山西大学学报(自然科学版)48(4):692－699,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024053

G-链连续点和G-极限跟踪性

冀占江[1,2],陈占和[3*],刘海林[4]
(1.梧州学院 科学研究院应用数学研究团队,广西 梧州 543002;
2.梧州学院 广西机器视觉与智能控制重点实验室,广西 梧州 543002;
3.广西大学 数学与信息科学学院,广西 南宁 543004;
4.江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000)

摘　要:在度量G-空间中介绍了G-链连续点和G-极限跟踪性的概念,利用等价映射和交换群的性质,研究了G-链连续点和G-极限跟踪性的动力学性质,得到如下结果:(1)在度量G-空间中给出X中每个点是G-链连续点等价条件:映射f是G-等度连续的并且f具有G-跟踪性;(2)G-扩张性和G-跟踪性蕴涵G-极限跟踪性。这些结果丰富了度量G-空间中G-链连续点和G-极限跟踪性的理论。

关键词:G-等度连续;G-链连续点;G-扩张性;G-极限跟踪性;G-跟踪性
中图分类号:O189.11　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2025)04-0692-08

G-chain Continuous Point and *G*-limit Shadowing Property

JI Zhanjiang[1,2], CHEN Zhanhe[3*], LIU Hailin[4]
(1. *Applied Mathematics Research Team of the Research Academy of Science, Wuzhou University, Wuzhou* 543002*, China;*
2. *Guangxi Key Laboratory of Machine Vision and Intelligent Control, Wuzhou University, Wuzhou* 543002*, China;*
3. *College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning* 543004*, China;*
4. *School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou* 341000*, China*)

Abstract: We introduced the concepts of G-chain continuous poin and G-limit shadowing property in metric G-space. By using the properties of equivariant map and commutative group, we studied the dynamical properties of G-chain continuous poin and G-limit shadowing property, and obtained the following results. (1)The equivalent condition is given for every point to be G-chain continuous. That is, the map f is G-equicontinuous and has G-shadowing property in metric G-space; (2) G-expansivity and G-shadowing property imply G-limit shadowing property. These results enrich the theory of G-chain continuous point and G-limit shadowing property in metric G-space.

Key words: G-equicontinuity; G-chain continuous point; G-expansivity; G-limit shadowing property; G-shadowing property

0　引言

等度连续、扩张性和跟踪性是动力系统研究的重点和热点,在动力系统的发展中起着重要的作用,与系统的混沌和复杂性密切相关,很多学者在不同的空间对它们的动力学性质进行了研究,取得了有价值的研究结果[1-14]。例如,文献[1]研究了$\underline{0}$-平均跟踪和链传递的关系;文献[2]在稠

收稿日期:2023-11-30;**接受日期**:2024-03-26
基金项目:国家自然科学基金(12126415);广西自然科学基金(2020JJA110021);梧州市科技计划项目(2024C03015)
作者简介:冀占江(1985－),男,河南驻马店人,硕士,副教授,主要从事拓扑动力系统的研究。E-mail:1395954261@qq.com
* **通信作者**:陈占和(CHEN Zhanhe),E-mail:czhhxl@gxu.edu.cn
引文格式:冀占江,陈占和,刘海林.G－链连续点和G－极限跟踪性[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(4):692-699. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024053.

密的极小点集的条件下证明了平均跟踪性蕴涵syndetic传递的和弱混合；文献[3]讨论了平均等度连续与平均敏感之间的关系。

本文引入G-等度连续、G-扩张性和G-跟踪性的概念，然后在度量G-空间中对G-等度连续、G-扩张性和G-跟踪性的动力学性质进行了研究，得到如下结果：(1)f具有G-跟踪性且f是G-等度连续的当且仅当X中的每一点都是G-链连续点；(2)若f具有G-跟踪性且f是G-扩张映射，则f具有G-极限跟踪性。这些结果推广了度量空间中链连续点和极限跟踪性的结论，弥补了度量G-空间中G-链连续点和G-极限跟踪性理论的缺失，为其在生物数学、计算数学和计算机等方面的应用提供了理论基础和科学依据。

1 基本概念

定义1[4] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$d(x,y)<\delta$时，$\forall n\in N_+$，$\exists g_n,p_n\in G$，有$d(f^n(g_nx),f^n(p_ny))<\varepsilon$，则称$f$是$G$-等度连续。

定义2[4] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续，$x\in X$。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$，当$d(x,y)<\delta$时，$\forall n\in N_+$，$\exists g_n,p_n\in G$，有$d(f^n(g_nx),f^n(p_ny))<\varepsilon$，则称$x$是$G$-等度连续点。

定义3[5] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续，$C>0$。若$\forall x\neq y\in X$，$\exists n>0$，$\forall g_n,p_n\in G$使得$d(f^n(g_nx),f^n(p_ny))>C$，则称映射f具有G-扩张性，C是G-扩张常数。

定义4[15] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若对任意的$i\geqslant 0$，存在$t_i\in G$使$\lim\limits_{i\to\infty}d(t_if(x_i),x_{i+1})=0$，则称$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$G$-极限伪轨。

定义5[15] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续，$\delta>0$。若对任意的$i\geqslant 0$，存在$t_i\in G$使$d(t_if(x_i),x_{i+1})<\delta$，则称$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$(G,\delta)$－伪轨。

定义6[5] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是f的G－极限伪轨，都存在$y\in X$使得$y$$G$-极限跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$，则称$f$具有$G$-极限跟踪性。

定义7[16] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对f的任意(G,δ)－伪轨$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$，$\exists y\in X$使得$y(G,\varepsilon)$-跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$，则称f具有G-跟踪性。

定义8[16] 设(X,d)是度量空间，G是拓扑群。若映射$\varphi:G\times X\to X$满足

(1)对任意的$x\in X$，有$\varphi(e,x)=x$，其中e为G的单位元；

(2)对任意的$x\in X$以及$g_1,g_2\in G$，有$\varphi(g_1,\varphi(g_2,x))=\varphi(g_1g_2,x)$，则称$(X,G,\varphi)$是度量$G$-空间，简称$(X,d)$是度量$G$-空间。

定义9[16] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若$\forall x\in X$，$\forall g\in G$，有$f(gx)=gf(x)$，则称f是等价映射。

定义10[16] 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若$\forall x\in X$，$\forall g\in G$，$\exists h\in G$使得$f(gx)=hf(x)$，则称f是伪等价映射。

定义11[17] 设G是群，若$\forall g,p\in G$，有$g\cdot p=p\cdot g$，则称G是可交换群。

定义12 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得当$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}(x_0=x)$是$f$的$(G,\delta)$-伪轨时，$\exists y\in X$，$\exists g_i\in G$使得$d(f^i(y),g_ix_i)<\varepsilon$，则称点$x$是$G$-POPT点。

定义13 设(X,d)是度量G-空间，$f:X\to X$连续。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得当$d(x,y)<\delta$且$\{y_i\}_{i=0}^{\infty}(y_0=y)$是$f$的$(G,\delta)$-伪轨时，$\exists z\in X$，$\exists g_i\in G$使得$d(f^i(z),g_iy_i)<\varepsilon$，则称点$x$是$G$-链连续点。

2 若干引理

引理1[18] 设(X,d)是紧致度量G-空间，G是紧致的，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists 0<\delta<\varepsilon$，$\forall g\in G$，若

$d(u,v)<\delta$,则有 $d(gu,gv)<\varepsilon$。

引理2 设(X,d)是紧致度量空间,f:$X\to X$连续,则以下两个条件是等价的:

(1)X中的每一个点都是G-等度连续点;

(2)f是G-等度连续的。

证明 (1)⇒(2)。反证法。若f不是G-等度连续的,则$\exists\varepsilon_0>0$,$\forall n\in N_+$,存在满足$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$的x_n和y_n,$\exists k_n\geqslant 0$,$\forall g,k\in G$使

$$d(f^{k_n}(gx_n),f^{k_n}(ky_n))\geqslant\varepsilon_0。\tag{1}$$

根据X的紧致性知,存在正整数列$\{n_i\}$满足

$$x_{n_i}\to x,y_{n_i}\to y。$$

又$d(x_{n_i},y_{n_i})<\frac{1}{n_i}$,因此可得$x=y$。由题中条件知$x$是$G$-等度连续点,故对$\frac{\varepsilon_0}{2}>0$,$\exists 0<\delta<\frac{\varepsilon_0}{2}$,当$d(x,z)<\delta$时,$\forall n\in N_+$,$\exists g_n,k_n\in G$有

$$d(f^n(g_nz),f^n(k_nx))<\frac{\varepsilon_0}{2}。\tag{2}$$

取$m>0$且满足

$$d(x_m,x)<\delta,d(y_m,x)<\delta,\tag{3}$$

$$d(x_m,y_m)<\frac{1}{m}。$$

由(2)式和(3)式知,$\forall n\in N_+$有

$$d(f^n(g_nx_m),f^n(k_nx))<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

$$d(f^n(g_ny_m),f^n(k_nx))<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

故$\forall n\in N_+$有

$$d(f^n(g_nx_m),f^n(g_ny_m))\leqslant d(f^n(g_nx_m),f^n(k_nx))+d(f^n(k_nx),f^n(g_ny_m))<\varepsilon_0。$$

这与(1)式矛盾,故f是G-等度连续的。

(2)⇒(1) 明显成立。

引理3 设(X,d)是紧致度量G-空间,G是紧致群,f:$X\to X$连续,则X中的每一点都是G-POPT点当且仅当f具有G-跟踪性。

证明 ⇒反证法。若f不具有G-跟踪性,则$\exists\varepsilon_0>0$,$\forall k\in N_+$,$\forall(G,\frac{1}{k})$-伪轨$\{x_i^k\}_{i=0}^{\infty}$,$\forall z\in X$,z都不(G,ε_0)-跟踪$\{x_i^k\}_{i=0}^{\infty}$。由于X是紧致的,取$\{x_0^k\}_{k=1}^{\infty}$收敛于x,即,

$$x_0^k\to x,k\to\infty。$$

易知x是G-POPT点,故对$\frac{\varepsilon_0}{2}>0$,$\exists 0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$,使得对任意$(G,\varepsilon_1)$-伪轨$\{y_i\}_{i=0}^{\infty}(y_0=x)$,$\exists y\in X$,$\exists g_i\in G$使得

$$d(f^i(y),g_ix_i)<\frac{\varepsilon_0}{2}。\tag{4}$$

由引理1知,对$\frac{\varepsilon_1}{2}>0$,$\exists 0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$,当$d(z_1,z_2)<\varepsilon_2$时,$\forall s\in G$,有

$$d(sz_1,sz_2)<\frac{\varepsilon_1}{2}。\tag{5}$$

又f是一致连续的,对$\frac{\varepsilon_2}{2}>0$,$\exists 0<\varepsilon_3<\varepsilon_2$,当$d(z_1,z_2)<\varepsilon_3$时,有

$$d(f(z_1),f(z_2))<\frac{\varepsilon_2}{2}。\tag{6}$$

取 $k_0>0$ 满足

$$\frac{1}{k_0}<\frac{\varepsilon_3}{2}。$$

又 $x_0^k\to x,k\to\infty$,因此 $\exists m>k_0$ 使得

$$d(x_0^m,x)<\frac{1}{k_0}<\varepsilon_3。\tag{7}$$

由(6)式和(7)式知:

$$d(f(x_0^m),f(x))<\frac{\varepsilon_2}{2}。$$

由于 $\{x_i^m\}_{i=0}^{\infty}$ 是 f 的 $(G,\frac{1}{m})$-伪轨,因此 $\exists g_0\in G$ 使得

$$d(g_0f(x_0^m),x_1^m)<\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon_1}{2}。$$

因此可得

$$d(g_0f(x),x_1^m)<d(g_0f(x),g_0f(x_0^m))+d(g_0f(x_0^m),x_1^m)<\varepsilon_1。$$

故 $\{x,x_1^m,x_2^m,\cdots\}$ 是 f 的 (G,ε_1)-伪轨。由(4)知,$\exists y\in X$,$\exists t_i\in G$ 使得

$$d(f^i(y),t_ix_i^m)<\frac{\varepsilon_0}{2},i\geqslant 1,\ d(y,t_0x)<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

由(5)式和(7)式知:

$$d(t_0x_0^m,t_0x)<\frac{\varepsilon_1}{2}。$$

因此有

$$d(y,t_0x_0^m)<d(y,t_0x)+d(t_0x,t_0x_0^m)<\varepsilon_0。$$

因此 $y(G,\varepsilon_0)$-跟踪 $\{x_i^m\}_{i=0}^{\infty}$,这与假设矛盾,故 f 具有 G-跟踪性。

$\Leftarrow$ 明显成立。

引理4 设 (X,d) 是紧致度量 G-空间,$f:X\to X$ 伪等价。若 x 是 G-链连续点,则 x 是 G-等度续点,也是 G-POPT 点。

证明 设 x 是 G-链连续点,由定义易知 x 是 G-POPT 点。下证 x 是 G-等度续点。由 x 是 G-链连续点知:$\forall\varepsilon>0$,$\exists 0<\delta<\varepsilon$,当 $d(x,y)<\delta$ 且 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}(x_0=y)$ 是 f 的 (G,δ)-伪轨时,$\exists z\in X$,$\exists g_i\in G$ 使得

$$d(f^i(z),g_ix_i)<\varepsilon。\tag{8}$$

设 $d(x,y)<\delta$,则 $\{f^i(y)\}_{i=0}^{\infty}$ 是 f 的 (G,δ)-伪轨,由(8)式知,$\forall n\geqslant 0$,$\exists z\in X$,$\exists g_n\in G$ 使得

$$d(f^n(z),g_nf^n(y))<\varepsilon。$$

由 f 伪等价知,$\exists p_n\in G$ 使得

$$d(f^n(x),f^n(p_ny))<\varepsilon。$$

取 $t_n=e$,则有

$$d(f^n(t_nx),f^n(p_ny))<\varepsilon。$$

因此 x 是 G-等度续点。

3 主要定理

定理1 设 (X,d) 是紧致度量 G-空间,G 是可交换的紧致群,f 是从 X 到 X 伪等价映射,则以下

两个条件是等价的：

(1)f具有G-跟踪性且f是G-等度连续的；

(2)X中所有点是G-链连续点。

证明 (1)⇒(2)。设f具有G-跟踪性且f是G-等度连续的。由引理1知，对$\forall \varepsilon>0$，$\exists 0<\varepsilon_0<\varepsilon$，当$d(z_1,z_2)<\varepsilon_0$时，$\forall g\in G$，有

$$d(gz_1,gz_2)<\frac{\varepsilon}{2}。\tag{9}$$

由于f是G-等度连续的，因此对$\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，$\exists 0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$，当$d(z_1,z_2)<\varepsilon_1$时，$\forall n\geqslant 0$，$\exists g_n,k_n\in G$使得

$$d(f^n(g_nz_1),f^n(k_nz_2))<\frac{\varepsilon_0}{2}。\tag{10}$$

再由引理1知，对$\frac{\varepsilon_1}{2}>0$，$\exists 0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$，当$d(z_1,z_2)<\varepsilon_2$时，$\forall g\in G$，有

$$d(gz_1,gz_2)<\frac{\varepsilon_1}{2}。\tag{11}$$

由f具有G-跟踪性知，对$\frac{\varepsilon_2}{2}>0$，$\exists 0<\varepsilon_3<\varepsilon_2$，使得当$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$(G,\varepsilon_3)$-伪轨时，$\exists z\in X$，$\exists g_i\in G$使得

$$d(f^i(z),g_ix_i)<\frac{\varepsilon_2}{2}。\tag{12}$$

取$x\in X$。设$d(y,x)<\frac{\varepsilon_3}{2}$且$\{y_i\}_{i=0}^{\infty}(y_0=\mathrm{y})$是$f$的$(G,\varepsilon_3)$-伪轨。由(12)式知，$\exists z\in X$，$\exists t_i\in G$使得

$$d(f^i(z),t_iy_i)<\frac{\varepsilon_2}{2}。\tag{13}$$

特别地，

$$d(z,t_0y_0)<\frac{\varepsilon_2}{2}。$$

由(11)式和$d(x,y_0)<\frac{\varepsilon_3}{2}$知：

$$d(t_0x,t_0y_0)<\frac{\varepsilon_1}{2}。$$

因此有

$$d(t_0x,z)<d(t_0x,t_0y_0)+d(t_0y_0,z)<\varepsilon_1。$$

由(10)式知，$\forall i\geqslant 0$，有

$$d(f^i(g_iz),f^i(k_it_0x))<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

由f是伪等价映射知：$\exists g_i',k_i'\in G$满足

$$d(g_i'f^i(z),k_i'f^i(x))<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

由(11)式和(13)式知：

$$d(g_i'f^i(z),g_i't_iy_i)<\frac{\varepsilon_1}{2}。$$

因此有

$$d(k_i'f^i(x),g_i't_iy_i)<d(k_i'f^i(x),g_i'f^i(z))+d(g_i'f^i(z),g_i't_iy_i)<\varepsilon_0。$$

由(9)式知：

$$d(f^i(x),(k_i')^{-1}g_i't_iy_i)<\varepsilon。$$

则x是G-链连续点。因此X中的每一点都是G-链连续点。

（2）⇒（1）由引理2、引理3、引理4立刻可以得到。

定理2 设(X,d)是紧致度量G-空间，G是可交换的紧致群，$f:X\to X$同胚等价。如果f具有G-跟踪性，并且f是G-扩张映射，那么f具有G-极限跟踪性。

证明 设$C>0$是f的G-扩张常数。由引理1知，$\forall 0<\varepsilon<C$，$\exists 0<\varepsilon_0<\varepsilon$，当$d(x,y)<\varepsilon_0$时，$\forall g\in G$，有

$$d(gx,gy)<\frac{\varepsilon}{2}。\tag{14}$$

由f具有G-跟踪性知，对$\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，$\exists 0<\delta_1<\varepsilon_0$，使得当$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$(G,\delta_1)$-伪轨时，$\exists z\in X$，$\exists t_i\in G$使得

$$d(f^i(z),t_ix_i)<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

设$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是f的极限伪轨，则$\exists g_i\in G$使得

$$\lim_{n\to\infty}d(g_if(x_i),x_{i+1})=0。\tag{15}$$

因此$\exists k_1\in N_+$，当$i\geqslant k_1$时，有

$$d(g_if(x_i),x_{i+1})<\delta_1。$$

故$\{x_i\}_{i=k_1}^{\infty}$是f的(G,δ_1)-伪轨，因此$\exists y_1\in X$，$\exists\{h_i^1\}_{i=k_1}^{\infty}\subset G$，当$i\geqslant k_1$时，有

$$d(f^{i-k_1}(y_1),h_i^1x_i)<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

再由f具有G-跟踪性知，对$\frac{\varepsilon_0}{2^2}>0$，$\exists 0<\delta_2<\varepsilon_0$，使得当$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$是$f$的$(G,\delta_2)$-伪轨时，$\exists z\in X$，$\exists t_i\in G$满足

$$d(f^i(z),t_ix_i)<\frac{\varepsilon_0}{2^2}。$$

由(15)式知，$\exists k_2>k_1$，当$i\geqslant k_2$时，有

$$d(g_if(x_i),x_{i+1})<\delta_2。$$

因此$\{x_i\}_{i=k_2}^{\infty}$是f的(G,δ_2)-伪轨，故$\exists y_2\in X$，$\exists\{h_i^2\}_{i=k_2}^{\infty}\subset G$，当$i\geqslant k_2$时，有

$$d(f^{i-k_2}(y_2),h_i^2x_i)<\frac{\varepsilon_0}{2^2}。$$

如此继续下去，存在严格递增的正整数列$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\exists\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，$\exists\{h_i^n\}_{i=k_n}^{\infty}\subset G$，当$i\geqslant k_n$时，有

$$d(f^{i-k_n}(y_n),h_i^nx_i)<\frac{\varepsilon_0}{2^n}。$$

因此有

$$d(f^{i-k_{n+1}}\circ f^{k_{n+1}-k_n}(y_n),h_i^nx_i)<\frac{\varepsilon_0}{2^n},$$

$$d(f^{i-k_{n+1}}(y_{n+1}),h_i^{n+1}x_i)<\frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}。$$

由(14)式知：

$$d(h_i^{n+1}f^{i-k_{n+1}}\circ f^{k_{n+1}-k_n}(y_n),h_i^{n+1}h_i^nx_i)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$d(h_i^nf^{i-k_{n+1}}(y_{n+1}),h_i^nh_i^{n+1}x_i)<\frac{\varepsilon}{2}。$$

由于G是可交换的，因此当$i\geqslant k_n$时，有

$$d(h_i^{n+1}f^{i-k_{n+1}}\circ f^{k_{n+1}-k_n}(y_n),h_i^n f^{i-k_{n+1}}(y_{n+1}))<$$
$$d(h_i^{n+1}f^{i-k_{n+1}}\circ f^{k_{n+1}-k_n}(y_n),h_i^{n+1}h_i^n x_i)+d(h_i^{n+1}h_i^n x_i,h_i^n f^{i-k_{n+1}}(y_{n+1}))=$$
$$d(h_i^{n+1}f^{i-k_{n+1}}\circ f^{k_{n+1}-k_n}(y_n),h_i^{n+1}h_i^n x_i)+d(h_i^n h_i^{n+1}x_i,h_i^n f^{i-k_{n+1}}(y_{n+1}))<\varepsilon<C。$$

由f是等价映射知：

$$d(f^{i-k_{n+1}}\circ(h_i^{n+1}f^{k_{n+1}-k_n}(y_n)),f^{i-k_{n+1}}(h_i^n y_{n+1}))<C。$$

由于f是扩张常数为$C>0$的G-扩张映射，因此$\forall n\geqslant 1$，有

$$f^{k_{n+1}-k_n}(y_n)=y_{n+1}。\tag{16}$$

又f满射，故$\exists y\in X$使得$f^{k_1}(y)=y_1$，再结合(16)式可得，$\forall n\geqslant 1$，有

$$f^{k_n}(y)=y_n。$$

对于上述$\varepsilon>0$，存在$m>0$满足$\frac{\varepsilon_0}{2^m}<\varepsilon$。当$i\geqslant k_m$时，有

$$d(f^i(y),h_i^m x_i)=d(f^{i-k_m}(y_m),h_i^m x_i)<\frac{\varepsilon_0}{2^m}<\varepsilon。$$

故

$$\lim_{i\to\infty}d(f^i(y),h_i^m x_i)=0。$$

因此f具有G-极限跟踪性。

参考文献：

[1] 汪火云, 曾鹏. 平均伪轨的部分跟踪[J]. 中国科学(数学), 2016, **46**(6): 781-792. DOI: 10.1360/N012014-00256.
WANG H Y, ZENG P. Partial Shadowing of Average-pseudo-orbits[J]. *Sci Sin Math*, 2016, **46**(6): 781-792. DOI: 10.1360/N012014-00256.

[2] NIU Y X. The Average-shadowing Property and Strong Ergodicity[J]. *J Math Anal Appl*, 2011, **376**(2): 528-534. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2010. 11. 024.

[3] LI J, TU S M, YE X D. Mean Equicontinuity and Mean Sensitivity[J]. *Ergod Theory Dyn Sys*, 2014, **35**(8): 2587-2612. DOI: 10. 1017/etds. 2014. 41.

[4] JI Z J. The G-sequence Shadowing Property and G-equicontinuity of the Inverse Limit Spaces Under Group Action[J]. *Open Math*, 2021, **19**: 1290-1298. DOI: 10. 1515/MATH-2021-0102.

[5] JI Z J. G-Expansibility and G-Almost Periodic Point Under Topological Group Action[J]. *Math Probl Eng*, 2021, **2021**: 7326623. DOI:10. 1155/2021/7326623.

[6] 钟玥铧, 汪火云. $\underline{q}$-等度连续点及$\bar{q}$-敏感点[J]. 数学物理学报, 2018, **38**(4): 671-678. DOI:1003-3998(2018)04-671-08.
ZHONG Y H, WANG H Y. $\underline{q}$-equicontinuous Points and $\bar{q}$-sensitive Points[J]. *Acta Math Sci*, 2018, **38**(4): 671-678. DOI:1003-3998(2018)04-671-08.

[7] KULCZYCKI M, KWIETNIAK D, OPROCHA P. On Almost Specification and Average Shadowing Properties [J]. *Fund Math*, 2014, **224**(3): 241-278. DOI:10. 4064/fm224-3-4.

[8] DAS R, DAS T. On Properties of G-expansive Homeomorphisms[J]. *Math Slovaca*, 2012, **62**(3): 531-538. DOI: 10. 2478/ s12175-012-0028-7.

[9] 吴新星. 关于$\bar{d}$一跟踪性质的一些注记[J]. 中国科学(数学), 2015, **45**(3): 273-286. DOI: 10.1360/N012013-00171.
WU X X. Some Remarks $\bar{d}$-shadowing Property[J]. *Sci Sin Math*, 2015, **45**(3): 273-286. DOI: 10.1360/N012013-00171.

[10] OPROCHA P, DASTJERDI D A, HOSSEINI M. On Partial Shadowing of Complete Pseudo Orbits[J]. *J Math Anal Appl*, 2014, **404**: 47-56. DOI: 10. 1016/j. jmaa. 2013. 08. 062.

[11] WANG H Y, XIONG J C, LU J. Everywhere Chaos and Equicontinuity *via* Furstenberg Families[J]. *Adv Math*, 2011, **40**(4): 447-456. DOI: 10. 11845/sxjz. 2011. 40. 04. 0447.

[12] NIU Y X. The Average Shadowing Property and Chaos for Continuous Flows[J]. *J Dyn Sys Geom Theor*, 2017, **15**(2): 99-109. DOI: 10. 1080/1726037X. 2017. 1390190.

[13] WANG L, ZANG J L. Lipschitz Shadowing Property for 1-dimensional Subsystems of Z^K-actions[J]. *J Math Res Appl*, 2021, **41**(6): 615-628. DOI: 10. 3770/j. issn:2095-2651. 2021. 06. 006.

[14] LUO X F, NIE X X, YIN J D. On the Shadowing Prop-

erty and Shadowable Point of Set-valued Dynamical systems[J]. *Acta Math Sin*, 2020, **36**(12): 1384-1394. DOI: 10. 1007/S10114-020-9331-3.

[15] 冀占江, 陈占和, 刘海林. 度量G-空间中的若干G-跟踪性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, **47**(6): 1127-1135. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2023158.
JI Z J, CHEN Z H, LIU H L. Several G-Shadowing Properties in Metric G-spaces[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2024, **47**(6): 1127-1135. DOI: 10.13451/j. sxu. ns.2023158.

[16] AHMADI S A. Invariants of Topological G-conjugacy on G-Spaces[J]. *Math Mora*, 2014, **18**(1): 67-75. DOI: 10. 5937/MatMor1401067A.

[17] BALOGH Z, LAVER V. Unitary Subgroups of Commutative Group Algebras of the Characteristic Two[J]. *Ukr Math J*, 2020, **72**(6): 871-879. DOI: 10. 1007/s11253-020-01829-3.

[18] 冀占江. 群作用下逆极限空间上移位映射的G非游荡点与G链回归点[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2018, **41**(6): 77-81. DOI: 10.7612/j.issn.2096-5281.2018.06.012.
JI Z J. G-nonwandering Points and G-chain Recurrent Points of the Shift Map in the Inverse Limit Spaces of a Topological Group Action[J]. *J Nat Sci Hunan Normal Univ*, 2018, **41**(6): 77-81. DOI: 10.7612/j. issn. 2096-5281.2 018.06.012.