

## 时间均匀采样的库仑修正强场近似方法

张涛,任浩,郝小雷\*

(山西大学 理论物理研究所,山西 太原 030006)

**摘要:**本文利用标准的库仑修正强场近似方法(Coulomb-corrected strong-field approximation, CCSFA),即动量均匀采样CCSFA方法,和改进的时间均匀采样CCSFA方法对氩原子的阈上电离过程进行了研究。结果表明,两种采样策略计算得到的光电子动量谱和能谱基本一致,但是,由于两种方法得到的多次返回再散射电子的相对贡献不同,导致计算结果在光电子谱的高能部分有定量差别。通过分析,我们发现标准CCSFA方法在动量空间的采样是均匀的,但是对应到时间域却是不均匀的,其采样数量在激光场峰值处是极小值,这将导致在场峰值附近电离电子的贡献被低估。由于多次返回再散射电子的电离时间集中在激光场峰值附近,故其贡献在标准CCSFA方法中被低估。采用时间均匀采样方法则可以克服上述缺陷。

**关键词:**超短强激光;阈上电离;库仑修正强场近似;时间均匀采样

**中图分类号:**O562.4 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2025)04-0767-08

## Coulomb-corrected Strong-field Approximation Method with Uniformly Sampled Time

ZHANG Tao, REN Hao, HAO Xiaolei\*

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

**Abstract:** In this paper, the above-threshold ionization process of argon atoms is studied using the standard Coulomb-corrected strong-field approximation (CCSFA), *i.e.* the CCSFA method with uniformly sampled points in momentum space, and the improved CCSFA method with uniformly sampled time. The results show that the photoelectron momentum and energy spectra calculated by the two sampling strategies are basically the same, but there is a quantitative difference between the calculated results in the high-energy part of the photoelectron spectrum due to the difference in the relative contributions of the multiple-return rescattering electrons obtained by the two methods. The analysis shows that the standard CCSFA method samples uniformly in momentum space, but corresponds to inhomogeneity in the time domain, and its sampling number is extremely small at the peak of the laser field, leading to an underestimation of the contribution of the ionized electrons near the peak of the field. Since the ionization time of the multiple-return rescattering electrons is concentrated near the peak of the laser field, their contribution is underestimated by the standard CCSFA method. The use of the time-uniform sampling method overcomes these shortcomings.

**Key words:** ultrashort intense laser; above-threshold ionization; coulomb-corrected strong-field approximation; time-uniform sampling

收稿日期:2024-01-04;接受日期:2024-04-03

基金项目:国家自然科学基金(12274273)

作者简介:张涛(1997-),女,山西吕梁人,硕士,研究方向为超快强场物理。E-mail:ztao0104@163.com

\*通信作者:郝小雷(HAO Xiaolei),E-mail:xlhao@sxu.edu.cn

引文格式:张涛,任浩,郝小雷.时间均匀采样的库仑修正强场近似方法[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(4):767-774. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024064.

## 0 引言

超短强激光与原子分子相互作用会产生许多有趣的现象,例如阈上电离<sup>[1-2]</sup>(Above-threshold ionization, ATI)、非次序双电离<sup>[3-4]</sup>(Nonsequential double ionization, NSDI)及高次谐波产生<sup>[5]</sup>(High-order harmonic generation, HHG)等。阈上电离是指电子吸收了比克服电离所需的最小光子数更多的光子,在光电子能谱中呈现出以光子能量为间隔的峰状结构,称为阈上电离峰。作为强场原子分子超快过程中最基本的现象之一,阈上电离数十年来一直是超快强场物理研究的焦点<sup>[6-8]</sup>。人们对阈上电离的理论研究主要基于三类方法:经典蒙特卡洛方法<sup>[9-10]</sup>(Classical-trajectory Monte-Carlo method, CTMC)、强场近似方法<sup>[11]</sup>(Strong-field approximation method, SFA),以及数值求解含时薛定谔方程<sup>[12]</sup>(Numerical solution of the time-dependent Schrödinger equation, TDSE)。三种方法都取得了很大的成功,并解释了很多重要的现象。这些方法由于自身存在的缺点都有其局限性。TDSE是最精确的方法,但对中间过程物理图像的提取存在困难;CTMC并未考虑量子干涉效应,所以人们在其基础上提出了量子轨迹蒙特卡洛方法<sup>[13-14]</sup>(Quantum-trajectory Monte-Carlo method, QTMC);SFA未考虑库仑势对电子的影响,在处理库仑势对电子的影响时存在缺陷,因此人们提出了库仑修正强场近似方法<sup>[15-16]</sup>(Coulomb-corrected strong-field approximation, CCSFA)。QTMC与CCSFA计算量较小,中间物理过程较为清晰,得到了广泛的应用,并取得了很大的成功<sup>[17-20]</sup>。这两种方法本质上都是利用系综来模拟电子波包,都考虑了每一条轨迹的相位,并且都包含了库仑势对电子的轨迹以及相位的影响。但是二者有一个重要的差别,即初始采样是不同的。QTMC是直接对时间轴均匀采样,而标准CCSFA方法则是在动量空间均匀采样,之后再通过鞍点方程求解出相应的时间。从电离过程来看,电子在整个脉冲持续时间内都有可能发生电离,只是电离概率不同,因此,采用时间均匀采样可能更符合实际情况。另外,相对于QTMC方法,由于CCSFA方法是基于SFA方法发展的,可以自然地包含初始量子态的影响,因此,可以更方便地推广到分子体系。于是,很有必要在CCSFA方法中采用更合理的采样方法进而更准确地描述原子分子在超短强激光场中的动力学过程。

本文将QTMC的初始采样策略应用到标准CCSFA中,即对初始横向动量和电离时刻实部采取均匀采样,通过求解鞍点方程得到平行于激光场轴的动量和电离时刻虚部,之后再利用CCSFA方法得到最终的结果,我们把这种方法定义为时间均匀采样CCSFA。我们利用动量均匀采样和时间均匀采样两种CCSFA方法对Ar原子的阈上电离进行了详细研究。结果发现,虽然两种方法计算得到的光电子动量和能量分布定性一致,但是,对多次返回再散射轨迹的计算结果存在较大的差别,采用时间均匀采样可以更加准确地考虑多次返回轨迹的贡献。

## 1 理论方法

在长度规范下,CCSFA方法描述单电离的跃迁振幅可以写为(使用原子单位,即 $\hbar = e = m = 1$ )

$$M_p^{(\alpha)} = -i \langle \mathbf{p} + \mathbf{A}(t_s^{(\alpha)}) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t_s^{(\alpha)}) | \psi_0 \rangle \sqrt{\frac{2\pi i}{S_{I_p, \mathbf{p}}''(t_s^{(\alpha)})}} e^{iS_{I_p, \mathbf{p}}(t_s^{(\alpha)})}, \quad (1)$$

作用量S可以表示为

$$S_{I_p, \mathbf{p}}(t_s^{(\alpha)}) = - \int_{t_s^{(\alpha)}}^{t_r^{(\alpha)}} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{p} + \mathbf{A}(t))^2 - \frac{Z}{|\mathbf{r}(t)|} + I_p \right] dt - \int_{t_r^{(\alpha)}}^{T_p} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{p} + \mathbf{A}(t))^2 - \frac{Z}{|\mathbf{r}(t)|} + I_p \right] dt, \quad (2)$$

$t_s$ 可以根据如下鞍点方程解出

$$\frac{1}{2} [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t_s^{(\alpha)})]^2 = -I_p, \quad (3)$$

其中 $\alpha$ 为轨迹编号, $i$ 为虚数单位; $\mathbf{p}$ 为未受库仑场扰动的电子动量, $\mathbf{p}^2 = p_z^2 + p_l^2$ , $p_l = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ 为

横向动量,  $p_x$ 、 $p_y$  是与激光场垂直的两个方向的动量,  $p_z$  是平行于激光场方向的动量, 激光偏振轴沿  $z$  方向;  $\phi_0$  指电子处于初始束缚态;  $t_s = t_r + it_i$  为复数电离时刻,  $t_i$  是  $t_s$  的虚部,  $t_r$  是  $t_s$  的实部,  $T_p$  是激光脉冲关闭时间;  $Z$  是核电荷数,  $S''$  是作用量  $S$  的二阶导数,  $I_p$  是电离能。为了考虑库仑场对电子轨迹的影响, 需要求解激光电场和库仑场共同作用下的牛顿方程

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{E}(t) - \frac{Z}{r^3} \mathbf{r}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{E}(t)$  为激光电场。此式通过龙格库塔算法求解。初始坐标和初始速度为

$$z_0 = \text{Re} \left( \int_{t_i}^{t_r} A_z(\tau) d\tau \right), \quad (5)$$

$$x_0 = 0, \quad (6)$$

$$y_0 = 0, \quad (7)$$

$$v_{z_0} = p_z + A_z(t_r), \quad (8)$$

$$v_{x_0} = p_x, \quad (9)$$

$$v_{y_0} = p_y, \quad (10)$$

其中  $\text{Re}$  表示取复数实部;  $x_0$ 、 $y_0$ 、 $z_0$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的初始坐标;  $v_{x_0}$ 、 $v_{y_0}$ 、 $v_{z_0}$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的初始速度。激光电场关闭以后, 电子的运动只受库仑力影响, 遵循开普勒定律。根据能量守恒, 势能将转化为无穷远处的动能, 得到考虑库仑场后自由电子的渐近动量  $\tilde{\mathbf{p}}$ 。将动量空间划分成均匀的格子, 将最终动量落入相应格子的所有电子轨迹进行相干叠加, 得到格子对应动量的概率

$$D_{\tilde{\mathbf{p}}} = \left| \sum_{\alpha} M_p^{(\alpha)}(t_s^{(\alpha)}) \right|^2. \quad (11)$$

本文采用线偏振光, 偏振方向为  $z$  轴, 激光电场的形式为

$$\mathbf{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z, \quad (12)$$

其中  $E_0$  是激光峰值场强,  $f(t)$  为激光脉冲包络, 形式为

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 4T \\ \cos^2 \left[ \frac{\omega t - 8\pi}{8} \right], & 4T < t \leq 6T \\ 0, & t > 6T \end{cases}. \quad (13)$$

### 1.1 标准 CCSFA 方法

标准 CCSFA 方法采样策略是在动量空间均匀采样, 在求解鞍点方程 (3) 时, 在动量空间中对未受库仑场扰动的平行于激光偏振方向的动量  $p_z$  和垂直于激光偏振方向的动量  $p_l$  随机采样, 确定  $p_z$  和  $p_l$  后, 根据鞍点方程 (3) 解出电离时刻实部和虚部

$$t_r = \frac{1}{\omega} \left[ \arccos \left( \frac{\sqrt{E_0^2 + \omega^2(2I_p + p^2)^2 + \sqrt{[\omega^2(2I_p + p^2) + E_0^2]^2 - 4E_0\omega^2 p_z^2}}}{\sqrt{2} E_0} \right) - \frac{\pi}{2} \right], \quad (14)$$

$$t_i = \frac{1}{\omega} \text{arcosh} \sqrt{\frac{2\omega^2 p_z^2}{E_0^2 + \omega^2(2I_p + p^2)^2 + \sqrt{[\omega^2(2I_p + p^2) + E_0^2]^2 - 4E_0\omega^2 p_z^2}}}, \quad (15)$$

代入到初始条件之后将演化得到最终的动量, 进而得到相应的光电子谱。

### 1.2 时间均匀采样的 CCSFA 方法

时间均匀采样 CCSFA 方法中, 我们对未受库仑场扰动的垂直于激光偏振方向的动量  $p_l$  和电离时刻实部  $t_r$  随机采样,  $t_r$  的随机采样范围是在一个光学周期内, 确定  $t_r$  和  $p_l$  后, 根据鞍点方程 (3) 解出平行于激光偏振方向的动量  $p_z$  和电离时刻虚部  $t_i$ ,

$$p_z = \frac{E_0}{\omega} \sin(\omega t_r) \cosh(\omega t_i), \quad (16)$$

$$t_i = \frac{1}{\omega} a \sinh \left[ \frac{\pm \omega \sqrt{2I_p + p_l^2}}{E_0 \sin(\omega t_r + \pi/2)} \right], \quad (17)$$

代入到初始条件演化得到最终的能谱和动量谱。

## 2 数值结果与分析

利用上述两种方法,我们研究了激光波长为 800 nm,光强为  $1.0 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$  的激光场中 Ar 原子的阈上电离过程。

我们首先计算了电子的动量分布如图 1 所示,纵坐标  $\tilde{p}_l$ 、横坐标  $\tilde{p}_z$  分别表示库仑场扰动后得到的电子的垂直于激光偏振轴的动量与平行于激光偏振轴的动量,图 1(a) 是标准 CCSFA 方法计算得到的动量分布,图 1(b) 是时间均匀采样 CCSFA 计算的动量分布。通过图 1,我们可以清楚地看到,它们都有以零点为原点的 ATI 环,间隔为一个光子能量,是周期性的干涉导致的。两个方法的计算结果中,每一个 ATI 环上都存在 jet-like 结构,并且瓣数也是相等的。因此,利用两种不同采样方式 CCSFA 方法计算出的二维动量分布是基本一致的。

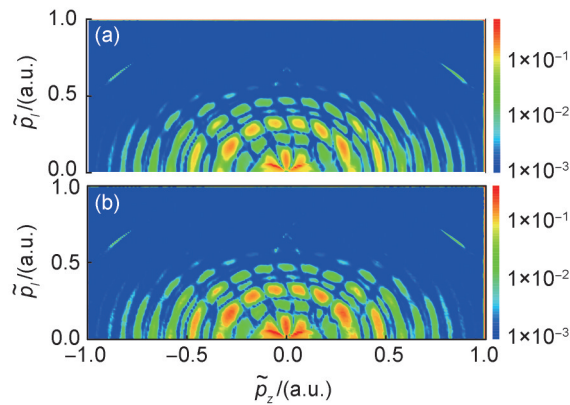


图 1 两种方法计算 Ar 原子单电离动量分布

(a) 标准 CCSFA 方法; (b) 时间均匀采样 CCSFA 方法

Fig. 1 Single ionization momentum distributions of Ar atoms calculated by two methods

(a) The standard CCSFA method; (b) Time-uniform sampling CCSFA method

我们还计算了沿激光偏振方向的电子能谱,如图 2 所示,黑线表示时间均匀采样 CCSFA 方法 (TUS-CCSFA) 的计算结果,红线表示标准 CCSFA 方法 (MUS-CCSFA) 的计算结果。结果表明,两种方法计算的能谱整体形状定性一致。光电子产率随着能量增大先快速下降,再到达平台区。仔细观察可以发现,二者在低能部分完全一致,但是在平台区域存在差异,主要表现为产率的差别。利用时间均匀采样 CCSFA 方法得到的 Ar 原子单电离产率更高。由于平台结构主要由再散射过程导致,因此,我们猜测,平台部分产率的差别可能源于两种方法对再散射过程计算结果的差别。

在原子阈上电离过程中,电子有可能直接电离出去,也可能在激光电场反向的时候被重新拉回到母离子的位置,与其发生碰撞,电子可能在第一次返回时就与母离子碰撞,也可能第一次返回时错过了母离子,而在之后的某一次返回时与母离子发生碰撞,因此,存在第一次返回、第二次返回、第三次返回等不同的再散射轨迹。我们进一步计算了 Ar 原子发生直接电离及不同次返回轨迹的动量分布和能谱,如图 3 和图 4 所示。图 3 中,(a)–(d) 分别代表标准 CCSFA 方法计算得到的直接电离电子、一次返回电子、二次返回电子、三次返回电子动量分布,(e)–(h) 分别表示时间

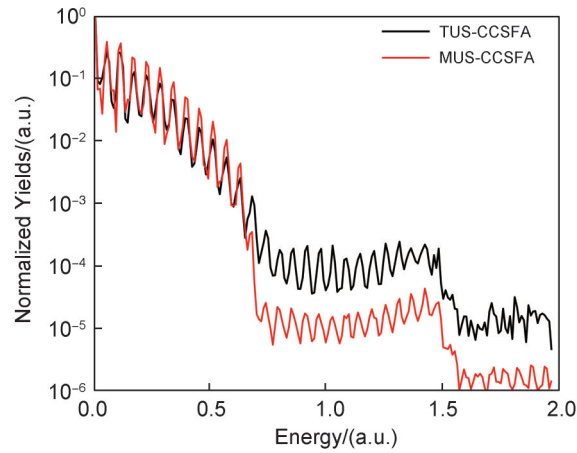


图2 两种方法计算 Ar 原子单电离能谱

Fig. 2 Single ionization energy spectra of Ar atoms calculated by two methods

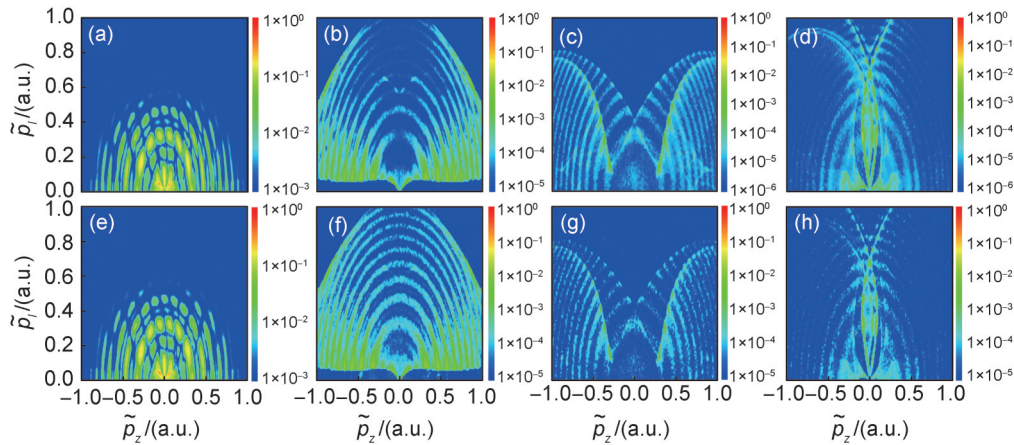


图3 两种方法计算不同返回次数轨迹的动量分布

(a)–(d) 标准 CCSFA 方法; (e)–(h) 时间均匀采样 CCSFA 方法; (a)(e) 直接电离轨迹; (b)(f) 第一次返回轨迹; (c)(g) 第二次返回轨迹; (d)(h) 第三次返回轨迹

Fig. 3 Momentum distributions of trajectories with different number of returns calculated by the two methods

(a)–(d) The standard CCSFA method; (e)–(h) Time-uniform sampling CCSFA method; (a)(e) The direct ionization trajectory; (b)(f) The first return trajectory; (c)(g) The second return trajectory; (d)(h) The third return trajectory

均匀采样的 CCSFA 方法计算得到的直接电离电子、一次返回电子、二次返回电子、三次返回电子动量分布。我们发现,利用两种方法计算的所有情况下的动量分布结构几乎一致,总的动量分布主要由直接电离电子决定,再散射电子主要分布在动量较大的区域。

同样,图4中利用两种方法计算的不同情况下的能谱结构都是一致的。不同类型的电子具有不同的能量分布范围。直接电子主要分布在能谱的低能部分,平台结构主要由再散射电子贡献。另外,对于再散射电子,返回次数越高贡献越小。这是由于模型中考虑了波包的传播扩散,返回时间越迟的电子与离子碰撞的概率越小。

然而,如果我们比较两种方法计算的再散射电子的相对产率,就会发现存在明显的差异。对于第一次返回轨迹,两种方法得到的产率基本一致。但是对于第二次和第三次返回轨迹,时间均匀采样得到相对产率要明显高于标准 CCSFA 计算得到的结果。由于第二次和第三次返回轨迹对平台高能部分的重要贡献,因此,图2中两种方法计算得出的能谱在平台结构高能部分存在明显差异。

为了进一步定量分析两种方法计算的再散射电子相对产率的差别,在图5中,我们统计了光强为  $1.0 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$  下不同次返回轨迹的产率与直接电离电子产率的比值。图5显示,在相同的激

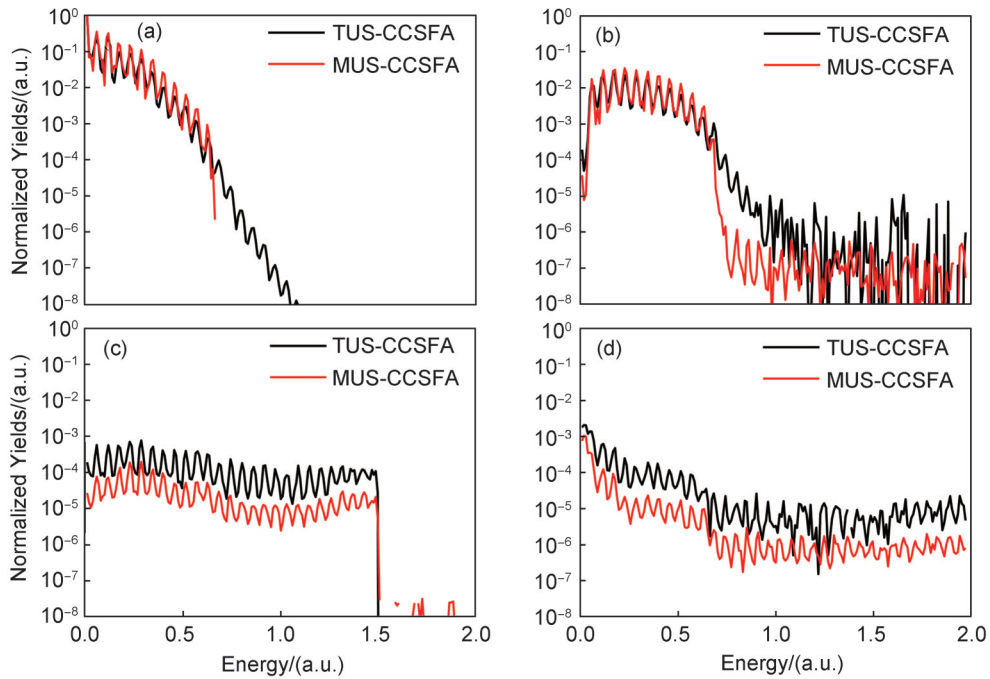


图4 两种方法计算不同返回次数轨迹的能谱

(a) 直接电离轨迹; (b) 第一次返回轨迹; (c) 第二次返回轨迹; (d) 第三次返回轨迹

Fig. 4 Energy spectra of trajectories with different number of returns calculated by the two methods

(a) The direct ionization trajectory; (b) The first return trajectory; (c) The second return trajectory; (d) The third return trajectory

光峰值强度下, 相比标准 CCSFA 方法的计算结果, 时间均匀采样策略下第二次返回轨迹和第三次返回轨迹的占比增多, 这表明时间均匀采样策略确实会使得多次返回轨道的相对贡献增加。

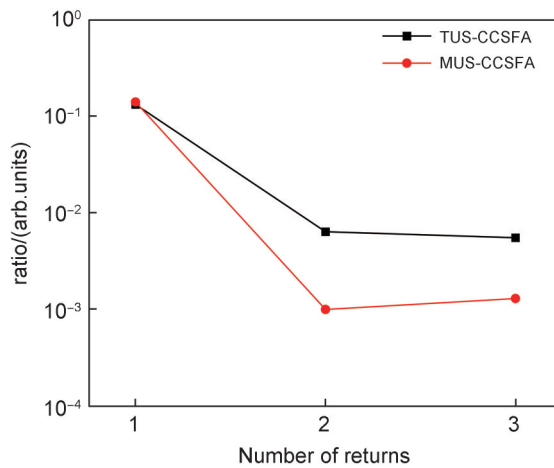


图5 两种方法计算不同返回次数碰撞轨迹相对直接电离轨迹的占比情况

Fig. 5 The percentage of collision trajectories relative to direct ionization trajectories was calculated for different numbers of returns using two methods

最后, 我们将分析时间均匀采样策略导致多次返回轨道的相对贡献增加的原因。我们对比了两种采样策略下的电离时刻-初始横向动量分布情况如图 6 所示。同时在图中我们还画出了激光电场, 其在 0.5 光学周期时达到峰值。从图中可以看出, 两种方法得到的分布几乎完全相同。不同类型的电子具有不同的分布: 直接电离电子的电离时刻分布在激光电场峰值附近较宽的时间范围内; 第一次返回电子分布在场峰值之后, 分布也比较宽; 但是, 第二次和第三次返回电子则分布在场峰值附近非常窄的时间范围内。标准 CCSFA 方法是在动量空间均匀采样, 再通过鞍点方程得

到初始时刻。由于鞍点方程中动量和电离时刻之间的关系是非线性的,因此在时间轴上采样点的分布一定不是均匀的。在图7中我们还给出了标准 CCSFA 方法中初采样数量随着电离时间的变化趋势。图7中可以看出动量均匀采样的 CCSFA 方法中每一时刻采样数量并非均匀分布,而是在场的峰值附近趋于极小值,这会导致场峰值附近电离的电子被低估。由于多次返回电子电离时间都是在场附近,故其贡献会被低估。

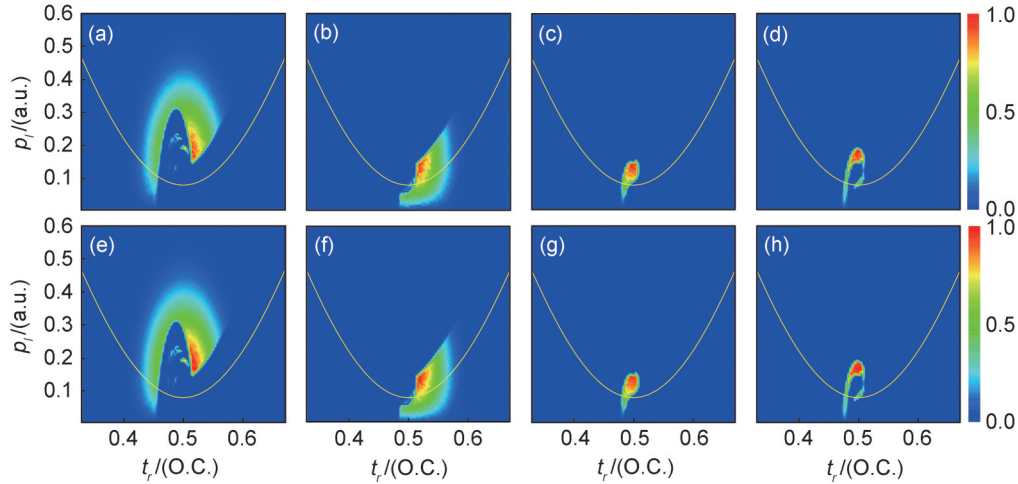


图6 两种方法计算不同返回次数轨迹的初始横向动量分布

(a)–(d) 标准 CCSFA 方法; (e)–(h) 时间均匀采样 CCSFA 方法; (a)(e) 直接电离轨迹; (b)(f) 第一次返回轨迹; (c)(g) 第二次返回轨迹; (d)(h) 第三次返回轨迹。

Fig. 6 Initial transverse momentum distributions for trajectories with different number of returns calculated by the two methods (a)–(d) Standard CCSFA methodology; (e)–(h) Time-plane uniform point picking CCSFA method; (a)(e) The direct ionization trajectory; (b)(f) The first return trajectory; (c)(g) The second return trajectory; (d)(h) The third return trajectory

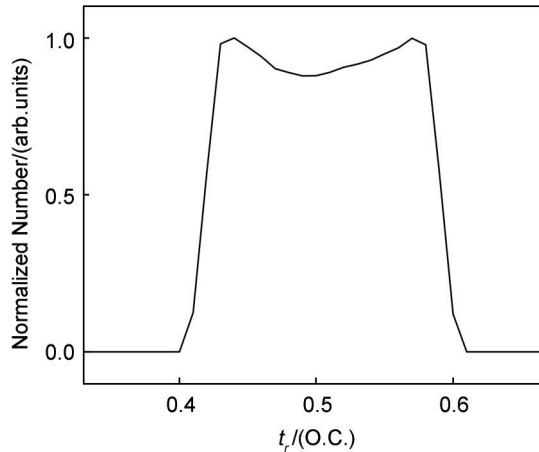


图7 标准 CCSFA 方法的初始采样数量分布

Fig. 7 Initial sample size distribution for the standard CCSFA method

### 3 结论

本文利用两种采样策略下的 CCSFA 方法研究了 800 nm 线偏振光下 Ar 原子阈上电离。研究表明,对于线性极化脉冲,两种方法得到的能谱与动量分布定性一致,但是在定量描述不同次数返回再散射电子的贡献时存在明显差异。由于标准 CCSFA 方法的采样数量在时间轴上是不均匀的,其在激光场峰值时处于极小值,导致多次返回轨迹的相对贡献被低估。而时间轴均匀采样的 CCSFA 方法则克服了这个缺陷,因此我们建议采用时间均匀采样的 CCSFA 方法。

## 参考文献:

- [1] PROTOPAPAS M, KEITEL C H, KNIGHT P L. Atomic Physics with Super-high Intensity Lasers[J]. *Rep Prog Phys*, 1997, **60**(4): 389-486. DOI: 10.1088/0034-4885/60/4/001.
- [2] BECKER W, GRASBON F, KOPOLD R, *et al.* Above-threshold Ionization: From Classical Features to Quantum Effects[J]. *Adv At Mol Opt Phys*, 2002, **48**(C): 35-98.
- [3] DE MORISSON FARIA C F, LIU X. Electron - Electron Correlation in Strong Laser Fields[J]. *J Mod Opt*, 2011, **58**(13): 1076-1131. DOI: 10.1080/09500340.2010.543958.
- [4] BECKER W, LIU X J, HO P J, *et al.* Theories of Photoelectron Correlation in Laser-driven Multiple Atomic Ionization[J]. *Rev Mod Phys*, 2012, **84**(3): 1011-1043. DOI: 10.1103/revmodphys.84.1011.
- [5] MACKLIN J J, KMETEC J D, GORDON C L. High-order Harmonic Generation Using Intense Femtosecond Pulses[J]. *Phys Rev Lett*, 1993, **70**(6): 766-769. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.766.
- [6] XU L, FU L B. Multichannel Interference in Resonance-like Enhancement of High-order Above-threshold Ionization[J]. *Phys Rev Lett*, 2019, **122**(25): 253202. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.253202.
- [7] BECKER W, GORESLAVSKI S P, MILOŠEVIĆ D B, *et al.* The Plateau in Above-threshold Ionization: The Keystone of Rescattering Physics[J]. *J Phys B: At Mol Opt Phys*, 2018, **51**(16): 162002. DOI: 10.1088/1361-6455/aad150.
- [8] MICHIELS R, ABU-SAMHA M, MADSEN L B, *et al.* Enhancement of above Threshold Ionization in Resonantly Excited Helium Nanodroplets[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **127**(9): 093201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.093201.
- [9] HUP B, LIU J, CHEN S G. Plateau in Above-threshold-ionization Spectra and Chaotic Behavior in Rescattering Processes[J]. *Phys Lett A*, 1997, **236**(5/6): 533-542. DOI: 10.1016/s0375-9601(97)00811-6.
- [10] LIU C P, HATSAGORTSYAN K Z. Origin of Unexpected Low Energy Structure in Photoelectron Spectra Induced by Midinfrared Strong Laser Fields[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, **105**(11): 113003. DOI: 10.1103/physrevlett.105.113003.
- [11] REISS H R. Effect of an Intense Electromagnetic Field on a Weakly Bound System[J]. *Phys Rev A*, 1980, **22**(5): 1786-1813. DOI: 10.1103/physreva.22.1786.
- [12] BAUER D, KOVAL P. Qprop: A Schrödinger-solver for Intense Laser-Atom Interaction[J]. *Comput Phys Commun*, 2006, **174**(5): 396-421. DOI: 10.1016/j.cpc.2005.11.001.
- [13] LI M, GENG J W, LIU H, *et al.* Classical-quantum Correspondence for Above-threshold Ionization[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, **112**(11): 113002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.113002.
- [14] GENG J W, QIN L, LI M, *et al.* Nonadiabatic Tunneling Ionization of Atoms in Elliptically Polarized Laser Fields[J]. *J Phys B: At Mol Opt Phys*, 2014, **47**(20): 204027. DOI: 10.1088/0953-4075/47/20/204027.
- [15] YAN T M, POPRUZHENKO S V, VRAKKING M J J, *et al.* Low-energy Structures in Strong Field Ionization Revealed by Quantum Orbits[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, **105**(25): 253002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.253002.
- [16] YAN T M, BAUER D. Sub-barrier Coulomb Effects on the Interference Pattern in Tunneling-ionization Photoelectron Spectra[J]. *Phys Rev A*, 2012, **86**(5): 053403. DOI: 10.1103/physreva.86.053403.
- [17] HAO X L, BAI Y X, ZHAO X Y, *et al.* Effect of Coulomb Field on Laser-induced Ultrafast Imaging Methods [J]. *Phys Rev A*, 2020, **101**(5): 051401. DOI: 10.1103/physreva.101.051401.
- [18] DUBOIS J, BERMAN S A, CHANDRE C, *et al.* Inclusion of Coulomb Effects in Laser-atom Interactions[J]. *Phys Rev A*, 2019, **99**(5): 053405. DOI: 10.1103/physreva.99.053405.
- [19] KLAIBER M, DANĚK J, YAKABOYLU E, *et al.* Strong-field Ionization via a High-order Coulomb-corrected Strong-field Approximation[J]. *Phys Rev A*, 2017, **95**(2): 023403. DOI: 10.1103/physreva.95.023403.
- [20] ZHAO X Y, LIU M Q, YANG Y Z, *et al.* Controlling Electron Motion with Attosecond Precision by a Shaped Femtosecond Intense Laser Pulse[J]. *Phys Rev A*, 2024, **109**(4): 043115. DOI: 10.1103/PhysRevA.109.043115.