

玻色-爱因斯坦凝聚体中周期梯度磁场诱导的拉比振荡

高乐乐, 罗焕波, 李禄*

(山西大学 理论物理研究所, 量子光学与量子光学器件国家重点实验室, 山西 太原 030006)

摘要: 本文研究周期梯度磁场作用下, 两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学演化。研究方法包括在线性情况下的解析分析和非线性情况下的数值模拟。在线性情况下, 通过应用旋波近似, 随时间演化的系统波函数能够被解析求解。结果表明凝聚体中两个组分的原子在磁场作用下进行拉比振荡, 通过调整磁场的梯度和周期能够控制拉比振荡的振幅和振荡周期。在非线性的情况下, 通过数值求解 Gross-Pitaevskii 方程发现当非线性较弱时, 结果与线性的情况类似。随着非线性强度的增加, 系统的共振点发生偏移, 基态原子转移到激发态上的比例逐渐下降。本文研究的重点是在共振情况下, 通过拉比振荡将基态原子转移到激发态上, 从而为进一步研究激发态的动力学特性铺平道路。

关键词: 周期调制; 旋波近似; 能级跃迁; 共振点偏移

中图分类号: O469 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-2395(2025)03-0558-07

Rabi Oscillations Induced by a Periodic Gradient Magnetic Field in a Bose-Einstein Condensate

GAO Lele, LUO Huanbo, LI Lu*

(Institute of Theoretical Physics, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: We study the dynamical evolution of a two-component Bose-Einstein condensate under a periodic gradient magnetic field. The research methods include analytical analysis in linear regime and numerical simulations in nonlinear regime. In linear regime, the system's wave function, evolving over time, can be analytically solved by applying the rotating wave approximation. The results reveal that the atoms of the two components in the condensate undergo Rabi oscillations under the influence of the magnetic field. By adjusting the gradient and period of the periodic gradient magnetic field, the amplitude and period of the Rabi oscillations can be easily controlled. In the nonlinear regime, we numerically solve the Gross-Pitaevskii equation and find that the results are similar to the linear case when the nonlinearity is weak. However, as the nonlinearity coefficient increases, the resonant points of the system shift, and the proportion of ground state atoms transferred to the excited state gradually decreases. The focus of this study is to, under resonant conditions, transfer ground-state atoms to the excited state through Rabi oscillations. This paves the way for further investigation into the dynamical characteristics of the excited state.

Key words: periodic modulation; rotating wave approximation; energy level transition; resonant points shift

收稿日期: 2023-08-24; 接受日期: 2024-01-21

基金项目: 国家自然科学基金(61475198)

作者简介: 高乐乐(1996-), 男, 河南周口人, 硕士研究生, 研究方向为凝聚态物理。E-mail: 1724278328@qq.com

* 通信作者: 李禄(LI Lu), E-mail: llz@sxu.edu.cn

引文格式: 高乐乐, 罗焕波, 李禄. 玻色-爱因斯坦凝聚体中周期梯度磁场诱导的拉比振荡[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2025, 48(3): 558-564. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2024035.

0 引言

玻色-爱因斯坦凝聚作为一个可调控的宏观量子系统,为模拟各种量子效应提供了一个理想的平台。当原子中的两个超精细能级通过微波或者射频波相干耦合以后,这两个能级之间就会产生拉比振荡^[1-7]。通常相干耦合的两组分凝聚体与单组分凝聚体相比,具有更加丰富的物理特性,这些已经在理论上被大量研究^[8-16]。在实验上,利用相干耦合的能级间的拉比振荡,激发态的图像也被清晰地观测到^[17-18]。除了利用微波或者射频波产生相干耦合,磁场也能将不同能级进行耦合。磁场能够直接作用在原子的自旋上,因此被广泛应用于旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的操控中。其中由成对亥姆霍兹线圈产生的梯度磁场,被应用在凝聚体中产生各种拓扑结构,例如磁单极^[19-23]、斯格明子^[24-26]和扭结孤子^[27-28]等等。如果设置合理的周期性梯度磁场,在基态与激发态之间也能够形成拉比振荡。

与原子中的电子类似,囚禁在谐振子势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体也具有离散的能级。原子的能级能够通过吸收和释放光子实现能级跃迁^[29-30],而高能级的原子,例如里德堡原子,具有许多独特的性质^[31]。玻色-爱因斯坦凝聚体由于缺少能级跃迁机制,绝大多数研究都是基于基态。周期性梯度磁场引起的拉比振荡能够将基态原子转移到激发态上,这将为实验上制备激发态提供新的途径。

本文将探究周期梯度磁场对两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的影响。首先在谐振子势阱中制备凝聚体的基态,并以此为初态。然后打开周期梯度磁场,凝聚体在磁场作用下会发生拉比振荡。通过改变磁场的周期和梯度,探究这些参数对振荡强度和周期的影响。此外,还将分析非线性效应对系统共振频率的影响。本文结构安排如下:第1节主要介绍模型的引出和约化。第2节将在旋波近似下求解线性系统。第3节将展示非线性系统的数值结果。第4节将对全文进行总结。

1 理论模型

考虑⁸⁷Rb原子构成的准一维两组分玻色-

爱因斯坦凝聚体,它被囚禁在谐振子势阱中,其无量纲的形式为 $V(x) = x^2/2$ 。同时在该凝聚体上施加一个随时间变化的磁场,具体形式为 $B(x, t) = \{Ax \sin(\omega t), 0, 1/2\}$,其中 A 为梯度的强度, ω 为磁场变化频率。注意,该磁场在 x 方向为梯度磁场,而在 z 方向为一个强度为 $1/2$ 的偏置场。凝聚体的波函数可表示为 $\Psi(x, t) = \{\psi_1(x, t), \psi_2(x, t)\}^T$,其动力学可用无量纲的Gross-Pitaevskii方程来描述:

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi_1 &= \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2 + 1)\psi_1 + \\ &Ax \sin(\omega t)\psi_2 + g|\psi_1|^2\psi_1, \\ i\partial_t \psi_2 &= \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2 - 1)\psi_2 + \\ &Ax \sin(\omega t)\psi_1 + g|\psi_2|^2\psi_2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 g 表示粒子间相互作用的强度, $g > 0$ 是排斥相互作用,而 $g < 0$ 是吸引相互作用。首先需要确定在梯度磁场缺省的情况下系统的基态,并将其作为初态。然后,利用方程(1),研究该初态在周期梯度磁场下的动力学演化。下面将首先给出线性情况下系统的解析解。

2 线性情况下的解析解

首先考虑最简单的情况 $g = 0$,此时方程(1)变成线性系统。将该线性系统写成紧致的形式为:

$$i\partial_t \Psi = \hat{H}\Psi, \quad (2)$$

其中哈密顿量可以表示为不含时和含时两部分相加:

$$\hat{H}(x, t) = \hat{H}_0(x) + \hat{H}'(x, t), \quad (3)$$

这两部分哈密顿量分别表示为:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2 + \sigma_z), \quad \hat{H}' = Ax\sigma_x \sin(\omega t), \quad (4)$$

其中 σ_x 和 σ_z 为泡利矩阵。考虑梯度磁场比较小的情况,即 $A \leq 0.3$,此时它可以当作微扰来处理。由于 A 是个小量, \hat{H}' 为含时微扰项,而 \hat{H}_0 则为非微扰项。求解关于 \hat{H}_0 的本征方程 $\hat{H}_0\varphi = E\varphi$,可以得到两组本征态以及对应的能量:

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad E_n^{(1)} = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_n^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} f_{n-1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_n^{(2)} = n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

其中 $f_n(x)$ 为 n 阶谐振子的波函数, 满足正交和归一化条件, 前两个波函数的表达式为:

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad (6)$$

可以看出 $\varphi_0^{(1)}$ 为基态, 也是演化所需要的初态, 此时能量为 0。当 $n \geq 1$ 时, 两组本征态简并。由于微扰项作用在不同组分的波函数, 并且为奇函数, 选择 $n=2$ 的第二激发态 $\varphi_2^{(2)}$ 作为与基态耦合的激发态。将这对基态和激发态作为基矢, 并重新定义为:

$$\Psi_g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi_e(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

对应的基态和激发态的能量分别为 $E_g = 0, E_e = 2$ 。相应的波函数如图 1 所示。在磁场的作用下, 这两个态耦合的波函数可以用它们的叠加来表示:

$$\Psi(x, t) =$$

$$c_g(t)\Psi_g(x) + c_e(t)\Psi_e(x)\exp(-iE_e t), \quad (8)$$

其中 $c_g(t)$ 和 $c_e(t)$ 分别表示基态和激发态所占的比重, 并且满足 $|c_g|^2 + |c_e|^2 = 1$ 。 $\exp(-iE_e t)$ 为激发态的时间演化因子。下面求解在微扰哈密顿量 \hat{H}' 的作用下 $c_g(t)$ 和 $c_e(t)$ 的表达形式。

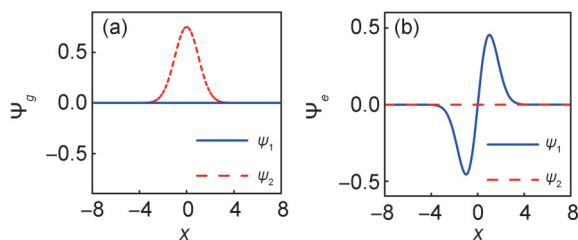


图 1 基态(a)和激发态(b)的两组分波函数的形状分布图

Fig. 1 The distribution diagrams of the two-component wave function shapes for the (a) ground state and (b) excited state

此时需要给出在公式(7)这组基矢下的微扰矩阵。直接求解微扰矩阵相对复杂, 这里使用一个小技巧。引入谐振子的上升和下降算符:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{x - \partial_x}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a} = \frac{x + \partial_x}{\sqrt{2}}, \quad (9)$$

并且作用在谐振子本征态上满足如下关系:

$$\hat{a}^\dagger f_n(x) = \sqrt{n+1} f_{n+1}(x),$$

$$\hat{a} f_n(x) = \sqrt{n} f_{n-1}(x), \quad (10)$$

这样微扰哈密顿量(3)可以用这两个算符重新表示为:

$$\hat{H}' = \frac{A \sin(\omega t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}^\dagger + \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger + \hat{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中非对角线上的微扰矩阵元可以通过如下公式计算:

$$H'_{eg} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_e^\dagger \hat{H}' \Psi_g dx =$$

$$\frac{A \sin(\omega t)}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) f_1(x) dx = \frac{A \sin(\omega t)}{\sqrt{2}}.$$

由于微扰哈密顿量为厄米算符, 因此另一个非对角线上的微扰矩阵元为 $H'_{ge} = H'_{eg}$ 。对角线上的微扰矩阵元也可以通过类似计算得到, 结果为 $H'_{ee} = H'_{gg} = 0$ 。

将波函数表达式(8)代入薛定谔方程(2)时, 能够得到关于 $c_g(t)$ 和 $c_e(t)$ 的动力学方程:

$$\dot{c}_g = -ie^{-i\omega_0 t} H'_{ge} c_e = \frac{A}{2\sqrt{2}} [e^{-i(\omega+\omega_0)t} - e^{-i(\omega-\omega_0)t}] c_e,$$

$$\dot{c}_e = -ie^{i\omega_0 t} H'_{eg} c_g = \frac{A}{2\sqrt{2}} [e^{-i(\omega-\omega_0)t} - e^{-i(\omega+\omega_0)t}] c_g, \quad (13)$$

其中 $\omega_0 = E_e - E_g = 2$ 为系统的固有频率。当 $\omega + \omega_0 \gg \omega - \omega_0$ 时, 使用旋波近似^[32-33], 并忽略掉高频项, 此时公式(13)可以重新表示为:

$$\dot{c}_g = -\frac{Ae^{-i(\omega-\omega_0)t}}{2\sqrt{2}} c_e,$$

$$\dot{c}_e = \frac{Ae^{-i(\omega-\omega_0)t}}{2\sqrt{2}} c_g.$$

设置初始条件 $c_g(0) = 1, c_e(0) = 0$, 表明在 $t=0$ 时, 系统处于基态。方程(14)为精确可解系统, 代入初始条件则可得到:

$$c_e(t) = \frac{A}{2\sqrt{2}\omega_r} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)t\right] \sin(\omega_r t), \quad (15)$$

其中 ω_r 为拉比频率和拉比周期 T_r 为:

$$\omega_r = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{A^2}{2}}, \quad T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}, \quad (16)$$

对应的跃迁概率为:

$$P(t) = |c_e|^2 = \frac{A^2}{8\omega_r^2} \sin^2(\omega_r t). \quad (17)$$

根据公式(15),式(16)和式(17),可以得出如下结论:(1)当驱动频率与固有频率相等时,也就是 $\omega = \omega_0 = 2$ 时,系统发生共振,跃迁概率最大值能取到1,即 $\max(P) = 1$,如图2(a)所示。(2)跃迁周期为拉比周期的一半,也就是 $T = \pi/\omega_r$ 。并且当共振时,跃迁周期可以化简为 $T = 2\sqrt{2}\pi/A$,它随着磁场梯度 A 的增大而减小,如图2(b)所示。(3)跃迁概率对应驱动频率的半高全宽为 $\sqrt{2}A$,即半高全宽随着磁场梯度 A 的增大而增大,如图2(a)所示。

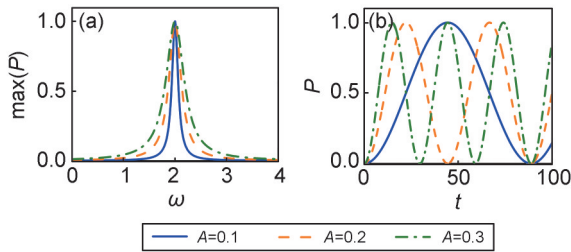


图2 在线性情况下,对不同的磁场强度 A ,跃迁概率的最大值与驱动频率的函数关系(a),跃迁概率随时间的演化结果(b)
Fig. 2 In the linear regime, dependence of the maximum value of the transition probability on the driving frequency (a), and the evolution of the transition probability with time (b) for different magnetic field intensities A

3 非线性情况下的数值解

在这一节将通过数值方法来研究非线性效应对基态和激发态间转换的影响。首先,采用虚时演化方法来获取非线性系统的基态,并以此作为 $t=0$ 时初始态,然后进行实时间演化。注意,在这个演化的过程中保持总粒子数不变,即 $N = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^\dagger \Psi dx = 1$ 。对于弱的非线性,例如 $g=0.1$,在线性共振条件下($\omega = \omega_0 = 2$),对应的粒子数密度随时间演化如图3所示。可以看到,在初始时刻,基态布居在 ψ_2 上。当 $t=44$ 时所有粒子都从 ψ_2 跃迁到 ψ_1 上,即系统从基态 Ψ_g 转变为激发态 Ψ_e 。之后在 $t=88$ 时,所有粒子都从 ψ_1 跃迁到 ψ_2 上,返回

到基态。如此往复,形成基态和激发态间的拉比振荡,其中跃迁周期约为88。它近似等于在线性情况下的跃迁周期 $T = 2\sqrt{2}\pi/A = 88.56$ 。在弱非线性情况的这个结果与线性的结果类似。应该说明的是,在这种情况下,系统的共振点或固有频率(即基态和激发态能级的差)与线性的情况基本一致。

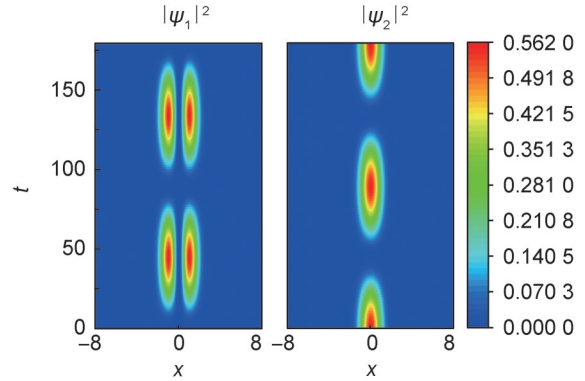


图3 在非线性共振条件下,粒子数密度随时间的演化图,其中参数为 $A=0.1, \omega=2, g=0.1$

Fig. 3 Under the nonlinear resonant condition, the evolution of particle number density with time, where the parameters are taken as $A=0.1, \omega=2, g=0.1$

然而,随着非线性系数 g 的增大,发现非线性系统的共振点 ω_0 会发生偏移,并且在共振条件 $\omega = \omega_0$ 下,最大跃迁概率也会逐渐降低,如图4所示。从图4(a),可以看到,随着粒子间排斥相互作用的增大,非线性系统的固有频率降低。而粒子间吸引相互作用的增大导致它的固有频率的数值增大。从中可以得到,当非线性参数 g 的绝对值较小时,系统的共振点与线性情况近似相等。例如当 $g=0.1$,相应的固有频率为 $\omega_0 = 1.995 \approx 2$,如图3所示。另外,从图4(b)中也发现,非线性相互作用的存在会影响粒子在基态能级和激发态能级之间的跃迁概率。当非线性系数的取值在 $-0.4 \sim 0.4$ 之间时,其在共振条件下的跃迁概率可达到1。

然而,当非线性系数的取值超出了这个范围,跃迁概率大幅度地降低,如图4(b)所示。图4(c)给出了当 $g=0.8$ 时,粒子数密度的演化图。可以看到,随着时间演化粒子数仍呈现出周期振荡的形式,但是初始时刻布居在 ψ_2 上的粒子经过演化在 $t=50$ 时没有完全跃迁到 ψ_1

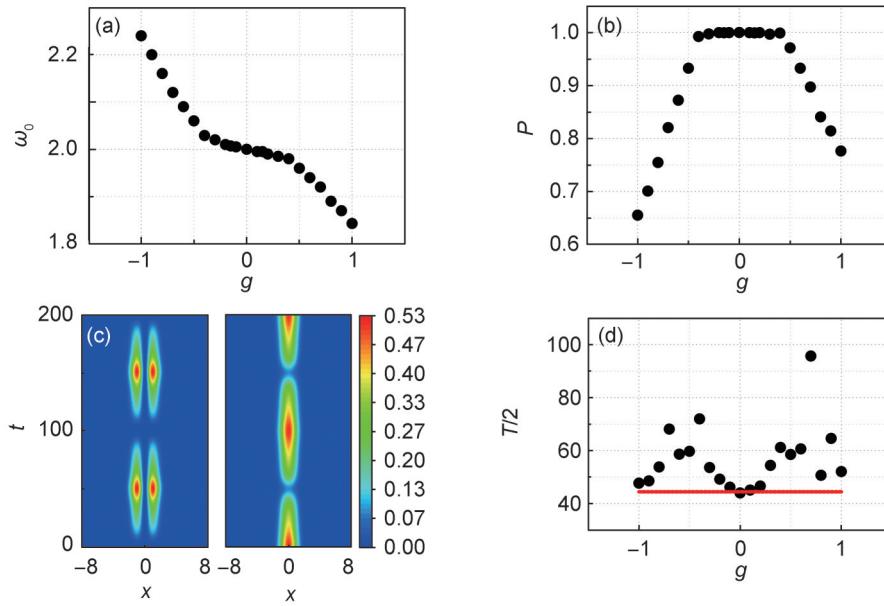
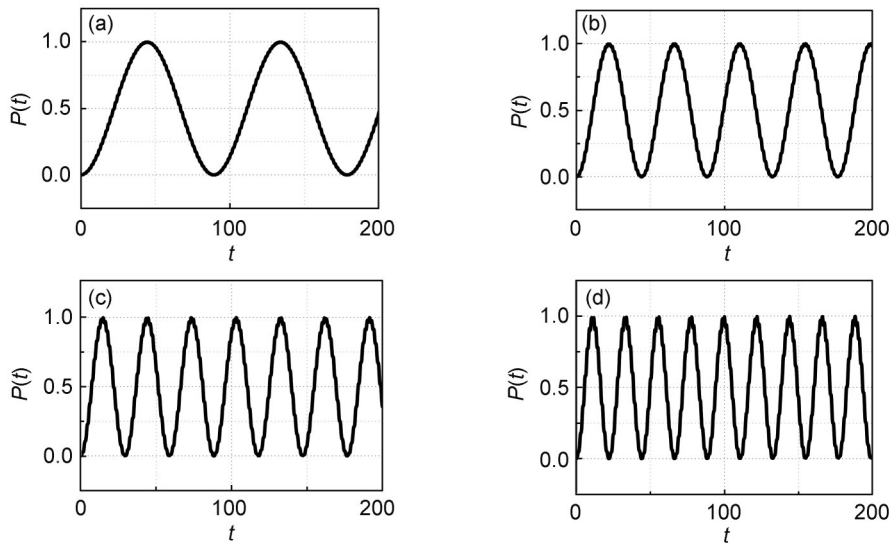


图4 非线性系数 g 对两组分系统的影响

(a) 非线性系统的固有频率 ω_0 和(b) 共振条件下的跃迁概率 P 随非线性系数 g 的变化,其中 $A=0.1$, (c) 粒子数密度的演化图, $g=0.8$, (d) 跃迁周期与非线性系数 g 的依赖关系

Fig. 4 The influence of the nonlinear coefficient g on a two-component system

The dependence of (a) the inherent frequency ω_0 and (b) the transition probability P on the nonlinear coefficient g , where $A=0.1$, (c) the evolution plot of the particle number density as $g=0.8$, and (d) the dependence of the transition period on the nonlinear coefficient g



注:(a) $A=0.1$, (b) $A=0.2$, (c) $A=0.3$, (d) $A=0.4$ 。这里 $g=0.1, \omega_0=1.995$ 。

图5 在共振条件下,不同磁场强度的跃迁概率随时间的演化

Fig. 5 Under the resonance condition, the evolution of the transition probabilities with time for different magnetic field strengths

上,此时粒子在基态能级和激发态能级之间的跃迁概率不能达到1,所以两能级之间无法实现完全跃迁。

此外,非线性系数 g 的增大也影响着跃迁周期。图4(d)给出了跃迁周期和非线性系数 g

的依赖关系。从中发现,其中当 $|g| < 0.2$,跃迁周期近似地等于线性的结果。但是当非线性系数的取值超出了这个范围时,跃迁周期发生了很大的变化。

最后,讨论磁场强度对基态和激发态间转

换的影响。图 5 给出了在共振条件下,不同磁场强度的跃迁概率随时间的演化图。从中看到,跃迁周期与磁场强度 A 数值上成反比,这个结果与线性的结果类似。不同的是,对大的磁场强度,图 5 中的跃迁概率随时间的演化曲线有一些小波动,这是因为数值上存在的高频项所致,如图 5(c)和 5(d)所示。而对弱的磁场强度,跃迁概率随时间的演化曲线更光滑,这表明数值上存在的高频项是一些可以忽略的小量。事实上,在线性情况下利用旋波近似舍去了高频项,所以线性情况下跃迁概率随时间的演化图更光滑,如图 2(b)所示。

4 结论

研究表明,在两组分玻色-爱因斯坦凝聚体中,利用周期梯度磁场产生的拉比振荡能够将基态原子转移到激发态上。在本文中,通过应用旋波近似,拉比振荡的周期、共振点以及跃迁概率被解析求解,并且与非线性较弱时的数值模拟结果一致。由于旋波近似忽略了高频项,因此数值模拟中出现的高频波动无法被解释。本文仅考虑了特定激发态与基态之间的拉比振荡。在未来的研究中,我们将通过调整周期梯度磁场,实现更高激发态与基态之间的拉比振荡,为实验上激发态的制备提供理论支持。

参考文献:

- [1] MATTHEWS M R, ANDERSON B P, HALJAN P C, *et al.* Watching a Superfluid Untwist Itself: Recurrence of Rabi Oscillations in a Bose-einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 1999, **83**(17): 3358–3361. DOI: 10.1103/physrevlett.83.3358.
- [2] NICKLAS E, STROBEL H, ZIBOLD T, *et al.* Rabi Flopping Induces Spatial Demixing Dynamics[J]. *Phys Rev Lett*, 2011, **107**(19): 193001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.193001.
- [3] HAMNER C, ZHANG Y P, CHANG J J, *et al.* Phase Winding a Two-component Bose-Einstein Condensate in an Elongated Trap: Experimental Observation of Moving Magnetic Orders and Dark-bright Solitons[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **111**(26): 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.264101.
- [4] WANG Y X, TANG J J, ZHOU B Q, *et al.* Rabi Oscillation of Spin-polarized Rubidium in the Spin-exchange Relaxation-free Regime[J]. *Opt Express*, 2022, **30**(19): 35071–35084. DOI: 10.1364/OE.471475.
- [5] PAGEL Z, ZHONG W C, PARKER R H, *et al.* Symmetric Bloch Oscillations of Matter Waves[J]. *Phys Rev A*, 2020, **102**(5): 053312. DOI: 10.1103/physreva.102.053312.
- [6] PAN S Z, HU C X, ZHANG W B, *et al.* Rabi Oscillations in a Stretching Molecule[J]. *Light Sci Appl*, 2023, **12**: 35. DOI: 10.1038/s41377-023-01075-9.
- [7] LIU G H, ZHANG X L, ZHANG X, *et al.* Spin-orbit Rabi Oscillations in Optically Synthesized Magnetic Fields[J]. *Light Sci Appl*, 2023, **12**(1): 205. DOI: 10.1038/s41377-023-01238-8.
- [8] WILLIAMS J, WALSER R, COOPER J, *et al.* Excitation of a Dipole Topological State in a Strongly Coupled Two-component Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev A*, 2000, **61**(3): 033612. DOI: 10.1103/physreva.61.033612.
- [9] PARK Q H, EBERLY J H. Nontopological Vortex in a Two-component Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev A*, 2004, **70**(2): 021602. DOI: 10.1103/physreva.70.021602.
- [10] KASAMATSU K, TSUBOTA M, UEDA M. Vortex Molecules in Coherently Coupled Two-component Bose-Einstein Condensates[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **93**(25): 250406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.250406.
- [11] SUSANTO H, KEVREKIDIS P G, MALOMED B A, *et al.* Effects of Time-periodic Linear Coupling on Two-component Bose - Einstein Condensates in Two Dimensions[J]. *Phys Lett A*, 2008, **372**(10): 1631–1638. DOI: 10.1016/j.physleta.2007.09.073.
- [12] LEE C H. Universality and Anomalous Mean-field Breakdown of Symmetry-breaking Transitions in a Coupled Two-component Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **102**(7): 070401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.070401.
- [13] SABBATINI J, ZUREK W H, DAVIS M J. Phase Separation and Pattern Formation in a Binary Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 2011, **107**(23): 230402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.230402.
- [14] DROR N, MALOMED B A, ZENG J H. Domain Walls and Vortices in Linearly Coupled Systems[J]. *Phys Rev E*, 2011, **84**(4): 046602. DOI: 10.1103/physreve.84.046602.
- [15] BERNIER N R, DALLA TORRE E G, DEMLER E. Unstable Avoided Crossing in Coupled Spinor Condensates[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, **113**(6): 065303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.065303.
- [16] USUI A, TAKEUCHI H. Rabi-coupled Countersuperflow in Binary Bose-Einstein Condensates[J]. *Phys Rev A*, 2015, **91**(6): 063635. DOI: 10.1103/physreva.91.063635.

- [17] SHIBATA K, TORII A, SHIBAYAMA H, *et al.* Interaction Modulation in a Long-lived Bose-Einstein Condensate by Rf Coupling[J]. *Phys Rev A*, 2019, **99**: 013622. DOI: 10.1103/physreva.99.013622.
- [18] CHEN T R, SHIBATA K, ETO Y, *et al.* Faraday Patterns Generated by Rabi Oscillation in a Binary Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev A*, 2019, **100**(6): 063610. DOI: 10.1103/physreva.100.063610.
- [19] STOOFF H T, VliegE N, AL KHAWAJA U. Monopoles in an Antiferromagnetic Bose-einstein Condensate [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, **87**(12): 120407. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.120407.
- [20] PIETILÄ V, MÖTTÖNEN M. Non-abelian Magnetic Monopole in a Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **102**(8): 080403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.080403.
- [21] PIETILÄ V, MÖTTÖNEN M. Creation of Dirac Monopoles in Spinor Bose-einstein Condensates[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **103**(3): 030401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.030401.
- [22] RAY M W, RUOKOKOSKI E, KANDEL S, *et al.* Observation of Dirac Monopoles in a Synthetic Magnetic Field[J]. *Nature*, 2014, **505**(7485): 657–660. DOI: 10.1038/nature12954.
- [23] RAY M W, RUOKOKOSKI E, TIUREV K, *et al.* Observation of Isolated Monopoles in a Quantum Field[J]. *Science*, 2015, **348**(6234): 544–547. DOI: 10.1126/science.1258289.
- [24] LEE W, GHEORGHE A H, TIUREV K, *et al.* Synthetic Electromagnetic Knot in a Three-dimensional Skyrmion [J]. *Sci Adv*, 2018, **4**(3): eaao3820. DOI: 10.1126/sciadv.aao3820.
- [25] TIUREV K, OLLIKAINEN T, KUOPANPORTTI P, *et al.* Three-dimensional Skyrmions in Spin-2 Bose – Einstein Condensates[J]. *New J Phys*, 2018, **20**(5): 055011. DOI: 10.1088/1367-2630/aac2a8.
- [26] LUO H B, LI L, LIU W M. Three-dimensional Skyrmions with Arbitrary Topological Number in a Ferromagnetic Spin-1 Bose-einstein Condensate[J]. *Sci Rep*, 2019, **9**: 18804. DOI: 10.1038/s41598-019-54856-x.
- [27] KAWAGUCHI Y, NITTA M, UEDA M. Knots in a Spinor Bose-einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **100**(18): 180403. DOI: 10.1103/physrevlett.100.180403.
- [28] HALL D S, RAY M W, TIUREV K, *et al.* Tying Quantum Knots[J]. *Nat Phys*, 2016, **12**: 478–483. DOI: 10.1038/nphys3624.
- [29] HE Y Z, JI L J, WANG Y Z, *et al.* Geometric Control of Collective Spontaneous Emission[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(21): 213602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.213602.
- [30] LYUBAROV M, LUMER Y, DIKOPOLTSEV A, *et al.* Amplified Emission and Lasing in Photonic Time Crystals[J]. *Science*, 2022, **377**(6604): 425–428. DOI: 10.1126/science.abo3324.
- [31] KAISER M, GLASER C, LEY L Y, *et al.* Cavity-driven Rabi Oscillations between Rydberg States of Atoms Trapped on a Superconducting Atom Chip[J]. *Phys Rev Research*, 2022, **4**(1): 013207. DOI: 10.1103/physrevresearch.4.013207.
- [32] ANN B M, KESSELS W, STEELE G A. Sideband Transitions in a Two-mode Josephson Circuit Driven beyond the Rotating-wave Approximation[J]. *Phys Rev Research*, 2021, **3**(3): 033004. DOI: 10.1103/physrevresearch.3.033004.
- [33] KHEZRI M, OPREMCAK A, CHEN Z J, *et al.* Measurement-induced State Transitions in a Superconducting Qubit: Within the Rotating-wave Approximation [J]. *Phys Rev Applied*, 2023, **20**(5): 054008. DOI: 10.1103/physrevapplied.20.054008.