照 $\Lambda_t^{(1)}$ 选出的 \hat{C} 的列向量构成的矩阵。

求 $X = \hat{C}_{\Lambda_t}^{(1)} S_t^{(1)}$ 的最小二乘解:

$$\hat{S}_t^{(1)} = \arg \min_{S_t^{(1)}} \|X - \hat{C}_{\Lambda_t}^{(1)} S_t^{(1)}\|_2. \quad (17)$$

计算原始信号与重构信号的残差, 即

$$r_t^{(1)} = X - \hat{C}_{\Lambda_t}^{(1)} \hat{S}_t^{(1)}, \quad (18)$$

当迭代次数超过信号稀疏度 T 或 $\|\Lambda_t\|_0 > 2T$ 时, 停止迭代。

输入经过正则化后迭代所得到的残差、索引集和原子集合: $r_0^{(2)} = r_t^{(1)}$, $\Lambda_0^{(2)} = \Lambda_t^{(1)}$, $\hat{C}_{\Lambda_0}^{(2)} = \hat{C}_{\Lambda_t}^{(1)}$, 初始迭代次数 $i = 1$ 。

计算残差 $r_{i-1}^{(2)}$ 与感知矩阵 \hat{C} 的相关系数, 即

$$u = |\hat{C}^T r_{i-1}^{(2)}|, \quad (19)$$

u 中 T 个最大值 (若非零值个数小于 T 则对应所有非零值) 对应 \hat{C} 的序列号 l 构成集合 L_0 。更新索引集和原子集合:

$$\Lambda_i^{(2)} = \Lambda_{i-1}^{(2)} \cup L_0, \quad (20)$$

$$\hat{C}_{\Lambda_i}^{(2)} = [\hat{C}_{\Lambda_{i-1}}^{(2)}, \hat{C}_{L_0}]. \quad (21)$$

计算 $X = \hat{C}_{\Lambda_i}^{(2)} S_i^{(2)}$ 的最小二乘解:

$$\hat{S}_i^{(2)} = \arg \min_{S_i^{(2)}} \|X - \hat{C}_{\Lambda_i}^{(2)} S_i^{(2)}\|_2. \quad (22)$$

进行回溯, 从 $S_i^{(2)}$ 中选出绝对值最大的 T 项记为 $\hat{S}_{iK}^{(2)}$, 对应的原子集中 T 列记为 $\hat{C}_{iT}^{(2)}$, 对应的索引序列号记为 $\Lambda_{iT}^{(2)}$, 更新索引集 $\Lambda_i^{(2)} = \Lambda_{iT}^{(2)}$ 。

更新残差:

$$r_i^{(2)} = X - \hat{C}_{iT}^{(2)} \hat{S}_{iK}^{(2)}, \quad (23)$$

其中 $i = i + 1$, 如果 $i \leq T$ 则继续下一次迭代, 如果 $i > T$ 或 $r_i^{(2)} < \epsilon$ (其中 ϵ 是任意小的常数), 停止迭代, 重构出信号。重构信号中的非零元素即为实际入射信号方位, 将非零元素位置转化成对应的入射信号方向角度, 即得到 DOA 估计值。

该算法的步骤见图 3。

4 算法复杂度分析

QR-RBMP 算法分为三个阶段来实现, 算法的总体计算复杂度可以通过将各个部分的计算复杂度相加得到, 下面给出具体分析过程。

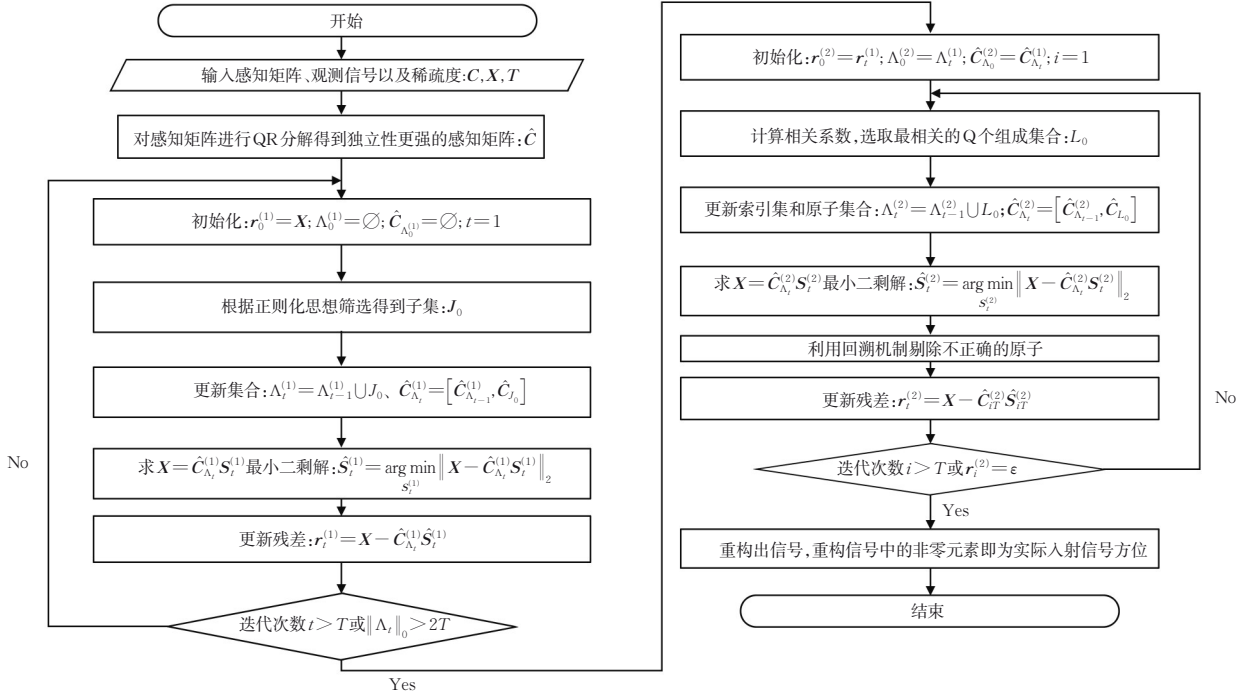


图3 QR-RBMP算法流程图

Fig. 3 Flow chart of QR-RBMP algorithm

第一个阶段的QR分解需要对感知矩阵进行标准QR分解, 其所需复杂度为 $O(N^2(2M_2(M_1 + 1) - 1))$, 其中 $2M_2(M_1 + 1) - 1$ 为感知矩阵的行数, N 为感知矩阵的列数。

第二阶段的迭代过程中, 需要进行多次计算残差与感知矩阵之间的相关系数、正则化、最小二乘解等操作。其中, 计算残差与感知矩阵之间的相关系数所需复杂度为 $O((2M_2(M_1 + 1) - 1)N)$, 选择相关系数最大的 T 个元素的计算复杂度为 $O(T(2M_2(M_1 + 1) - 1))$ 。正则化所需复杂度为 $O(2^T)$, 最小二乘解所需复杂度为 $O(T(2M_2(M_1 + 1) - 1)^2)$, 其中 T 为稀疏度。整个迭代过程所需总复杂度为 $O(t((2M_2(M_1 + 1) - 1) \times N) + (2^T + (2M_2(M_1 + 1) - 1) + T(2M_2(M_1 + 1) - 1))t)$, 其中 t 为迭代次数。

第三阶段的迭代过程中, 同样需要进行多次计算残差与感知矩阵之间的相关系数、最小二乘解等操作。其中, 计算残差与感知矩阵之间的相关系数所需复杂度为 $O((2M_2(M_1 + 1) - 1)N)$, 选择相关系数最大的 T 个元素的计算复杂度为 $O(T(2M_2(M_1 + 1) - 1))$, 最小二乘解所需复杂度为 $O(T(2M_2(M_1 + 1) - 1)^2)$, 回溯删除掉不需要的原子的计算复杂度为 $O(T(2M_2(M_1 + 1) - 1)N)$ 。整个迭代过程所需总复杂度为 $O(i((2M_2(M_1 + 1) - 1)N) + (2M_2(M_1 + 1) - 1)^2 iT + iT(2M_2(M_1 + 1) - 1) + iT(2M_2(M_1 + 1) - 1)N)$, 其中 i 为迭代次数。

综上所述, 基于QR分解的正则化回溯匹配追踪算法的计算复杂度为

$$O(t((2M_2(M_1 + 1) - 1) \times N) + (2^T + (2M_2(M_1 + 1) - 1) + T(2M_2(M_1 + 1) - 1))t) + O(i((2M_2(M_1 + 1) - 1)N) + (2M_2(M_1 + 1) - 1)^2 iT + iT(2M_2(M_1 + 1) - 1) + iT(2M_2(M_1 + 1) - 1)N)$$

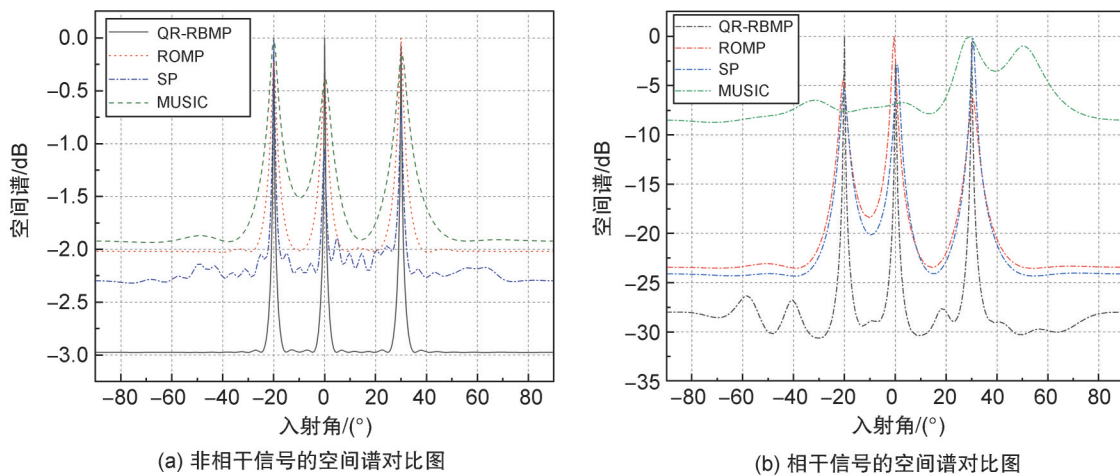
$$iT(2M_2(M_1+1)-1) + iT(2M_2(M_1+1)-1)N = O\left(\left((N^2 + (N + 2M_2T(M_1+2) + 2^T))t + (N+1 + 2M_2(M_1+1)Ti)\right)(2M_2(M_1+1)-1)\right)。$$

5 仿真结果分析

本节通过对 MUSIC 算法、ROMP 算法、SP 算法和 QR-RBMP 算法进行仿真对比验证所提 QR-RBMP 算法的良好估计性能。入射信号为远场窄带信号,噪声是加性高斯白噪声。仿真基于嵌套阵列,阵元间距为 $d = \lambda/2$,阵元数 $M_1 = 4, M_2 = 5$;嵌套阵列实际阵元的位置为 $\{0, d, 2d, 3d, 4d, 9d, 14d, 19d, 24d\}$;由 1.2 节可知嵌套阵列可以扩展产生 $2 \times 5(4+1) - 1 = 49$ 个阵元,其阵元位置为 $[-24d \sim 24d]$ 。

实验一:仿真比较 3 个信源条件下各算法的估计精度

仿真设置:49 阵元的嵌套扩展阵列;信号入射角度为 $[-20^\circ, 0^\circ, 30^\circ]$;MUSIC 算法的快拍数为 500,ROMP、SP 和 QR-RBMP 的快拍数为 20;信噪比 0 dB;在信号分别为相干和非相干的情况下,比较 QR-RBMP 算法与 ROMP 算法、SP 算法和传统的 MUSIC 算法的空间谱图。仿真结果见图 4。



注:QR-RBMP:基于QR分解的正则化回溯匹配追踪算法(QR-Regularized Backtracking Matching Pursuit);ROMP:正则化正交匹配追踪算法(Regularized Orthogonal Matching Pursuit);SP:子空间追踪算法(Subspace Pursuit);MUSIC:多重信号分类方法(Multiple Signal Classification)。

图4 空间谱对比图

Fig. 4 Comparison of spatial spectrum

图4(a)为入射信号为非相干信号时四种算法的空间谱对比图,其中 QR-RBMP 算法对应的是实线, MUSIC 算法对应的是划线, ROMP 算法对应的是点线, SP 算法对应的是点划线。仿真结果显示,上述四种算法均能够正确地信号来向进行定位,并且可以清楚地看到,相较于 ROMP 算法、SP 算法和传统的 MUSIC 算法,本文提出的 QR-RBMP 算法 3 个谱峰主瓣峰值均达到 0 dB,空间谱图最为尖锐,证明了本文所提算法的估计性能更优,这是由于正则化思想和回溯机制对原子进行了多次筛选,保证了原子选择的精确度,从而大大提高了信号的重构精确度。

图4(b)为入射信号为相干信号时四种算法的空间谱对比图,仿真结果显示,传统的 MUSIC 算法在入射角度为 $-31^\circ, 3^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ 时出现伪峰,不能有效分辨信源角度。由于 QR-RBMP 算法、ROMP 算法以及 SP 压缩感知类算法是利用目标稀疏信号直接求解信号的 DOA 估计值,不用对矩阵进行特征分解,可以直接分辨出相干信号,所以可以准确地估计出信源的角度,同时,图中可以看出 QR-RBMP 算法具有最尖锐的空间谱图,其估计性能优于 ROMP 算法和 SP 算法,这是由于正则化思想和回溯机制为原子选择提供了双重保障,提高了 QR-R-BAMP 算法的原子选择精度,提

高了信号的重构精度,进而提高了DOA估计的准确度。

实验二:比较各算法均方根误差随信噪比和快拍数的变化情况

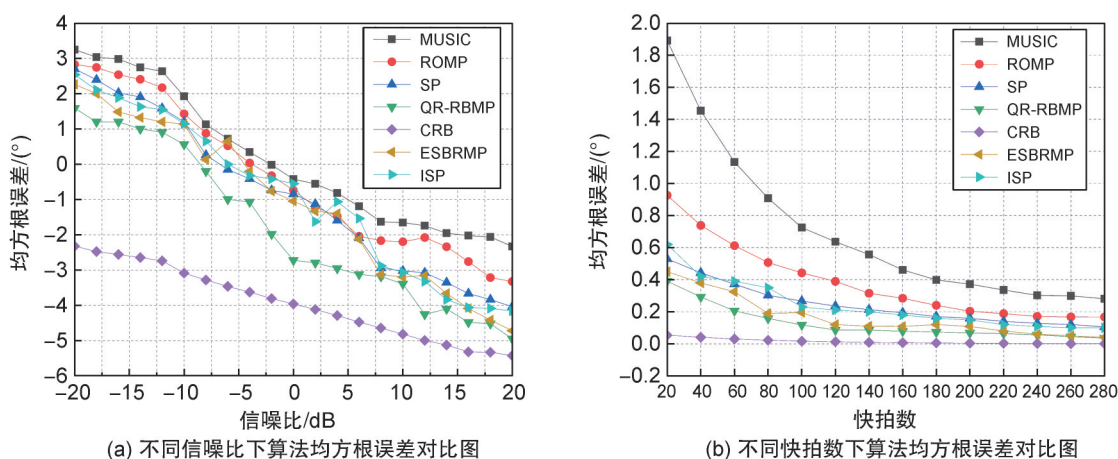
从均方根误差(Root Mean Square, RMSE)的角度研究了信噪比(Signal Noise Ratio, SNR)和快拍数对DOA估计性能的影响,在此输入非相干信号来进行实验对比验证所提算法的良好性能。非相干信号的幅度和相位之间存在一定的随机关系,这种随机关系可能导致算法无法有效地估计信号方向,而相干信号是一种具有固定相位关系的信号,它们的波形在时间和空间上都保持一致,可以进行有效估计。此外,MUSIC算法不能对相干信号进行有效估计,综上所述,本实验输入的信号为非相干信号。

仿真条件:(1)SNR对DOA估计性能的影响:采用49阵元的嵌套扩展阵列,存在3个远场窄带信号,目标角度为 $[-20^\circ, 0^\circ, 30^\circ]$,QR-RBMP算法、ESBRMP算法、ROMP算法、ISP算法和SP算法快拍数为10,MUSIC算法快拍数为500。每个信噪比下进行256次蒙特卡洛实验,比较MUSIC算法、ROMP算法、SP算法、ESBRMP算法、ISP算法和本文所提算法均方根误差随信噪比变化的曲线。仿真结果见图5(a)。(2)快拍数对DOA估计性能的影响,信号以及阵列结构与(1)设置条件相同,每个快拍数下进行200次蒙特卡洛实验,信噪比为0 dB。仿真结果见图5(b)。实验仿真中均方根误差的定义为:

$$R_{\text{RMSE}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{\theta}_{kn} - \theta_n)^2}, \quad (24)$$

式中 K 是信源的个数,独立实验次数 N , $\hat{\theta}_{kn}$ 是第 k 个信源第 n 次实验的角度估计值, θ_n 是第 k 个信源真实的波达角。

图5给出了均方根误差的DOA估计性能曲线。图5(a)是不同算法的RMSE随SNR变化的曲线关系图,其中SNR在 -20 dB \sim 20 dB范围内变化,考虑到本文所提算法QR-RBMP的RMSE的变化范围较小,纵坐标为以2为底的对数形式。仿真结果显示,随着SNR的增加,六种算法的RMSE均逐渐下降,估计精度不断提高。当信噪比为 12 dB \sim 20 dB时,其RMSE逼近克拉美罗界(Cramer-Rao Bounds, CRB)下界,而另外五种算法无法达到CRB下界;当信噪比为 -12 dB \sim 0 dB时,QR-RBMP算法的RMSE迅速下降,其估计精度高于另外五种算法;当信噪比为 -20 dB时,QR-RBMP算法RMSE比ESBRMP算法的RMSE低 0.951 09° 。这是由于正则化思想选出最相关以及能量最大



注:MUSIC:多重信号分类方法(Multiple Signal Classification);ROMP:正则化正交匹配追踪算法(Regularized Orthogonal Matching Pursuit);SP:子空间追踪算法(Subspace Pursuit);QR-RBMP:基于QR分解的正则化回溯匹配追踪算法(QR-Regularized Backtracking Matching Pursuit);CRB:克拉美罗界下界(CramerRao Bounds);ESBRMP:能量排序的回溯正则化匹配追踪算法(Backtracking Regularization Matching Pursuit Algorithm for Energy Sorting);ISP:无平方根方法的SP算法(SP algorithm without Square Root)。下图同注。

图5 均方根误差对比图

Fig. 5 Comparison of root mean square error

的原子,回溯阶段删除掉不符合要求的原子,使得算法在 DOA 估计过程中鲁棒性更强,能够减小噪声对 DOA 估计的影响,提高 DOA 估计的准确性。因此本文所提出的 QR-RBMP 算法解决了 DOA 估计在低信噪比下角度分辨率低的问题,相比于其他算法具有显著优势。

图 5(b)为不同算法的 RMSE 随不同数量的快拍的变化曲线图,其中快拍数在 20~280 范围间变化。仿真结果显示,在快拍数为 20 时,QR-RBMP 算法 RMSE 比 ESRMP 算法的 RMSE 低 0.06° 。当快拍数为 120~280 时,本文所提出算法的 RMSE 曲线逼近 CRB 曲线,并且 RMSE 始终低于其余算法;当快拍数在 20~220 范围时,QR-RBMP 算法具有最小的均方根误差,这是由于正则化思想和回溯机制保证了原子选择正确性并且在每次迭代中都会更新原子集合和索引集合,这些特性使得该算法能够更好地逼近原始信号。因此本文所提出的 QR-RBMP 算法解决了 DOA 估计在小快拍下角度分辨率低的问题,相比于其他算法具有显著优势。

实验三:比较各算法分辨成功概率随信噪比和快拍数的变化情况

为了进一步验证本文提出的算法,从分辨成功概率的角度研究了 SNR 和快拍数对 DOA 估计性能的影响。存在 3 个非相干信号分别从 $[-20^\circ, 0^\circ, 30^\circ]$ 入射到阵元数为 49 的嵌套阵列上,仿真结果见图 6。实验仿真中分辨成功率的定义为

$$P_{\text{POR}_k} = \left(\frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K S_k \right) \times 100\%, \quad (25)$$

其中 S_k 表示 N 次 DOA 估计实验中第 k 个信源成功的次数。

图 6 给出了信噪比和快拍数不同情况下,本文提出的 QR-RBMP 算法和其他算法的分辨成功概率对比图。其中,信噪比仿真条件:快拍数为 300, SNR 在 $-5 \text{ dB} \sim 20 \text{ dB}$ 范围内变化。不同快拍数下仿真设置:信噪比为 0 dB , 快拍数在 20~220 范围内变化。从仿真结果可以看出,随着信噪比的增大和快拍数的增加,所有算法的分辨成功概率均逐渐增大。当 SNR 为 -5 dB 时,QR-RBMP 算法的分辨成功概率为 0.648 83,在整个 SNR 的变化范围内,QR-RBMP 算法的分辨成功概率均高于其余算法;当快拍数为 20 时,本文所提的算法 QR-RBMP 分辨成功率为 0.705 17,在整个快拍数变化范围内,QR-RBMP 算法的分辨成功概率均高于其余算法。因为本文利用了正则化思想和回溯机制保证了原子选择正确性,提高了 DOA 估计的准确性。所以,在低信噪比和小快拍情况下,本文所提出的 QR-RBMP 算法具有更高的分辨成功概率,在 DOA 估计方面具有显著的优势。

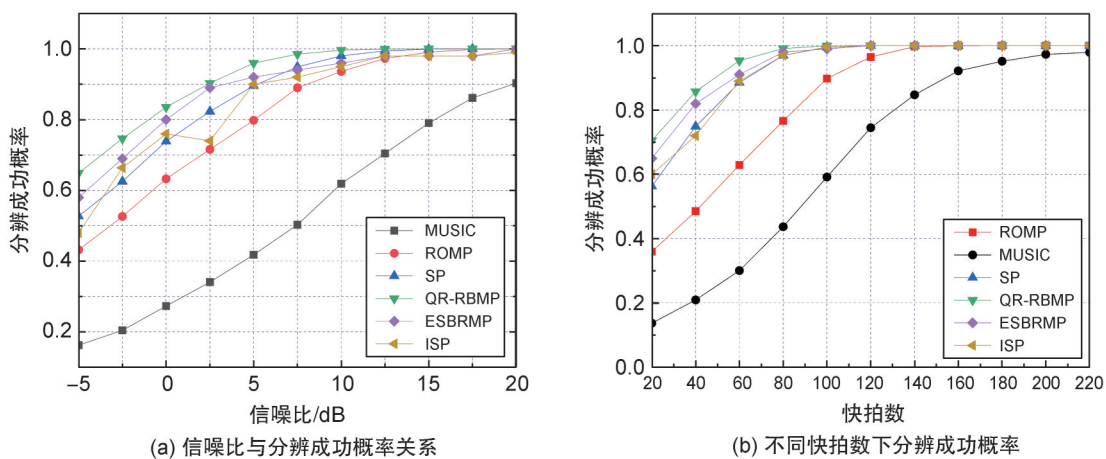


图6 分辨成功概率对比图

Fig. 6 Comparison of resolution success probability

实验四:比较各算法的收敛速度

为了进一步验证本文提出的算法,从收敛速度的角度研究平均归一化残差(Averaged Normalized Mean Squared Error, ANMSE)与迭代次数的关系。仿真条件:阵元数为 49 的嵌套扩展阵列, 3

个远场窄带信号的入射角度分别为 $[-20^\circ, 0^\circ, 30^\circ]$ 。当算法达到规定的迭代停止条件时停止迭代。QR-RBMP算法、ESBRMP算法、ROMP算法、ISP算法和SP算法的稀疏度均设置为12。归一化残差与迭代次数仿真结果见图7。实验仿真中平均归一化均方根误差定义为

$$A_{\text{annmse}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 10 \log_{10} \frac{\|S_i - \hat{S}_i\|_2^2}{\|S_i\|_2^2}, \quad (26)$$

其中 N 是实验次数,在此实验中 $N=5$, S_i 和 \hat{S}_i 分别表示第 i 次实验的原始信号和重构信号。

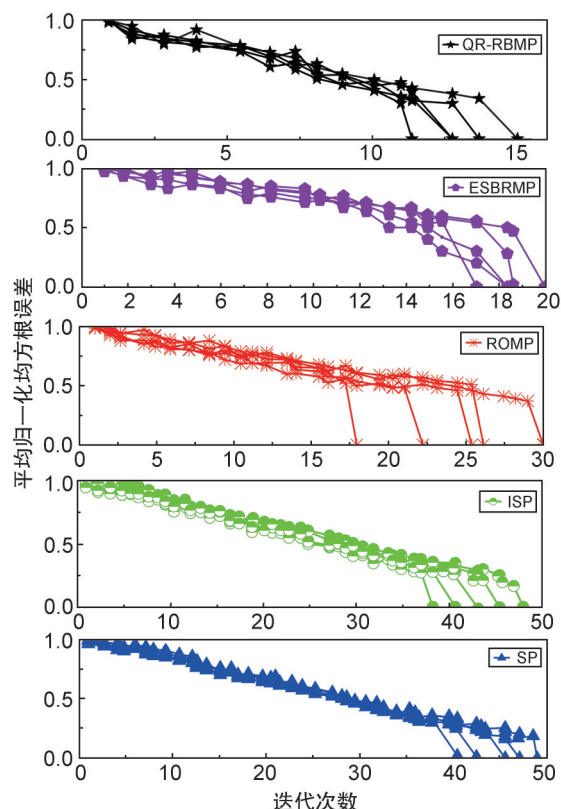


图7 平均归一化残差随迭代次数变化

Fig. 7 The averaged normalized mean squared error change with the number of iterations

仿真结果显示,在算法达到迭代停止条件时,QR-RBMP算法所需要的迭代次数少于ESBRMP算法、ROMP算法、ISP算法和SP算法,且收敛速度明显要比ESBRMP算法、ROMP算法、ISP算法和SP算法快。QR-RBMP算法的收敛性更强,收敛速度更快,原因如下:其一是通过QR分解减少了计算量,提高算法的效率。其二是通过正则化思想筛选出最相关以及能量最大的原子,并且在回溯阶段迭代删除掉不符合要求的原子,最终减少了算法的迭代次数,提高了算法的收敛速度。

6 结论

本文研究了压缩感知理论在波达方向估计中的应用,以嵌套阵列为模型,提出了一种基于QR分解的正则化回溯匹配追踪的DOA估计算法。该算法利用压缩感知算法进行DOA估计,在少快拍、低信噪比下就可以估计出信源的方位角度,不用进行矩阵特征分解就可以估计出相干信号;利用QR分解优化感知矩阵,提高感知矩阵的列独立性,再将正则化思想和回溯机制结合完成信号的重构,正则化和回溯机制保证信号的重构精度。相较于原本的正则化正交匹配追踪算法和子空间匹配追踪算法性能有一定的提升。最后通过仿真结果证明QR-RBMP算法的空间谱最为尖锐、均方根误差更小、分辨成功率更高。

参考文献:

- [1] HU N, YE Z F, XU X, *et al.* DOA Estimation for Sparse Array via Sparse Signal Reconstruction[J]. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2013, **49**(2): 760–773. DOI: 10.1109/TAES.2013.6494379.
- [2] KRIM H, VIBERG M. Two Decades of Array Signal Processing Research: The Parametric Approach[J]. *IEEE Signal Process Mag*, 1996, **13**(4): 67–94. DOI: 10.1109/79.526899.
- [3] SCHMIDT R. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation[J]. *IEEE Trans Antennas Propag*, 1986, **34**(3): 276–280. DOI: 10.1109/TAP.1986.1143830.
- [4] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques[J]. *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process*, 1989, **37**(7): 984–995. DOI: 10.1109/29.32276.
- [5] STOICA P, NEHORAI A. Performance Study of Conditional and Unconditional Direction-of-arrival Estimation [J]. *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process*, 1990, **38**(10): 1783–1795. DOI: 10.1109/29.60109.
- [6] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. Maximum Likelihood Localization of Sources in Noise Modeled as a Stable Process[J]. *IEEE Trans Signal Process*, 1995, **43**(11): 2700–2713. DOI: 10.1109/78.482119.
- [7] OTTERSTEN B, VIBERG M, STOICA P, *et al.* Exact and Large Sample Maximum Likelihood Techniques for Parameter Estimation and Detection in Array Processing [M]//HAYKIN S, LITVA J, SHEPHERD T J. Radar Array Processing. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993: 99–151. DOI: 10.1007/978-3-642-77347-1_4.
- [8] HAMZA R, BUCKLEY K. Second-order Statistical Analysis of Totally Weighted Subspace Fitting Methods [J]. *IEEE Trans Signal Process*, 1994, **42**(9): 2520–2524. DOI: 10.1109/78.317877.
- [9] ÇALIŞKAN S K. UAV Path Planning with Multiagent Ant Colony System Approach[C]//2016 24th Signal Processing and Communication Application Conference (SIU). Zonguldak, Turkey: IEEE, 2016: 1409–1412. DOI: 10.1109/SIU.2016.7496013.
- [10] WAGNER M, PARK Y, GERSTOFT P. Gridless DOA Estimation and Root-MUSIC for Non-uniform Linear Arrays[J]. *IEEE Trans Signal Process*, 2021, **69**: 2144–2157. DOI: 10.1109/TSP.2021.3068353.
- [11] TOTA R, HOSSAIN M S. Multiple Near-field Sources Localization by Optimal Beamformer Using Minimum Norm Method[C]//2021 International Conference on Electronics, Communications and Information Technology (ICECIT). Khulna, Bangladesh: IEEE, 2021: 1–4. DOI: 10.1109/ICECIT54077.2021.9641373.
- [12] QI B B, LI W. An Improved Multiple-toeplitz Matrices Reconstruction Algorithm for DOA Estimation of Coherent Signals[J]. *Radioengineering*, 2021, **30**(3): 532–539. DOI: 10.13164/re.2021.0532.
- [13] DONOHO D L. Compressed Sensing[J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306. DOI: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [14] WANG H B. Compressed Sensing: Theory and Applications[J]. *J Phys: Conf Ser*, 2023, **2419**(1): 012042. DOI: 10.1088/1742-6596/2419/1/012042.
- [15] MALLOY M L, NOWAK R D. Near-optimal Adaptive Compressed Sensing[J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2014, **60**(7): 4001–4012. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321552.
- [16] 陈健, 庄耀宇, 杨丹, 等. 基于FPGA的改进的排序QR分解实现[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2022, **49**(10): 8–16. DOI: 10.16339/j.cnki.hdxzbzkb.2022351. CHEN J, ZHUANG Y Y, YANG D, *et al.* Implementation of Improved Sorted QR Decomposition on FPGA [J]. *J Hunan Univ Nat Sci*, 2022, **49**(10): 8–16. DOI: 10.16339/j.cnki.hdxzbzkb.2022351.
- [17] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information[J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2006, **52**(2): 489–509. DOI: 10.1109/TIT.2005.862083.
- [18] LI Y Q, WANG J. Time-frequency Analysis of Seismic Data Based on Basis Pursuit[C]//2014 12th International Conference on Signal Processing (ICSP). Hangzhou, China: IEEE, 2014: 175–179. DOI: 10.1109/ICOSP.2014.7014992.
- [19] TROPP J A, GILBERT A C. Signal Recovery from Random Measurements via Orthogonal Matching Pursuit [J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2007, **53**(12): 4655–4666. DOI: 10.1109/TIT.2007.909108.
- [20] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Uniform Uncertainty Principle and Signal Recovery via Regularized Orthogonal Matching Pursuit[J]. *Found Comput Math*, 2009, **9**(3): 317–334. DOI: 10.1007/s10208-008-9031-3.
- [21] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace Pursuit for Compressive Sensing Signal Reconstruction[J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2009, **55**(5): 2230–2249. DOI: 10.1109/TIT.2009.2016006.
- [22] DO T T, GAN L, NGUYEN N, *et al.* Sparsity Adaptive Matching Pursuit Algorithm for Practical Compressed Sensing[C]//2008 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, CA, USA: IEEE, 2008: 581–587. DOI: 10.1109/ACSSC.2008.5074472.

- [23] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: Iterative Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Samples[J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 2009, **26**(3): 301–321. DOI: 10.1016/j.acha.2008.07.002.
- [24] ZHAO J, BAI X. An Improved Orthogonal Matching Pursuit Based on Randomly Enhanced Adaptive Subspace Pursuit[C]//2017 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC). Kuala Lumpur, Malaysia: IEEE, 2017: 437–441. DOI: 10.1109/APSIPA.2017.8282071.
- [25] ZHANG C J. An Orthogonal Matching Pursuit Algorithm Based on Singular Value Decomposition[J]. *Circuits Syst Signal Process*, 2020, **39**(1): 492–501. DOI: 10.1007/s00034-019-01182-2.
- [26] LIU Y Z, SONG T, ZHUANG Y Q. A High-throughput Subspace Pursuit Processor for ECG Recovery in Compressed Sensing Using Square-root-free MGS QR Decomposition[J]. *IEEE Trans Very Large Scale Integr VLSI Syst*, 2020, **28**(1): 174–187. DOI: 10.1109/TVLSI.2019.2936867.
- [27] LI L X, XU D F, PENG H P, *et al.* Reconstruction of Complex Network Based on the Noise via QR Decomposition and Compressed Sensing[J]. *Sci Rep*, 2017, **7**(1): 15036. DOI: 10.1038/s41598-017-15181-3.
- [28] ZHANG H F, XIAO S G, ZHOU P. A Matching Pursuit Algorithm for Backtracking Regularization Based on Energy Sorting[J]. *Symmetry*, 2020, **12**(2): 231. DOI: 10.3390/sym12020231.
- [29] ZHENG Z, YANG C L, WANG W Q, *et al.* Robust DOA Estimation Against Mutual Coupling with Nested Array[J]. *IEEE Signal Process Lett*, 2020, **27**: 1360–1364. DOI: 10.1109/LSP.2020.3011314.
- [30] JIANG G J, YANG Y L. Synthetic Sparse Nested Array with Extended Aperture and Reduced Mutual Coupling for DOA Estimation[J]. *Signal Process*, 2023, **204**: 108849. DOI: 10.1016/j.sigpro.2022.108849.
- [31] CANDÈS E, ROMBERG J. Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling[J]. *Inverse Probl Int J Inverse Probl Inverse Meth Comput Inversion Data*, 2007, **23**(3): 969–985. DOI:10.1088/0266-5611/23/3/008.