山西大学学报(自然科学版)47(3):571－577,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024062

具有摩擦阻尼的耦合梁-微束传输系统的稳定性

王国兰[1],郝江浩[2]

(1.山西工商学院 计算机信息工程学院,山西 太原 030036;
2.山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006)

摘　要:本文研究了具有摩擦阻尼的边界耦合梁-微束传输系统的稳定性,其中摩擦阻尼仅作用于梁或微束方程上。利用半群方法和乘子方法得了摩擦阻尼分别作用在不同方程上传输系统的稳定性,而且无论摩擦阻尼作用于梁还是微束方程,系统都是指数稳定的。

关键词:梁-微束模型;传输问题;边界耦合;摩擦阻尼;指数稳定

中图分类号:O175.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)03-0571-07

Stability of Coupled Beam-Microbeam Transmission System with Friction Damping

WANG Guolan[1], HAO Jianghao[2]

(1. *School of Computer and Information Engineering, Shanxi Technology and Business University, Taiyuan* 030036, *China;*
2. *School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: In this paper, the stability of beam/microbeam system with boundary coupling of transmission is studied. The system consists of the fourth-order beam equation and the sixth-order microbeam equation, which each contains a damping. By using semigroup method and multiplier method, we prove that the system is exponentially stable, no matter whether friction damping acts on beam equation or microbeam equation.

Key words: beam-microbeam model; transmission issues; boundary coupling; frictional damping; exponentially stable

0　引言

本文考虑了边界耦合的梁-微束传输系统,其中仅有一个方程上施加了摩擦阻尼。该系统表示如下:

$$\begin{cases} y_{tt}+y_{xxxx}+\gamma_1 y_t=0, & (x,t)\in(-1,0)\times(0,\infty), \\ z_{tt}+z_{xxxx}-\beta^2 z_{xxxxxx}-\alpha z_{xx}+\gamma_2 z_t=0, & (x,t)\in(0,1)\times(0,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

边界条件为

收稿日期:2023-12-11;**接受日期**:2024-03-01

基金项目:国家自然科学基金(12271315);山西省高等学校科技创新项目(2023L487;2022L645);山西省教育规划科学“十四五”规划课题(GH-220752)

作者简介:王国兰(1981-),女,山西朔州人,硕士,副教授,研究方向为应用数学。E-mail:794516965@qq.com

引文格式:王国兰,郝江浩.具有摩擦阻尼的耦合梁-微束传输系统的稳定性[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(3):571-577. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024062

$$\begin{cases} y(-1,t)=y_x(-1,t)=0, & t\in(0,\infty), \\ z(1,t)=z_x(1,t)=z_{xx}(1,t)=0, & t\in(0,\infty), \\ z_x(0,t)=0, & t\in(0,\infty), \\ y(0,t)=z(0,t), & t\in(0,\infty), \\ y_{xxx}(0,t)=z_{xxx}(0,t)-\beta^2 z_{xxxxx}(0,t), & t\in(0,\infty), \\ y_{xx}(0,t)=z_{xxt}(0,t), & t\in(0,\infty), \\ \beta^2 z_{xxx}(0,t)=y_{xt}(0,t), & t\in(0,\infty), \end{cases} \tag{2}$$

以及初始条件为

$$\begin{aligned} &y(x,0)=y_0(x), \quad y_t(x,0)=y_1(x), \quad x\in(-1,0); \\ &z(x,0)=z_0(x), \quad z_t(x,0)=z_1(x), \quad x\in(0,1), \end{aligned} \tag{3}$$

其中用 $y=y(x,t)$,$z=z(x,t)$ 分别表示梁和微束在时刻 t 和 x 位置处的位移。$\gamma_i\geqslant 0, i=1,2$ 和 α,β 都是固定的常数。系数 γ_1 和 γ_2 分别表示作用于系统(1)中梁和微束方程上的摩擦阻尼系数,满足 $\gamma_1+\gamma_2>0, \gamma_1\gamma_2=0$。

微束是微机电系统(MEMS)中最常见的结构组件,例如传感器、执行器、谐振器等[1]。关于微束的许多理论研究都是基于经典的连续介质理论。然而,随着研究的深入,传统的连续介质理论已经不能满足我们的要求,因此应该推广到高阶连续介质理论。由 Lam 等在文献[2]中提出的修正应变梯度理论是迄今为止最成功的高阶非经典连续介质理论之一。近年来,许多学者利用这一理论对非经典微束的动力学建模、振动分析和静力分析进行了大量的研究。

Guzmán 等对微束模型做了一些研究,2015 年在文献[3]中研究了单边界控制的微束模型的精确能控性。通过六个边界控制,得到只有控制时间 $T^*>0$,对应的线性方程才是精确可控的。2018 年在文献[4]中讨论了六阶双曲方程模拟微束偏转的内部稳定性,证明了局部分布非线性反馈控制使与挠度有关的能量以指数或多项式形式衰减到零。2020 年在文献[5]中研究了自由夹紧微束偏转的边界稳定性,利用六阶双曲方程模型,设计了一种边界反馈控制,使与挠度相关的能量随时间指数衰减到零,并给出了能量的指数衰减率。其他关于微束的文献请参考[6-7]。

与微束不同,关于梁方程的研究很多,也取得了很多成果。Li 等[8]结合谱分析考虑了一维弦梁耦合系统的长时间行为,其中摩擦阻尼分别只作用在一个方程上。结果表明,如果摩擦阻尼只作用于梁方程,系统以最佳衰减率 t^{-1} 进行多项式衰减。如果摩擦阻尼只在弦方程上起作用,则系统呈指数衰减。另外给出了一些数值模拟验证了这些结果。近期,Gimyong 和 Hakho[9]又扩展了文献[8]。Barraza Martinez 等[10]考虑了一个梁-弦-梁传输问题,其中带有两个结构阻尼或无阻尼梁通过传输条件耦合到带有摩擦阻尼的弦。结果表明,在有摩擦阻尼的情况利用能量法得到系统是指数稳定的,对于无阻尼-阻尼-无阻尼情况,使用频域法和乘子法得到系统也是指数稳定的。从这些结论可以看出,阻尼在系统中起着重要的作用。详情请参考文献[11-13]及其他参考文献。

目前对耦合微束问题稳定性的研究很少,尤其是边界耦合和传输问题,这也是本文的主要贡献。本文利用频域法和乘子法证明了该系统是指数稳定的。然而,由于系统中梁与微束边界之间的耦合,很难得到系统显示的解析解。

本文的结构如下:在第 1 节中,给出了一些符号说明,并将系统(1)—(3)写成了一个抽象的发展方程。第 2 节证明了当摩擦阻尼作用于微束($\gamma_1=0, \gamma_2=1$)上时系统的指数稳定性。在第 3 节中,证明了当摩擦阻尼作用在梁($\gamma_1=1, \gamma_2=0$)上时系统的指数稳定性。

1 符号说明

这里给出一些需要用到的符号。

引入 Hilbert 空间

$$\mathcal{H}_\gamma = H_L^2(-1,0)\times L^2(-1,0)\times H_M^3(0,1)\times L^2(0,1), \tag{4}$$

其中

$$H_L^2(-1,0)=\left\{y\in H^2(-1,0)\,\middle|\,y(-1)=y_x(-1)=0\right\},$$
$$H_M^3(0,1)=\left\{z\in H^3(0,1)\,\middle|\,z(1)=z_x(1)=z_{xx}(1)=0\right\}。$$

相应内积和范数分别为

$$\left\langle Z,\tilde{Z}\right\rangle_{\mathcal{H}_\gamma}=\int_{-1}^{0}(u\overline{\tilde{u}}+y_{xx}\overline{\tilde{y}_{xx}})\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(v\overline{\tilde{v}}+z_{xx}\overline{\tilde{z}_{xx}}+\beta^2 z_{xxx}\overline{\tilde{z}_{xxx}}+\alpha z_x\overline{\tilde{z}_x})\mathrm{d}x, \tag{5}$$

$$\|Z\|_{\mathcal{H}_\gamma}^2=\int_{-1}^{0}(|u|^2+|y_{xx}|^2)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}|v|^2+|z_{xx}|^2+\beta^2|z_{xxx}|^2+\alpha|z_x|^2)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

其中 $Z=(y,u,z,v)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}_\gamma$, $\tilde{Z}=(\tilde{y},\tilde{u},\tilde{z},\tilde{v})^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}_\gamma$。容易验证 $\mathcal{H}_\gamma$ 是一个 Hilbert 空间。

设 $Z=(y,y_t,z,z_t)^{\mathrm{T}}$,以及 $Z_0=(y_0,y_1,z_0,z_1)^{\mathrm{T}}$,系统(1)—(3)可以写成如下的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t)=\mathcal{A}_\gamma Z(t),\\ Z(0)=Z_0,\end{cases} \tag{7}$$

其中无界算子 $\mathcal{A}_\gamma$ 定义为:

$$\mathcal{A}_\gamma=\begin{pmatrix}0 & I & 0 & 0\\ -\partial_{xxxx} & -\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\\ 0 & 0 & -\partial_{xxxx}+\beta^2\partial_{xxxxxx}+\alpha\partial_{xx} & -\gamma_2\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$D(\mathcal{A}_\gamma)=\left\{(y,u,z,v)\in\mathcal{H}_\gamma\,\middle|\,\begin{array}{l}y\in H^4(-1,0),\quad z\in H^6(0,1),\\ u\in H_L^2(-1,0),\quad v\in H_M^3(0,1),\\ z_x(0)=0,\quad y(0)=z(0),\\ y_{xxx}(0)=z_{xxx}(0)-\beta^2 z_{xxxxx}(0),\\ \beta^2 z_{xxx}(0)=u_x(0),\quad y_{xx}(0)=v_{xx}(0)\end{array}\right\}。 \tag{9}$$

可以证明,$\mathcal{A}_\gamma$ 是空间 $\mathcal{H}_\gamma$ 上的一个 m-耗散算子,因此 $\mathcal{A}_\gamma$ 生成一个该空间上的压缩 C_0 半群 $S_\gamma(t)$[14]。

定义系统(1)—(3)的能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(|y_t|^2+|y_{xx}|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(|z_t|^2+|z_{xx}|^2+\beta^2|z_{xxx}|^2+\alpha|z_x|^2)\mathrm{d}x。 \tag{10}$$

2 $\gamma_1=0,\gamma_2=1$ 时系统的指数稳定性

在这一节中,给出了系统(1)—(3)中 $\gamma_1=0,\gamma_2=1$ 时的指数稳定性。首先给出下面的引理。

引理 1[15] 设 $\mathcal{A}$ 是 Hilbert 空间上压缩 C_0- 半群的生成元,则半群 $e^{t\mathcal{A}}$ 是指数稳定的当且仅当

(1) $\mathrm{i}\mathbb{R}\subset\rho(\mathcal{A})$,

(2) $\limsup\limits_{\lambda_n\to\infty}\|(\mathrm{i}\lambda_n-\mathcal{A})^{-1}\|<\infty$。

下面给出这节的主要结果。

定理 1 当 $\gamma_1=0,\gamma_2=1$,和 $Z_0\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ 时,半群 $(S_\gamma(t))_{t\geqslant 0}$ 是指数稳定的。

证明 首先我们来证明引理 1 的条件(1)成立。因为嵌入 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)\subset\mathcal{H}_\gamma$ 是紧的,则算子 $\mathcal{A}_\gamma$ 有一个紧预解式,所以它的谱是离散的。此外我们已知 $0\in\rho(\mathcal{A}_\gamma)$,其中 $\rho(\mathcal{A}_\gamma)$ 是 $\mathcal{A}_\gamma$ 的预解集。因此,只需证明 $\mathcal{A}_\gamma$ 没有纯虚特征值就足够了。设 $b\neq 0$ 是一个实数。假设对于某个 $Z\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$,有

$$\mathcal{A}_\gamma Z=\mathrm{i}bZ, \tag{11}$$

等价为

$$u=\mathrm{i}by,\tag{12}$$

$$-y_{xxxx}=\mathrm{i}bu,\tag{13}$$

$$v=\mathrm{i}bz,\tag{14}$$

$$-z_{xxxx}+\beta^2 z_{xxxxxx}+\alpha z_{xx}-v=\mathrm{i}bv。\tag{15}$$

我们想要得到$Z=0$。式(11)与Z做内积,再取实部可得$v=0$。由式(14)和$b\neq 0$可得$z=0$。将式(12)代入到式(13)中可得

$$-y_{xxxx}=-b^2 y。$$

则上述常微分方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{\sqrt{b}\,x}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{b}\,x}+c_3\mathrm{e}^{\sqrt{b}\,\mathrm{i}x}+c_4\mathrm{e}^{-\sqrt{b}\,\mathrm{i}x},\tag{16}$$

其中$c_i, i=1,2,3,4$是常数。由$y(-1)=y_x(-1)=0$, $y(0)=0$和$y_{xx}(0)=0$代入到式(16)可得$c_1=-c_2=0$和$c_3=-c_4=0$,那么$y=0$和$u=0$就自然可得。因此,我们得到了$Z=0$。根据半群强稳定性[16]或Arendt和Batty[17]说明$\mathcal{A}_\gamma$没有纯虚特征值。因此,我们证明了条件(1)成立。

接下来,使用反证法来证明引理1的条件(2)成立。如果条件(2)不成立,则存在一个序列$\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R}$和$\{W_n=(y_n,u_n,z_n,v_n)^{\mathrm{T}}\}\subset D(\mathcal{A}_\gamma)$且满足$|\lambda_n|\to\infty$和$\|W_n\|_{\mathcal{H}_\gamma}=1$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\|(\mathrm{i}\lambda_n I-\mathcal{A}_\gamma)W_n\|_{\mathcal{H}_\gamma}=0。$$

即有,

$$\text{在空间}H_L^2(-1,0)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n y_n-u_n=f_{1n}\to 0,\tag{17}$$

$$\text{在空间}L^2(-1,0)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n u_n+y_{n,xxxx}=f_{2n}\to 0,\tag{18}$$

$$\text{在空间}H_M^2(0,1)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n z_n-v_n=f_{3n}\to 0,\tag{19}$$

$$\text{在空间}L^2(0,1)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n v_n+z_{n,xxxx}-\beta^2 z_{n,xxxxxx}-\alpha z_{n,xx}+v_n=f_{4n}\to 0。\tag{20}$$

因为$\mathcal{A}_\gamma$是耗散的,可以得到下列估计

$$\mathrm{Re}((\mathrm{i}\lambda_n-\mathcal{A}_\gamma)W_n,W_n)_{\mathcal{H}_\gamma}=-\int_0^1|v_n|^2\mathrm{d}x\to 0。$$

因此,

$$\|v_n\|_{L^2(0,1)}\to 0。\tag{21}$$

由于$z_n\in H^6(0,1)$,则$\|z_{n,xxxx}\|_{L^2(0,1)}$和$\|z_{n,xxxxxx}\|_{L^2(0,1)}$是有界的。根据式(19),式(20)和式(21)可得

$$\|\lambda_n z_n\|_{L^2(0,1)}\to 0,\ \|\lambda_n^{-1}z_{n,xxxx}\|_{L^2(0,1)}\to 0,\ \|\lambda_n^{-1}z_{n,xxxxxx}\|_{L^2(0,1)}\to 0。\tag{22}$$

应用Gagliardo-Nirenberg不等式和式(22)可得

$$\left\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}z_{n,xxx}\right\|_{L^2(0,1)}\leqslant\|\lambda_n^{-1}z_{n,xxxx}\|_{L^2(0,1)}^{\frac{1}{4}}\|\lambda_n z_n\|_{L^2(0,1)}^{\frac{3}{4}}+\left\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}z_n\right\|_{L^2(0,1)}\to 0。\tag{23}$$

进一步有下列估计成立

$$\left\|\lambda_n^{\frac{3}{4}}z_{n,xx}\right\|_{L^2(0,1)}\leqslant\left\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}z_{n,xxx}\right\|_{L^2(0,1)}^{\frac{1}{2}}\|\lambda_n z_n\|_{L^2(0,1)}^{\frac{1}{2}}+\left\|\lambda_n^{\frac{3}{4}}z_n\right\|_{L^2(0,1)}\to 0,\tag{24}$$

$$\left\|\lambda_n^{\frac{2}{3}}z_{n,xx}\right\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant\left\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}z_{n,xxx}\right\|_{L^2(0,1)}^{\frac{1}{3}}\left\|\lambda_n^{\frac{3}{4}}z_{n,xx}\right\|_{L^2(0,1)}^{\frac{2}{3}}+\left\|\lambda_n^{\frac{2}{3}}z_{n,xx}\right\|_{L^2(0,1)}\to 0,\tag{25}$$

$$\left\|\lambda_n^{\frac{7}{8}}z_{n,x}\right\|_{L^2(0,1)}\leqslant\left\|\lambda_n^{\frac{3}{4}}z_{n,xx}\right\|_{L^2(0,1)}^{\frac{1}{2}}\|\lambda_n z_n\|_{L^2(0,1)}^{\frac{1}{2}}+\left\|\lambda_n^{\frac{7}{8}}z_n\right\|_{L^2(0,1)}\to 0。\tag{26}$$

因此通过式(25)可得

$$|z_{n,xx}(0)|\to 0。\tag{27}$$

再根据传输条件 $y_{n,xx}(0)=v_{n,xx}(0)$ 得到 $\left|y_{n,xx}(0)\right|\to 0$。将式(20)代入到式(19),再与 $(1-x)z_{n,x}$ 做内积,使用分部积分和边界条件得到

$$\frac{1}{2}|\lambda_n z_n(0)|^2-\frac{1}{2}\|\lambda_n z_n(x)\|^2_{L^2(0,1)}+\frac{1}{2}|z_{n,xx}(0)|^2-\frac{3}{2}\|z_{n,xx}(x)\|^2_{L^2(0,1)}-\left\langle 2\beta^2 z_{n,xxx}(0),z_{n,xx}(0)\right\rangle-$$
$$\frac{5}{2}\|\beta z_{n,xxx}(x)\|^2_{L^2(0,1)}+\frac{1}{2}|\beta z_{n,xxx}(0)|^2-\left\langle \beta^2 z_{n,xxxx}(0),z_{n,xx}(0)\right\rangle-\frac{1}{2}\alpha\|z_{n,x}(x)\|^2_{L^2(0,1)}-$$
$$\mathrm{Re}\left\langle v_n(x),(1-x)z_{n,x}(x)\right\rangle=$$
$$\mathrm{Re}\left[\left\langle f_{4n}(x),(1-x)z_{n,x}(x)\right\rangle-\mathrm{i}\lambda_n f_{3n}(0)z_n(0)-\left\langle \mathrm{i}f'_{3n}(x),\lambda_n(1-x)z_n(x)\right\rangle+\left\langle \mathrm{i}f_{3n}(x),\lambda_n z_n(x)\right\rangle\right]\leqslant$$
$$\mathrm{Re}\left[\left\langle f_{4n}(x),(1-x)z_{n,x}(x)\right\rangle+\frac{1}{2}|\lambda_n z_n(0)|^2+\frac{1}{2}|f_{3n}(0)|^2-\right.$$
$$\left.\left\langle \mathrm{i}f'_{3n}(x),\lambda_n(1-x)z_n(x)\right\rangle+\left\langle \mathrm{i}f_{3n}(x),\lambda_n z_n(x)\right\rangle\right]。$$

因此,通过式(21)—式(24),式(26)—式(27)和边界条件推得

$$\left|\lambda_n z_n(0)\right|\to 0,\ \left|\beta z_{n,xxx}(0)\right|\to 0\ 。\tag{28}$$

使用传输条件 $y_n(0)=z_n(0)$,$\beta^2 z_{n,xxx}(0)=u_{n,x}(0)$ 和式(28),式(17)得到

$$\left|\lambda_n y_n(0)\right|\to 0,\ \left|y_{n,x}(0)\right|\to 0\ 。\tag{29}$$

将式(18)代入到式(17),再与 $(1+x)y_{n,x}$ 做内积,使用分部积分和边界条件可得

$$-\frac{1}{2}\left|\lambda_n y_n(0)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|\lambda_n y_n(x)\right\|^2_{L^2(-1,0)}+\left\langle y_{n,xxx}(0),y_{n,x}(0)\right\rangle-\frac{1}{2}\left|y_{n,xx}(0)\right|^2+$$
$$\frac{3}{2}\left\|y_{n,xx}(x)\right\|^2_{L^2(-1,0)}-\left\langle y_{n,xx}(0),y_{n,x}(0)\right\rangle=\mathrm{Re}\left[\left\langle f_{2n}(x),(1+x)y_{n,x}(x)\right\rangle+\mathrm{i}\lambda_n f_{1n}(0)y_n(0)-\right.$$
$$\left.\left\langle \mathrm{i}f'_{1n}(x),\lambda_n(1+x)y_n(x)\right\rangle-\left\langle \mathrm{i}f_{1n}(x),\lambda_n y_n(x)\right\rangle\right]。$$

因此,

$$\left\|\lambda_n y_n(x)\right\|_{L^2(-1,0)}\to 0,\ \left\|y_{n,xx}(x)\right\|_{L^2(-1,0)}\to 0\ 。\tag{30}$$

再根据式(17)和式(30)可得

$$\|u_n(x)\|_{L^2(-1,0)}\to 0\ 。\tag{31}$$

因此,通过式(21),式(23),式(30)和式(31),我们得到 $\|W_n\|_{\mathcal{H}_\gamma}\to 0$,这与 $\|W_n\|_{\mathcal{H}_\gamma}=1$ 矛盾。因此,我们证明了引理1的条件(2)。根据引理1可以证明半群 $(S_\gamma(t))_{t\geqslant 0}$ 是指数稳定的。

注1[18] 如果 $Z_0\in\mathcal{H}$。则系统(1)—(3)解的能量渐近衰减到零,即 $E(t)\to 0,\quad t\to\infty$。

这个证明见文献[18]。

3 $\gamma_1=1,\gamma_2=0$ 时系统的指数稳定

在这一节中,我们考虑系统(1)—(3)中 $\gamma_1=1,\gamma_2=0$ 的情况。下面的引理给出了 C_0-半群指数稳定的一个充分条件。

引理2[19] 设 $S(t)$ 是 $\mathcal{H}$ 上的压缩半群且 $\mathcal{A}$ 是它的无穷小生成元。当 $\beta\in\mathbb{R}$ 时,若算子 $I\beta-\mathcal{A}$ 是有界的,即存在 $\lambda>0$ 使得

$$\inf_{\beta\in\mathbb{R}}\left\|(\mathrm{i}\beta-\mathcal{A})U\right\|\geqslant\lambda\|U\|,\quad \forall U\in D(\mathcal{A}),\tag{32}$$

则 $S(t)$ 是指数稳定的。

定理2 当 $\gamma_1=1,\gamma_2=0$ 时,半群 $(S_\gamma(t))_{t\geqslant 0}$ 是指数稳定的。

证明 这个定理的证明过程与定理1的证明过程类似,也将使用反证法证明。假设结论不正确,则存在序列 $\lambda_n\in\mathbb{R}$ 和 $W_n=(y_n,u_n,z_n,v_n)^{\mathrm{T}}\in D(\mathcal{A}_\gamma)$,满足 $|\lambda_n|\to\infty$ 和 $\|W_n\|_{\mathcal{H}_\gamma}=1$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\|(\mathrm{i}\lambda_n I-\mathcal{A}_\gamma)W_n\|_{\mathcal{H}_\gamma}=0\text{ 。}$$

上式可知,

$$\text{在空间}H_L^2(-1,0)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n y_n-u_n=f_{1n}\to 0,\tag{33}$$

$$\text{在空间}L^2(-1,0)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n u_n+y_{n,xxxx}+u_n=f_{2n}\to 0,\tag{34}$$

$$\text{在空间}H_M^2(0,1)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n z_n-v_n=f_{3n}\to 0,\tag{35}$$

$$\text{在空间}L^2(0,1)\text{中},\mathrm{i}\lambda_n v_n+z_{n,xxxx}-\beta^2 z_{n,xxxxxx}-\alpha z_{n,xx}=f_{4n}\to 0\text{。}\tag{36}$$

因为 $\mathcal{A}_\gamma$ 是耗散的,则下式成立

$$\mathrm{Re}((\mathrm{i}\lambda_n-\mathcal{A}_\gamma)W_n,W_n)_{\mathcal{H}_\gamma}=\int_{-1}^0|u_n|^2\mathrm{d}x\to 0\text{ 。}$$

因此,

$$\|u_n\|_{L^2(-1,0)}\to 0\text{ 。}\tag{37}$$

根据式(33)—式(34)得

$$\|\lambda_n y_n\|_{L^2(-1,0)}\to 0,\quad \|\lambda_n^{-1}y_{n,xxxx}\|_{L^2(-1,0)}\to 0\text{ 。}\tag{38}$$

使用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和式(38)得到

$$\|y_{n,xxx}\|_{L^2(-1,0)}\leqslant\|\lambda_n^{-1}y_{n,xxxx}\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{1}{2}}\|\lambda_n y_n\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{1}{2}}+\|y_n\|_{L^2(-1,0)}\to 0\text{ 。}\tag{39}$$

进一步有

$$\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}y_{n,xx}\|_{L^2(-1,0)}\leqslant\|y_{n,xxx}\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{1}{2}}\|\lambda_n y_n\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{1}{2}}+\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}y_n\|_{L^2(-1,0)}\to 0,\tag{40}$$

$$\|\lambda_n^{\frac{2}{3}}y_{n,xx}\|_{L^\infty(-1,0)}\leqslant\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}y_{n,xx}\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{1}{3}}\|\lambda_n^{\frac{3}{4}}y_{n,x}\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{2}{3}}+\|\lambda_n^{\frac{2}{3}}y_{n,x}\|_{L^2(-1,0)}\to 0,\tag{41}$$

这是因为 $\|\lambda_n^{\frac{3}{4}}y_{n,x}\|_{L^2(-1,0)}\leqslant\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}y_{n,xx}\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{1}{2}}\|\lambda_n y_n\|_{L^2(-1,0)}^{\frac{1}{2}}+\|\lambda_n^{\frac{3}{4}}y_n\|_{L^2(-1,0)}\to 0$ 。

则根据式(41)可得

$$|y_{n,x}(0)|\to 0\text{ 。}\tag{42}$$

由 $u_{n,x}(0)=\beta^2 z_{n,xxx}(0)$ 得到

$$|z_{n,xxx}(0)|\to 0\text{ 。}\tag{43}$$

将式(34)代入到式(33),再与 $(1+x)y_{n,x}$ 做内积,使用分部积分和边界条件可得

$$-\frac{1}{2}|\lambda_n y_n(0)|^2+\frac{1}{2}\|\lambda_n y_n\|_{L^2(-1,0)}^2+\langle y_{n,xxx}(0),y_{n,x}(0)\rangle-\langle y_{n,xx}(0),y_{n,x}(0)\rangle+\frac{3}{2}\|y_{n,xx}\|_{L^2(-1,0)}^2-\frac{1}{2}|y_{n,xx}(0)|^2+$$
$$\mathrm{Re}\langle u_n(x),(1+x)y_{n,x}(x)\rangle=\mathrm{Re}\Big[\langle f_{2n}(x),(1+x)y_{n,x}(x)\rangle+\mathrm{i}\lambda_n f_{1n}(0)y_n(0)-$$
$$\langle \mathrm{i}f_{1n}'(x),\lambda_n(1+x)y_n(x)\rangle-\langle \mathrm{i}f_{1n}(x),\lambda_n y_n(x)\rangle\Big]\leqslant\mathrm{Re}\Big[\langle f_{2n}(x),(1+x)y_{n,x}(x)\rangle+\frac{1}{2}|\lambda_n y_n(0)|^2+$$
$$\frac{1}{2}|f_{1n}(0)|^2-\langle \mathrm{i}f_{1n}'(x),\lambda_n(1+x)y_n(x)\rangle-\langle \mathrm{i}f_{1n}(x),\lambda_n y_n(x)\rangle\Big]\text{。}$$

因此,通过式(9),式(37)—式(42)和边界条件得到

$$|\lambda_n y_n(0)|\to 0,\quad |y_{n,xx}(0)|\to 0\text{ 。}\tag{44}$$

再根据传输条件 $y_n(0)=z_n(0)$, $y_{n,xx}(0)=v_{n,xx}(0)$ 和式(44)得到

$$|\lambda_n z_n(0)|\to 0,\quad |z_{n,xx}(0)|\to 0\text{ 。}\tag{45}$$

由于 $W_n\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ 可知 $|z_{n,xxxx}(0)|$ 是有界的。将式(36)代入到式(35)中,然后与 $(1-x)z_{n,x}(x)$ 做内积,使用分部积分,边界条件,式(43)和式(45)推得

$$-\frac{1}{2}|\lambda_n z_n(0)|^2-\frac{1}{2}\|\lambda_n z_n\|_{L^2(0,1)}^2+\frac{1}{2}|z_{n,xx}(0)|^2-\frac{3}{2}\|z_{n,xx}\|_{L^2(0,1)}^2-\frac{1}{2}\alpha\|z_{n,x}\|_{L^2(0,1)}^2-\frac{5}{2}\|z_{n,xxx}\|_{L^2(0,1)}^2-$$
$$2\beta^2 z_{n,xxx}(0)z_{n,xx}(0)-\beta^2 z_{n,xxxx}(0)z_{n,xx}(0)+\frac{1}{2}|\beta z_{n,xxx}(0)|^2=$$

$$\mathrm{Re}\Big[\Big\langle f_{4n}(x),(1-x)z_{n,x}(x)\Big\rangle-\mathrm{i}\lambda_n f_{3n}(0)z_n(0)-\Big\langle \mathrm{i}f_{3n}'(x),\lambda_n(1-x)z_n(x)\Big\rangle+\Big\langle \mathrm{i}f_{3n}(x),\lambda_n z_n(x)\Big\rangle\Big]。$$

因此,

$$\|\lambda_n z_n\|_{L^2(0,1)}\to 0,\quad \|z_{n,xxx}\|_{L^2(0,1)}\to 0。\tag{46}$$

根据式(35)得到

$$\|v_n\|_{L^2(0,1)}\to 0。\tag{47}$$

因此,通过式(37),式(40),式(46)—式(47)可得$\|W_n\|_{H_\gamma}\to 0$,这与$\|W_n\|_{H_\gamma}=1$形成矛盾。因此半群$(S_\gamma(t))_{t\geqslant 0}$是指数稳定的。

参考文献:

[1] YOUNIS M I. MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics[M]. New York: Springer, 2011.

[2] LAM D C C, YANG F, CHONG A C M, *et al*. Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity[J]. *J Mech Phys Solids*, 2003, **51**(8): 1477−1508. DOI: 10.1016/s0022-5096(03)00053-x.

[3] GUZMÁN P, ZHU J M. Exact Boundary Controllability of a Microbeam Model[J]. *J Math Anal Appl*, 2015, **425**(2): 655−665. DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.12.059.

[4] GUZMÁN P. Energy Decay of a Microbeam Model with a Locally Distributed Nonlinear Feedback Control[J]. *J Math Anal Appl*, 2018, **467**(1): 238−252. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.07.006.

[5] GUZMÁN P. Boundary Stabilization of a Microbeam Model[J]. *Math Methods Appl Sci*, 2020, **43**(9): 5979−5984. DOI: 10.1002/mma.6340.

[6] ARIAS G. Stabilization of a Microbeam Model with Distributed Disturbance[J]. *Syst Contr Lett*, 2023, **173**: 105466. DOI: 10.1016/j.sysconle.2023.105466.

[7] FENG B W, CHENTOUF B. Exponential Stabilization of a Microbeam System with a Boundary or Distributed Time Delay[J]. *Math Methods Appl Sci*, 2021, **44**(14): 11613−11630. DOI: 10.1002/mma.7518.

[8] LI Y F, HAN Z J, XU G Q. Explicit Decay Rate for Coupled String-beam System with Localized Frictional Damping[J]. *Appl Math Lett*, 2018, **78**: 51−58. DOI: 10.1016/j.aml.2017.11.003.

[9] HONG G, HONG H. Stabilization of a 1-D Transmission Problem for the Rayleigh Beam and String with Localized Frictional Damping[J]. *J Appl Anal*, 2023, **29**(1): 77−90. DOI: 10.1515/jaa-2021-2082.

[10] BARRAZA MARTINEZ B, HERNANDEZ MONZON J, VERGARA ROLONG G. Exponential Stability of a Damped Beam-string-beam Transmission Problem[J]. *Electron J Differ Eq*, 2022, **2022**: 30. DOI: 10.58997/ejde.2022.30.

[11] HAN Z J, LIU Z Y. Regularity and Stability of Coupled Plate Equations with Indirect Structural or Kelvin-Voigt Damping[J]. *ESAIM Contr Optim Calc Var*, 2019, **25**: 51. DOI: 10.1051/cocv/2018060.

[12] TEBOU L. Energy Decay Estimates for some Weakly Coupled Euler-Bernoulli and Wave Equations with Indirect Damping Mechanisms[J]. *Math Contr Relat Fields*, 2012, **2**(1): 45−60. DOI: 10.3934/mcrf.2012.2.45.

[13] WANG F, WANG J M. Stability of an Interconnected System of Euler-Bernoulli Beam and Wave Equation through Boundary Coupling[J]. *Syst Contr Lett*, 2020, **138**: 104664. DOI: 10.1016/j.sysconle.2020.104664.

[14] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. New York, NY: Springer, 1983. DOI: 10.1007/978-1-4612-5561-1.

[15] GEARHART L. Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Space[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1978, **236**: 385−394. DOI: 10.1090/s0002-9947-1978-0461206-1.

[16] BENCHIMOL C D. A Note on Weak Stabilizability of Contraction Semigroups[J]. *SIAM J Control Optim*, 1978, **16**(3): 373−379. DOI: 10.1137/0316023.

[17] ARENDT W, BATTY C J K. Tauberian Theorems and Stability of One-parameter Semigroups[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1988, **306**(2): 837−852. DOI: 10.1090/s0002-9947-1988-0933321-3.

[18] ABBAS Z, NICAISE S. The Multidimensional Wave Equation with Generalized Acoustic Boundary Conditions II: Polynomial Stability[J]. *SIAM J Contr Optim*, 2015, **53**(4): 2582−2607. DOI: 10.1137/140971348.

[19] GIORGI C, NASO M G,PATA V. Exponential Stability in Linear Heat Conduction with Memory: A Semigroup Approach[J]. *Commun Appl Anal*, 2001, **5** (1): 121−133.