

玻色-费米混合管中的手性流

王勤勤¹, 周晓凡^{1*}, 贾锁堂²

(1. 山西大学 激光光谱研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 山西 太原 030006;

2. 极端光学协同创新中心, 山西大学, 山西 太原 030006)

摘要: 本文研究了玻色-费米混合管模型中费米子的手性边界流, 在混合管中, 玻色-费米相互作用会引起玻色子和费米子密度的调制, 所以我们重点关注不同的玻色子状态(超流或 Mott 绝缘体)在密度发生微扰时对费米子手性边界流的影响。基于精确对角化和密度矩阵重整化群, 计算了体系基态的费米流序参量。本文发现当玻色子处于超流态时, 玻色-费米相互作用会驱动费米边界流从迈斯纳流变成涡旋真空相分离(V-PS₁)和涡旋满带相分离(V-PS₂)。当玻色子处于 Mott 态时, 玻色-费米相互作用则将迈斯纳流驱动为另一种涡旋相分离(V-PS₃)。最终展示了体系随着相互作用变化的流相图。我们发现的三种新流相丰富了流相的种类, 为进一步研究人造规范场和相互作用共存所诱导的奇异手性流提供了理论支持。

关键词: 手性流; 玻色费米混合系统; 密度矩阵重整化群; 量子相变

中图分类号: O562 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-2395(2025)04-0752-07

Chiral Currents in Bose-Fermi Mixtures Tube

WANG Qinqin¹, ZHOU Xiaofan^{1*}, JIA Suotang²

(1. State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Laser Spectroscopy, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

2. Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: We studied the chiral edge currents of fermions in a Bose-Fermi mixture tube model, where the Bose-Fermi interaction causes the modulation of the density of bosons and fermions. Thus we focused on the influence of different boson states (superfluid or Mott-insulator) on the chiral edge currents of fermions when the density is perturbed. Based on the exact diagonalization and density-matrix renormalization groups, the Fermi currents sequence parameters of the ground state of the system were calculated. We found that when the boson is in a superfluid state, the Bose-Fermi interaction drives the Fermi edge currents from Meissner to vortex vacuum phase separation (V-PS₁) and vortex full-band phase separation (V-PS₂). When the boson is in the Mott-insulator, the Bose-Fermi interaction drives the Meissner currents into another vortex phase separation (V-PS₃). Finally, the currents phase diagram of the system as a function of interaction is shown. The discovery of three new currents phases enriches the variety of currents phases and provides theoretical support for further research on singular chiral currents induced by the coexistence of artificial gauge fields and interactions.

Key words: chiral current; Bose-Fermi mixtures; density-matrix renormalization group; quantum phase transition

收稿日期: 2023-10-20; 接受日期: 2024-02-19

基金项目: 国家自然科学基金(12004230); 山西省“1331工程”重点学科建设计划

作者简介: 王勤勤(1998-), 女, 山西吕梁人, 硕士研究生, 研究方向为冷原子物理。E-mail: 3032980961@qq.com

* 通信作者: 周晓凡(ZHOU Xiaofan), E-mail: zhouxiaofan@sxu.edu.cn

引文格式: 王勤勤, 周晓凡, 贾锁堂. 玻色-费米混合管中的手性流[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2025, 48(4): 752-758. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024037.

0 引言

手性边界流是量子霍尔系统的典型特征^[1-2],它的宏观现象表现为截断体系边界处由磁场引起的回旋运动。我们常常将在超冷原子体系中原子的内态(精细态或超精细态)当作赝自旋^[3-8],然后通过操控激光使自旋内态翻转、动量转移来实现人造规范场^[4-12],从而成功模拟出量子霍尔效应^[13]。霍尔效应的边界流类似于在冷原子体系中只考虑原子的自旋运动产生的效应。在费米子双腿梯子系统中,存在磁通的梯子晶格会出现迈斯纳和涡旋流,其中迈斯纳流是在梯子的边界上与晶格方向相反方向的流^[14-15],涡旋流以局部旋涡的形式出现在梯子的内部和边界上^[16],两种流都具有手性来抵抗外磁场^[17-19],常见于超导体中^[20-22]。一维梯子系统作为实现手性流的最小系统,已经取得了广泛的关注和研究。然而,目前针对手性边界流的研究主要集中在玻色或费米体系中。与单纯的玻色子或费米子系统相比,玻色-费米混合系统的统计性质更加复杂,两种量子统计性质不同的粒子会出现与单组分系统截然不同的量子行为,出现改变玻色-费米混合相互作用、同核/异核及其比重等要素,会使混合量子气体出现诸如相分离^[23-26]或塌缩、铁磁和反铁磁序^[27-28]、分数量子霍尔效应^[29]、FFLO相变(Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state)^[30]、量子涡旋晶格结构^[31]、p-波配对^[32]等新奇物理现象^[22, 33-34]。对玻色-费米混合体系边界流的研究能够使我们更深刻地认识量子多体系统的物理本质。然而,由于玻色子与费米子这两类粒子具有不同的统计性质,对实验操控精度的要求很高,因此,关于玻色-费米混合系统的研究进展十分缓慢,但玻色-费米体系会产生丰富的新奇量子相,而且对混合系统的研究能够让我们更加明晰不同组分系统间的共存方式与作用机制,所以,人们对混合系统的探索一直保持热忱。

为此,本文主要探究玻色-费米混合管中费米子的手性流,考察不同玻色子状态下玻色-费米相互作用对玻色子密度的微扰如何影响费米子的手性流做出定量计算与分析。通过密度矩阵重整化群(Density-matrix Renormalization Group, DMRG)的方法来计算体系基态流序参

量,将计算出的数据进行分析发现玻色子和费米子之间的吸引相互作用和排斥相互作用会促使系统衍生出新的流相,本文结合相变行为分出的相区域定量地描绘出了玻色子与费米子的相互作用以及费米子间的相互作用发生变化形成的流相图。

1 哈密顿量和序参量

基于最近实现的超冷原子实验平台,我们构建双腿梯子费米哈伯德模型与玻色子哈伯德模型组成的玻色-费米混合格点模型(见图1的模型)。通过双光子拉曼过程将费米子基态的超精细态耦合起来,保留两个自旋态,视为不同的晶格,这样将自旋轨道耦合类比为两个链的梯子晶格,使用运动光场、激光辅助跃迁或拉曼光驱动内态耦合实现人造磁通,实现了利用原子内态作为人造维度来模拟磁场下的梯子系统^[35-36]。图1中费米子在晶格上的占据有四种情况,分别是0占据、自旋向上占据、自旋向下占据和自旋向上与自旋向下双占据;玻色子的最大占据数为4,实验中,通过调节激光的振幅改变隧穿系数 t ,调节碱金属Feshbach共振改变相互作用强度 U 。

1.1 哈密顿量

玻色-费米混合管模型的哈密顿量

$$\begin{aligned}
 H = H_1 + H_0 = & \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} [-t_f \hat{c}_{i,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma}] + U_f \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} + \\
 & \frac{\Omega}{2} \sum_i (e^{i\Phi} \hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i\downarrow} + H.c.) + \\
 & \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} [-t_b \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j] + \frac{U_b}{2} \sum_i \hat{n}_{ib}^* (n_{ib} - 1) + \\
 & U_{fb} \sum_i n_{ib}^* (n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow}),
 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\hat{c}_{i,\sigma}$ 为具有自旋分量 σ 的费米子在 i 点的产生算符, j 为与 i 相邻的格点, i 为虚数, $\sigma = \uparrow$ 和 \downarrow , t_f 是费米子隧穿率, U_f 是不同自旋费米子间的相互作用强度。 Ω 和 Φ 分别为自旋翻转跃迁率和磁通。 \hat{b}_i 是位置 i 处的玻色子产生算符,而 t_b 和 U_b 是相应的玻色子隧穿速率和玻色子间相互作用强度。 U_{fb} 是玻色子和费米子的相互作用。

本文利用DMRG方法计算了体系周期性边

界条件下的基态特征。格点链长为 $L=60$, 费米子半填充, 即 $n_f=N_f/L=1$, 玻色子最大占据数为 4。为了保证数值的精确计算, 设置最大态数 300、扫描 20 次, 令 $t_f=t_b=1$ 。

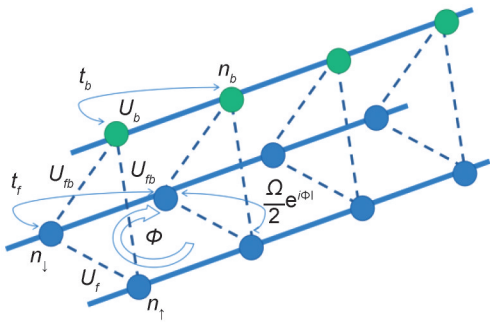


图1 玻色-费米混合管结构图

蓝点代表费米子, 类似于两条链的费米梯子晶格, 两条链分别为自旋向上的费米子链和自旋向下的费米子链, 相邻格点的费米子隧穿率为 t_f , 同一格点费米子间相互作用为 U_f ; 绿点代表玻色子, 相邻格点的玻色子隧穿率为 t_b , 同一格点玻色子间相互作用为 U_b ; 同一格点玻色费米相互作用为 U_{fb} ,

规范势为 Φ , 费米子梯子横档间隧穿速率为 $\frac{\Omega}{2} e^{i\Phi}$ 。

Fig. 1 Illustration of Bose-Fermi tube

The blue dots represent fermions, which are analogous to the Fermi ladder lattice of two chains, the two chains are the spin-up fermion chain and the spin-down fermion chain, the fermion tunneling rate of adjacent lattice points is t_f , and the interaction between fermions at the same lattice point is U_f . The green dot represents the boson, the boson tunneling rate of adjacent lattice points is t_b , and the interaction between bosons of the same lattice point is U_b . The Bose-Fermi interaction at the same lattice point is U_{fb} , the gauge potential is Φ , and the tunneling rate between the rungs of the Fermion ladder is $\frac{\Omega}{2} e^{i\Phi}$.

1.2 流算符

流是描述模型中各种相的关键物理量, 分布在晶格方向和垂直晶格方向流的定义分别为

$$J_{i,\sigma} = i(\hat{c}_{i+1,\sigma}^+ \hat{c}_{i,\sigma} - c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma}),$$

$$J_i^\perp = i \frac{\Omega}{2} (e^{-i\Phi} \hat{c}_{i\downarrow}^+ \hat{c}_{i\uparrow} - e^{-i\Phi} c_{i\uparrow}^+ c_{i\downarrow}). \quad (2)$$

本文用沿着晶格方向和垂直晶格方向流的平均值来表征流的相变, 定义如下,

$$J_\sigma = \frac{1}{L} \sum_i J_{i,\sigma}, J^\perp = \frac{1}{L} \sum_i J_i^\perp. \quad (3)$$

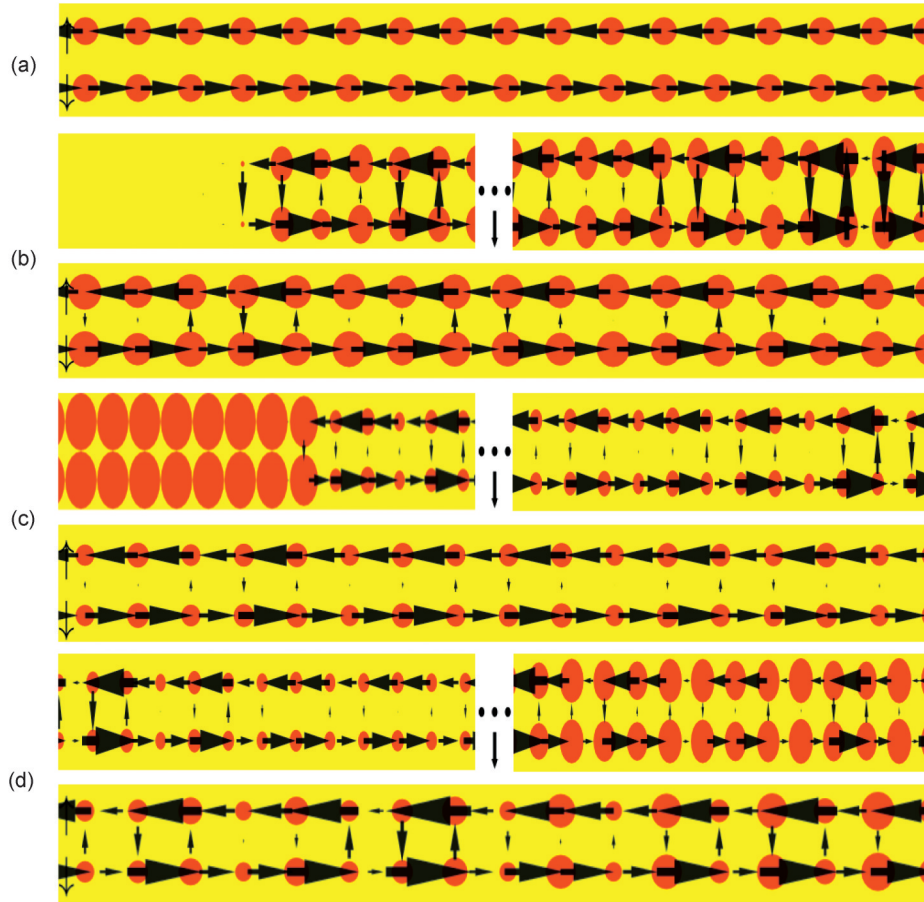
2 手性流

人造规范场费米晶格模型随着规范场强度

和磁通的变化会表现出迈斯纳相和涡旋相。哈密顿量 $H(1)$ 在无相互作用时 ($U_f=U_b=U_{fb}=0$), 费米子会出现迈斯纳相和涡旋相。我们主要关注玻色子状态和玻色-费米相互作用对迈斯纳流的影响。人造规范场参数 $\Omega=4; \Phi=0.5$ 时, 系统处在迈斯纳相。我们首先考虑玻色子处在超流时的情况。当引入弱相互作用时, 体系的流特征不会发生改变。增加较强相互作用 $U_{fb}=2; U_f=5$, 系统仍处在迈斯纳相 [如图 2(a) 所示]。然而, 当引入吸引相互作用 $U_f=-5$ 后, 系统则出现了分离相。由于玻色-费米相互作用为排斥, 费米子之间为吸引, 所以玻色子聚集处 (0-10 格点) 未出现费米子, 在玻色费米排斥作用影响较小的区域 (10-60 格点), 费米子间表现为涡旋相。系统发生相分离, 定义为 V-PS₁ [如图 2(b) 所示]。当玻色-费米相互作用和费米子相互作用均为吸引时, 系统则出现了另一种形式的分离相。玻色-费米间的吸引作用促使玻色子凝聚区域出现了费米子满带分布 (0-10 格点), 由于泡利不相容原理, 0-10 格点上费米子满填充表现为绝缘体没有流, 其余的费米子在 10-60 格点依然形成了涡旋相, 定义为 V-PS₂ [如图 2(c) 所示]。

进一步考察玻色子处在 Mott 相时的情况 (填充率=1, $U_b=10$)。当引入弱相互作用时, 体系的流特征不会发生改变。然而, 当引入强相互作用 $U_{fb}=2; U_f=-5$ 时, 体系表现出涡旋相分离, 定义为 V-PS₃ [如图 2(d) 所示]。

为了清楚地表现玻色-费米相互作用和费米子相互作用对所驱动的手性流相变, 我们展示了玻色子处于超流相时, 系统垂直方向流 J_\perp 随 U_f 和 U_{fb} 变化。首先, 固定玻色-费米相互作用 $U_{fb}=2$, 增大费米子相互作用 U_f , 当 $-8 \leq U_f \leq 1.8$ 时, $J_\perp \neq 0$, 系统处在 V-PS₁ 相, 当 $1.8 \leq U_f \leq 8$ 时, $J_\perp = 0$, 系统为迈斯纳相, 如图 3(a) 所示。其次, 固定费米子相互作用 $U_f=-5$, 增大玻色-费米相互作用 U_{fb} , 当 $U_{fb} < 0$ 时, $J_\perp \neq 0$, 对应的量子相为 V-PS₁; 当 $0 < U_{fb}$ 时, $J_\perp \neq 0$, 对应的量子相为 V-PS₂; 玻色-费米相互作用为排斥和吸引, 系统表现出完全不同的涡旋相分离, 且垂直方向流 J_\perp 的大小关于 $U_{fb}=0$ 对称, 如图 3(b) 所示。通过有限尺寸分析, 可以发现在热力学极限下 (L



注:图中箭头表示流,点表示密度,箭头的方向和粗细代表流的方向和强度,点的大小表示密度的大小,箭头的粗细和点的大小都已经除以当组最大的流或密度归一。

Note: The arrows represent the current, the points represent the density, the direction and thickness of the arrows represent the direction and intensity of the current, the size of the points represents the size of the density, the thickness of the arrows and the size of the points have been divided when the group is the largest current or density normalization.

图2 区分四种相的流图案(a—d)

(a) $U_b=2, U_f=5$; (b) $U_b=2, U_f=-5$; (c) $U_b=-2, U_f=-5$; (a-c) 其他参数 $U_b=0, L=N_f=60, N_b=20$;
 (d) $U_b=2, U_f=-5, U_b=10, L=N_f=N_b=60$. 共有参数 $\Omega=4, \Phi=0.5$

Fig. 2 Four phases (a-d) for distinguishing the current patterns

(a) $U_b=2, U_f=5$; (b) $U_b=2, U_f=-5$; (c) $U_b=-2, U_f=-5$; (a)–(c) other parameters $U_b=0, L=N_f=60, N_b=20$;
 (d) $U_b=2, U_f=-5, U_b=10, L=N_f=N_b=60$. In all subfigure, we have $\Omega=4, \Phi=0.5$

$\rightarrow\infty$)相变点 U_f 与有限尺寸的 U_f 基本相等,不因尺寸变化而消失,如图3(c)所示。

基于上述相变的描述,我们绘制出哈密顿量 $H(1)$ 随着参数 U_f 和 U_b 变化的手性流相图,如图(4)所示。通过相图可以看出相互作用对系统的影响。在玻色子处于超流状态时,系统在弱玻色-费米相互作用且费米子间为吸引时处于迈斯纳相[如图4(a)所示]。随着排斥玻色-费米相互作用 U_b 的增强,系统出现了涡旋真空相分离(V-PS₁),随着吸引玻色-费米相互

作用 U_b 的增强,系统出现了涡旋满带相分离(V-PS₂)[如图4(a)所示]。排斥费米相互作用 U_f 会驱动系统趋向于迈斯纳相[如图4(a)所示]。当玻色子处于Mott态时,系统在弱玻色-费米相互作用 U_b 且费米子间为排斥相互作用时依然处于迈斯纳相,相互作用 U_b 增强时,系统呈现涡旋相分离(V-PS₃),如图4(b)所示。

3 结论

本文研究一维玻色-费米混合管中的人造

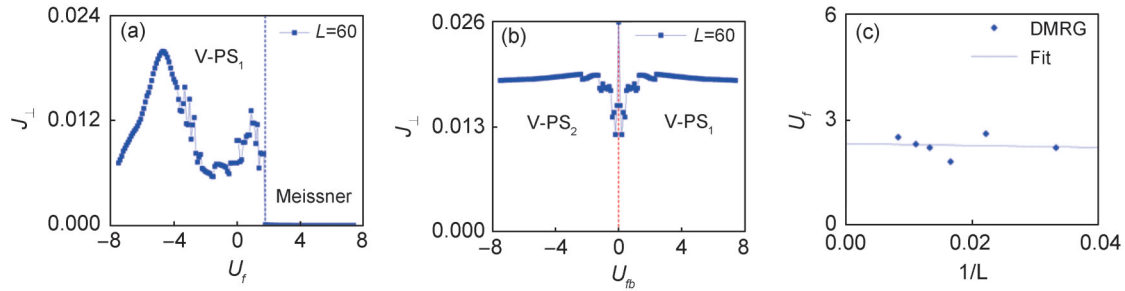


图3 不同相互作用下的流相

(a) $U_{fb}=2$ 时垂直方向流 J_{\perp} 随 U_f 变化; (b) $U_f=-5$ 时垂直方向流 J_{\perp} 随 U_{fb} 变化; (c) 有限尺寸分析, $L=30, 45, 60, 75, 90, 120$

Fig. 3 Current phases in various interactions

(a) The phase-diagram of chiral currents J_{\perp} with U_f when $U_{fb}=2$; (b) the phase-diagram of chiral currents J_{\perp} with U_{fb} when $U_f=-5$; (c) finite size analysis of J_{\perp} , $L=30, 45, 60, 75, 90, 120$

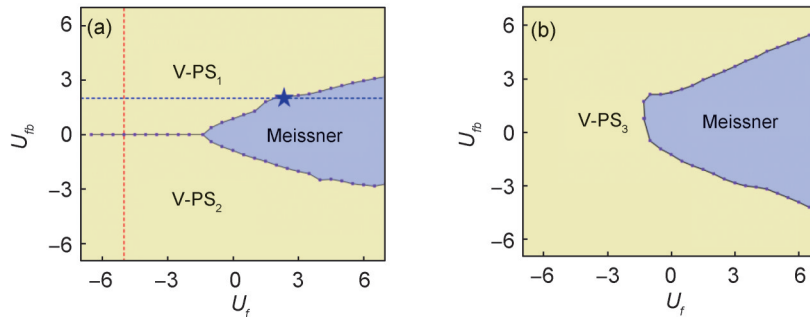


图4 U_f-U_{fb} 平面的相图

(a) $U_b=0, N_b=20$; (b) $U_b=10, N_b=60$; 共有参数 $L=60$ 。Meissner表示迈斯纳相, V-PS₁, V-PS₂和V-PS₃表示三种不同类型的涡旋相分离相。

Fig. 4 The phase-diagram between U_f and U_{fb}

(a) $U_b=0, N_b=20$; (b) $U_b=10, N_b=60$; In all subfigure, we have $L=60$. Meissner represents Meissner phase, V-PS₁, V-PS₂ and V-PS₃ represent three different vortex phase with phase-separation.

规范场驱动的费米子流与玻色子的状态以及玻色-费米的相互作用的关系。我们利用密度矩阵重整化群方法,计算体系基态流序参量。玻色子处于不同状态、玻色-费米相互作用的改变促使系统出现V-PS₁、V-PS₂、V-PS₃三种不同类型的涡旋相分离相。我们的研究拓展了玻色-费米混合系统下手性流的种类,丰富了一维光晶格中超冷原子气体的奇异量子相。

参考文献:

- [1] STUHL B K, LU H I, AYCOCK L M, *et al.* Visualizing Edge States with an Atomic Bose Gas in the Quantum Hall Regime[J]. *Science*, 2015, **349**(6255): 1514-1518. DOI: 10.1126/science.aaa8515.
- [2] CAO B, GRASS T, SOLOMON G, *et al.* Optical Flux Pump in the Quantum Hall Regime[J]. *Phys Rev B*, 2021, **103**(24): L241301. DOI: 10.1103/physrevb.103.L241301.
- [3] LANGE F, EJIMA S, FUJIMOTO J, *et al.* Generation of Current Vortex by Spin Current in Rashba Systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **126**(15): 157202. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.157202.
- [4] GALITSKI V, SPIELMAN I B. Spin-Orbit Coupling in Quantum Gases[J]. *Nature*, 2013, **494**: 49-54. DOI: 10.1038/nature11841.
- [5] ZHAI H. Degenerate Quantum Gases with Spin-orbit Coupling: a Review[J]. *Rep Prog Phys*, 2015, **78**(2): 026001. DOI: 10.1088/0034-4885/78/2/026001.
- [6] WANG P J, YU Z Q, FU Z K, *et al.* Spin-orbit Coupled Degenerate Fermi Gases[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, **109**(9): 095301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.095301.
- [7] CHEUK L W, SOMMER A T, HADZIBABIC Z, *et al.* Spin-injection Spectroscopy of a Spin-orbit Coupled Fermi Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, **109**(9): 095302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.095302.
- [8] LIN Y J, JIMÉNEZ-GARCÍA K, SPIELMAN I B. Spin-Orbit-coupled Bose-Einstein Condensates[J]. *Nature*,

- 2011, **471**(7336): 83–86. DOI: 10.1038/nature09887.
- [9] KOLKOWITZ S, BROMLEY S L, BOTHWELL T, *et al.* Spin-orbit-coupled Fermions in an Optical Lattice Clock[J]. *Nature*, 2017, **542**(7639): 66–70. DOI: 10.1038/nature20811.
- [10] CAMPBELL S L, HUTSON R B, MARTI G E, *et al.* A Fermi-degenerate Three-dimensional Optical Lattice Clock[J]. *Science*, 2017, **358**(6359): 90–94. DOI: 10.1126/science.aam5538.
- [11] MANCINI M, PAGANO G, CAPPELLINI G, *et al.* Observation of Chiral Edge States with Neutral Fermions in Synthetic Hall Ribbons[J]. *Science*, 2015, **349**(6255): 1510–1513. DOI: 10.1126/science.aaa8736.
- [12] CELI A, MASSIGNAN P, RUSECKAS J, *et al.* Synthetic Gauge Fields in Synthetic Dimensions[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, **112**(4): 043001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.043001.
- [13] SEDOV D D, SHIROBOKOV V, IORSH I V, *et al.* Cavity-induced Chiral Edge Currents and Spontaneous Magnetization in Two-dimensional Electron Systems [J]. *Phys Rev B*, 2022, **106**(20): 205114. DOI: 10.1103/physrevb.106.205114.
- [14] LIVI L F, CAPPELLINI G, DIEM M, *et al.* Synthetic Dimensions and Spin-orbit Coupling with an Optical Clock Transition[J]. *Phys Rev Lett*, 2016, **117**(22): 220401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.220401.
- [15] ATALA M, AIDELSBURGER M, LOHSE M, *et al.* Observation of Chiral Currents with Ultracold Atoms in Bosonic Ladders[J]. *Nat Phys*, 2014, **10**: 588–593. DOI: 10.1038/nphys2998.
- [16] JENSEN K, ZUGENMAIER M, ARNBAK J, *et al.* Detection of Low-conductivity Objects Using Eddy Current Measurements with an Optical Magnetometer[J]. *Phys Rev Research*, 2019, **1**(3): 033087. DOI: 10.1103/physrevresearch.1.033087.
- [17] PIRAUD M, HEIDRICH-MEISNER F, MCCULLOCH I P, *et al.* Vortex and Meissner Phases of Strongly Interacting Bosons on a Two-leg Ladder[J]. *Phys Rev B*, 2015, **91**(14): 140406. DOI: 10.1103/physrevb.91.140406.
- [18] BUSER M, HUBIG C, SCHOLLWÖCK U, *et al.* Interacting Bosonic Flux Ladders with a Synthetic Dimension: Ground-state Phases and Quantum Quench Dynamics[J]. *Phys Rev A*, 2020, **102**(5): 053314. DOI: 10.1103/physreva.102.053314.
- [19] KIEFER-EMMANOUILIDIS M, SIRKER J. Current Reversals and Metastable States in the Infinite Bose-Hubbard Chain with Local Particle Loss[J]. *Phys Rev A*, 2017, **96**(6): 063625. DOI: 10.1103/physreva.96.063625.
- [20] TITVINIDZE I, SNOEK M, HOFSTETTER W. Supersolid Bose-fermi Mixtures in Optical Lattices[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **100**(10): 100401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.100401.
- [21] HÉBERT F, BATROUNI G G, ROY X, *et al.* Supersolids in One-dimensional Bose-fermi Mixtures[J]. *Phys Rev B*, 2008, **78**(18): 184505. DOI: 10.1103/physrevb.78.184505.
- [22] LEWENSTEIN M, SANTOS L, BARANOV M A, *et al.* Atomic Bose-fermi Mixtures in an Optical Lattice [J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **92**(5): 050401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.050401.
- [23] BÜCHLER H P, BLATTER G. Supersolid versus Phase Separation in Atomic Bose-Fermi Mixtures[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **91**(13): 130404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.130404.
- [24] LEWENSTEIN M, SANTOS L, BARANOV M A, *et al.* Atomic Bose-fermi Mixtures in an Optical Lattice [J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **92**(5): 050401. DOI: 10.1103/physrevlett.92.050401.
- [25] POLLET L, TROYER M, VAN HOUCKE K, *et al.* Phase Diagram of Bose-fermi Mixtures in One-dimensional Optical Lattices[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, **96**(19): 190402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.190402.
- [26] NING W Q, GU S J, CHEN Y G, *et al.* Concurrence and Fidelity of a Bose-fermi Mixture in a One-dimensional Optical Lattice[J]. *J Phys Condens Matter*, 2008, **20**(23): 235236. DOI: 10.1088/0953-8984/20/23/235236.
- [27] QUINTEIRO ROSEN G F, TAMBORENEA P I, KUHN T. Interplay between Optical Vortices and Condensed Matter[J]. *Rev Mod Phys*, 2022, **94**(3): 035003. DOI: 10.1103/revmodphys.94.035003.
- [28] DEURETZBACHER F, BECKER D, BJERLIN J, *et al.* Spin-chain Model for Strongly Interacting One-dimensional Bose-fermi Mixtures[J]. *Phys Rev A*, 2017, **95**(4): 043630. DOI: 10.1103/physreva.95.043630.
- [29] ZENG T S. Fractional Quantum Hall Effect of Bose-fermi Mixtures[J]. *Phys Rev B*, 2021, **103**(20): L201118. DOI: 10.1103/physrevb.103.l201118.
- [30] SINGH M, ORSO G. Enhanced Visibility of the Fulde-Ferrel-Larkin-Ovchinnikov State in One-dimensional Bose-fermi Mixtures near the Immiscibility Point[J]. *Phys Rev Research*, 2020, **2**(2): 023148. DOI: 10.1103/physrevresearch.2.023148.
- [31] XU Z F, LI X P, ZOLLER P, *et al.* Spontaneous Quantum Hall Effect in an Atomic Spinor Bose-fermi Mixture[J]. *Phys Rev Lett*, 2015, **114**(12): 125303. DOI:

- 10.1103/PhysRevLett.114.125303.
- [32] KLIRONOMOS F D, TSAI S W. Pairing and Density-wave Phases in Boson-fermion Mixtures at Fixed Filling[J]. *Phys Rev Lett*, 2007, **99**(10): 100401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.100401.
- [33] GÜNTER K, STÖFERLE T, MORITZ H, *et al.* Bose-fermi Mixtures in a Three-dimensional Optical Lattice [J]. *Phys Rev Lett*, 2006, **96**(18): 180402. DOI: 10.1103/physrevlett.96.180402.
- [34] MERING A, FLEISCHHAUER M. One-dimensional Bose-fermi-Hubbard Model in the Heavy-fermion Limit [J]. *Phys Rev A*, 2008, **77**(2): 023601. DOI: 10.1103/physreva.77.023601.
- [35] CALVANESE STRINATI M, CORNFELD E, ROSSINI D, *et al.* Laughlin-like States in Bosonic and Fermionic Atomic Synthetic Ladders[J]. *Phys Rev X*, 2017, **7**(2): 021033. DOI: 10.1103/physrevx.7.021033.
- [36] HAN Z Y, KIM K S, KIVELSON S A, *et al.* Two-fluid Theory of Composite Bosons and Fermions and the Quantum Hall Proximity Effect[J]. *Phys Rev B*, 2023, **108**(19): 195117. DOI: 10.1103/physrevb.108.195117.