

扩展Su-Schrieffer-Heeger模型中的拓扑安德森绝缘体

郑雪莉, 梁军军*

(山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006)

摘要: 本文研究了具有准周期调制的扩展Su-Schrieffer-Heeger (SSH)模型的拓扑和局域化性质。通过数值计算实空间绕数和分析零模的局域化长度,得到了拓扑相图,发现当跃迁强度在一定范围内时,随着准周期势的增强,系统出现重返拓扑安德森绝缘相(RTAI)的行为,这与传统的准周期势调制的系统有所不同。另外,通过对系统的局域化性质分析发现,在准周期势的调制下系统经历了扩展相、中间相(具有迁移率边)和局域相,其中中间相由扩展态、临界态和局域态组成。利用逆参与率和归一化参与率表征扩展态与局域态。此外,通过分形维度的有限尺寸标度分析,清晰展示了中间相区的组成。

关键词: 准周期势; 拓扑相变; 局域化

中图分类号: O413.3

文献标志码: A

文章编号: 0253-2395(2025)05-0955-09

Topological Anderson Insulator in the Extended Su-Schrieffer-Heeger Model

ZHENG Xueli, LIANG Junjun*

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: In this paper, we studied the topological structure and localization properties of the extended Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model with quasi-periodic potential. By numerically calculating the real-space winding number and analyzing the localization length of zero modes, we obtain a topological phase diagram and find that the system exhibits reentrant topological Anderson insulator (RTAI) behavior, which is different from traditional quasi-periodic potential modulation systems. In addition, by analyzing the localization properties of the system, we find that under quasi-periodic potential modulation, the system undergoes extended phases, intermediate phases (with mobility edges), and localized phases, and the intermediate phase consists of extended, critical, and localized states. The inverse participation ratio and normalized participation ratio was used as tools to characterize the extended and localized states. Furthermore, through finite-size scaling analysis of fractal dimension, the composition of the intermediate phase region is clearly demonstrated.

Key words: quasi-periodic potential; topological phase transition; localization

0 引言

拓扑绝缘体作为一种新奇的量子材料,在当前凝聚态物理学研究中备受关注^[1-2]。该绝缘体具备有能隙的体态和无能隙的边界态,并

可通过拓扑不变量来表征。其中Su-Schrieffer-Heeger (SSH)模型^[3]是研究拓扑绝缘体性质最简单的模型并展示出非常丰富的物理性质,如分数电荷、孤子激发^[4]和零模边界态^[5]。拓扑绝缘体的标志特征是拓扑态对弱无序具有鲁棒

收稿日期:2023-12-30;接受日期:2024-05-07

基金项目:国家自然科学基金(11875181)

作者简介:郑雪莉(1998-),女,山东德州人,硕士研究生,研究方向为冷原子物理。E-mail:lxz3714@163.com

* 通信作者:梁军军(LIANG Junjun),E-mail:liangjj@sxu.edu.cn

引文格式:郑雪莉,梁军军. 扩展Su-Schrieffer-Heeger模型中的拓扑安德森绝缘体[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2025,48(5):955-963. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024075.

性,而在强无序下,带隙闭合,所有本征态局域化,使系统的拓扑态变平庸,同时伴随着无能隙边界态的消失^[6]。然而已有研究发现,在拓扑平庸的绝缘体中加入无序会诱导拓扑态的产生,即拓扑安德森绝缘体(Topological Anderson Insulator, TAI)^[7]。事实上,TAI是无序^[8]对拓扑项的重整化导致的,而不是无序诱导的局域化现象。这种有趣的现象使人们开始关注拓扑与无序之间关联。近年来,TAI及其推广^[9-10]在各种理论模型中得以研究,并且得益于超冷原子技术的发展,实验上通过人工系统中的量子模拟可观察到TAI^[11]。但目前大部分工作都考虑的是随机无序,这导致TAI所对应的本征态都是安德森局域化的^[12]。有研究表明在对角线上或者非对角线上加入非公度势能,如准周期势,会出现包含各种体态的拓扑安德森绝缘体^[13],这与随机无序诱导的TAI不同。准周期势最早是在 Aubry-André (AA) 模型中引入的^[14],在一些扩展的AA模型中^[15-17],能观察到与能量相关的局域化转变点即迁移率边,同时存在扩展相、局域相,以及有迁移率边存在形成的中间相也叫临界相。

最近在一个具有非对角准周期调制的扩展SSH模型^[18]中展现出了有趣的拓扑性质,它不仅观察到TAI,并且TAI对大于临界强度的无序具有鲁棒性,这与之前的强无序驱使TAI发生平庸相变的传统观点不同。另外,SSH模型一种典型的扩展即将单个原胞内的两格点变为四格点,因此,标准的SSH模型变为具有四个跃迁系数的SSH4模型,SSH4模型具有手性对称性,与SSH模型属于同一拓扑类别,绕数可以表征其能带拓扑。SSH4模型的拓扑平庸相和非平庸相由跃迁系数比值决定^[19-20]。当SSH

的奇偶原胞内具有比值交替变化的跃迁准周期势调制时,最近邻跃迁系数是以四个格点为周期,系统的拓扑性质和局域化性质会表现出怎样的行为?我们发现,胞内固定跃迁在一定范围内时,调节准周期的强度会产生重返拓扑安德森绝缘相(Reentrant Topological Anderson Insulator, RTAI)的现象。

本文主要研究了具有准周期调制的扩展SSH模型中的局域性质和拓扑性质,通过数值方法计算实空间的绕数来分析拓扑相图,发现在准周期调制与胞内跃迁强度的相互作用下,系统拓扑性质会产生新的相变行为,并利用对角化的方法计算本征态的能量以及理论推导零能模局域化长度来分析拓扑相变边界,除此之外,通过对逆参与率(Inverse Participation Ratio, IPR)、归一化参与率(Normalized Participation Ratio, NPR)等体现局域化性质物理量的计算,我们推断在模型中存在包含临界态的中间相区域,并且存在两种不同的迁移率边。

1 理论模型

考虑两个相邻原胞胞内与胞间准周期势强度比值不同的扩展SSH模型,

$$H = \left(\sum_j^N t_j c_{j,a}^\dagger c_{j,b} + h.c. \right) + \left(\sum_j^{N-1} \omega_j c_{j,b}^\dagger c_{j+1,a} + h.c. \right),$$

$$t_j = t + \gamma \Delta_j, \omega_j = \omega + \Delta_j,$$

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1 = 1.5 & j \text{ 为奇数} \\ \gamma_2 = 0.5 & j \text{ 为偶数} \end{cases},$$

$$\Delta_j = \Delta \cos(2\pi \beta j + \phi). \quad (1)$$

链的长度由 $L = 2N$ 表示,单个原胞的指数为 $j (= 1, 2, 3, \dots, N)$ 。如图1所示,在每个原胞中有A和B两个子晶格,分别对应的粒子数算符为 $n_{j,a}, n_{j,b}$,在子晶格 (j, a) 和 (j, b) 位置上的

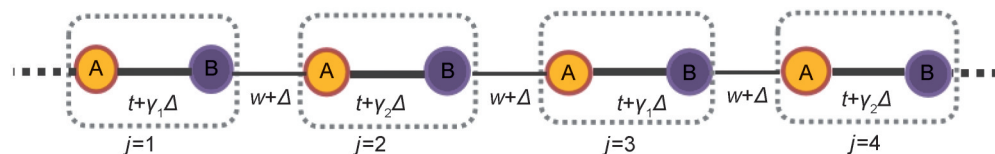


图1 扩展SSH模型的示意图

(虚线框表示单个原胞, $t + \gamma_1 \Delta$ 和 $t + \gamma_2 \Delta$ 分别代表奇偶原胞内跃迁强度, $w + \Delta$ 表示胞间跃迁强度。)

Fig. 1 A diagram of an extended SSH model

(The dashed box represents a single unit cell. $t + \gamma_1 \Delta$ and $t + \gamma_2 \Delta$ denote the inter-cell odd-even hopping strength, $w + \Delta$ denote the intra-cell hopping strength, respectively.)

产生和湮灭算符分别为 $\hat{c}_{j,a}^\dagger(\hat{c}_{j,a})$, $\hat{c}_{j,b}^\dagger(\hat{c}_{j,b})$ 。 t_j 和 w_j 分别为胞内跃迁强度和胞间跃迁强度。其中 t 和 w 是与格点无关的胞内跃迁与胞间跃迁强度, Δ 是准周期势的强度, γ 是胞内准周期调制与胞间准周期调制的比值, 在相邻两个原胞上比值不同, 奇原胞内 $\gamma_1=1.5$, 偶原胞内 $\gamma_2=0.5$ 。设置 $w=1$ 为能量单位, 无理数 $\beta=(\sqrt{5}-1)/2$, 相位角 $\phi=0$ 。当准周期势强度 $\Delta=0$ 时, 此模型简化为标准的 SSH 模型, 在 $t/w=1$ 处发生拓扑跃迁, SSH 模型具有手征对称性, 当具有非对角线准周期势调制时, 手征对称性不会被打破, 满足 $\Gamma^{-1}H\Gamma=-H$, $\Gamma=\sigma_z \otimes I_N$ 是手性算符^[21-22], 其中 σ_z 是泡利矩阵, I_N 是 $N \times N$ 维单位矩阵。以下计算都是在开边界条件 (Open Boundary Conditions, OBCs) 下进行的。

2 结果与分析

2.1 重返拓扑安德森绝缘体 (RTAI)

我们所考虑的模型属于拓扑分类中 BDI 类^[21-22], 在一维系统中一般用绕数作为拓扑不变量, 由于平移对称性被无序破坏, 因此, 可以计算实空间的绕数 (ν)^[23], 定义为:

$$\nu = \frac{1}{L'} \text{Tr}(\Gamma \mathbf{Q}[\mathbf{Q}, \mathbf{X}]), \quad (2)$$

其中矩阵 $\mathbf{Q} = \sum_n |\psi^n\rangle \langle \psi^n| - |\tilde{\psi}^n\rangle \langle \tilde{\psi}^n|$ 是通过求解手征对称性方程 $H|\psi^n\rangle = E_n|\psi^n\rangle$ 得到的, 与之对应的 $|\tilde{\psi}^n\rangle = \Gamma^{-1}|\psi^n\rangle$, n 是本征态指标, $\Gamma = \sigma_z \otimes I_N$ 是手征对称性算符, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \otimes I_2$ 是坐标算符, $(\mathbf{X}_1)_{ij} = i\delta_{ij}$, \sum_n' 是对除边界态外所有本征态求和。我们把整个系统的长度 L 分成三个区域, 分别是 l, L', l , 即 $L = L' + 2l$, 为了消除边界效应, 只对 L' 长度区间内格点求迹用符号 Tr 表示。

为了研究奇偶原胞中准周期势强度的比值对拓扑性质的影响, 先对比值相同的情况进行简单介绍。其胞间与胞内准周期势强度的比值 $\gamma=2$ 。如图 2(a) 所示, 利用绕数 ν 来分析 $t-\Delta$ 参数下的拓扑相图。黄色区域绕数值为 1, 代表拓扑相, 蓝色区域绕数值为 0, 代表拓扑平庸相。根据绕数值可以将相图分成三个区域。当 $t \in (0.65, 1)$ 时, 由于准周期势的调制会产生拓扑-平庸-拓扑两次拓扑相变, 第二次拓扑相是

由准周期势引起的拓扑安德森绝缘相 (TAI), 并且此相对于准周期势的干扰具有鲁棒性。另外, 我们在相邻原胞中准周期势强度比值不同时, 即 (1) 式中的哈密顿量, 发现系统中会出现不同的拓扑行为。如图 2(b) 所示, 取 $\gamma_1=1.5$, $\gamma_2=0.5$, 将绕数作为胞内跃迁强度 (t) 和准周期势强度 (Δ) 的函数来分析拓扑相图。可将相图分为四个区域, 分别为 $t \in (0, 0.5)$, $t \in [0.5, 1)$, $t \in [1, 1.14]$, $t \in (1.14, 2)$ 。当准周期势强度 $\Delta=0$ 时, 在 $t/w=1$ 处会发生 $\nu=0$ 的拓扑平庸相到 $\nu=1$ 的拓扑相的拓扑相变。当 Δ 在一定范围内时, 在 $t \in [1, 1.14]$ 的区域内出现拓扑特征, 这同样也是在准周期势的诱导下产生的拓扑安德森绝缘相 (TAI)。继续增大 Δ , 系统会重新进入 TAI 相 (RTAI)。

实空间的绕数是通过哈密顿量的体态来表征系统的拓扑性质, 同时, 还可利用边界态来理解体边对应关系, 当系统处于拓扑相时会存在零能态, 因此我们展示了中间能谱的本征态能量随准周期势强度的变化。如图 3 所示, “红色圆圈”与“蓝色十字”分别表示两个零能态, “黑色实圆”代表绕数 ν 。当 $t \in (0, 0.5)$ 时, 如图 2(b) 所示, 随着准周期势强度 Δ 的增大, 黄色区域一直存在 (绕数为 1)。在这个过程中没有发生相变, 而是随着准周期势的增加出现原始 SSH 模型拓扑相与准周期势诱导 TAI 相的绝热连接。如图 3(a) 所示, 取 $t=0.3$, 随着准周期势强度的增大, 实空间的绕数 (ν) 保持为 1, 并伴随零能态的存在。由于无法从绕数与零能模上区分两种拓扑相, 因此系统一直呈现拓扑特征。当 $t \in [0.5, 1)$ 时, 调节准周期势强度系统会有拓扑-平庸-拓扑的相变产生, 如图 3(b) 所示, 取 $t=0.8$, 可以看到实空间绕数的变化伴随着零能态的消失, 在准周期势强度较小时, 绕数为 1, 并伴有无间隙的零能态, 此时系统为原始 SSH 模型拓扑相, 当 $\Delta \in (0.9, 1.5)$ 时, 绕数为 0, 零能模消失, 系统为平庸相, 标志着在 $\Delta \approx 0.9$ 时发生了拓扑相变。继续增大准周期势强度, 当 $\Delta > 1.5$ 时, 绕数值为 1, 并有零能态产生, 此时系统进入由准周期势诱导的 TAI 相, 发生拓扑平庸相到拓扑安德森相的相变。当 $t \in [1, 1.14]$ 时, 调节准周期势强度体系会出现两次平庸相

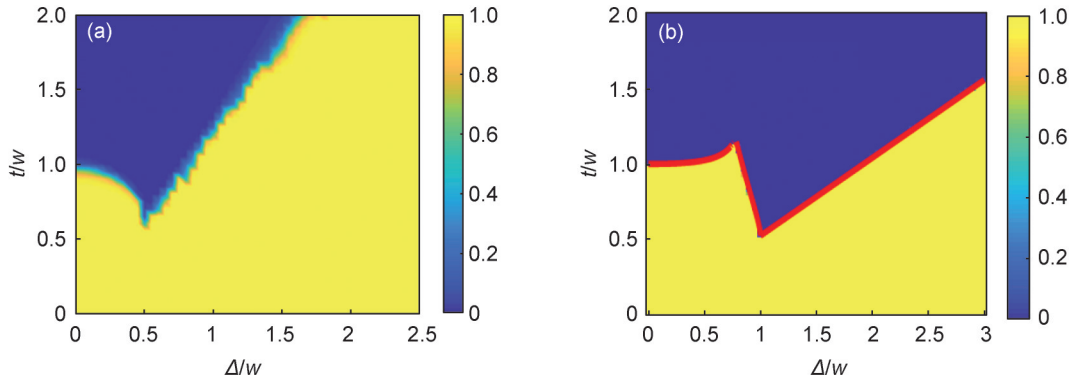


图2 t - Δ 参数平面下拓扑相图,尺寸 $L=1600$,色条表示绕数 ν 的值

((a)胞间与胞内准周期势强度的比值 $\gamma=2.0$ 。(b)胞间与胞内准周期势强度 $\gamma_1=1.5$ (奇原胞) $\gamma_2=0.5$ (偶原胞),其中红色实线表示局域化长度 λ 发散时的解析解(6)式。)

Fig. 2 The topological phase diagram in the parameter t - Δ plane, $L=1600$, color bar represents the value of the winding number ν ((a) The ratio of quasi-periodic modulations of intra- to intercell tunneling $\gamma=0.5$. (b) the ratio of quasi-periodic modulations of intra- to intercell tunneling $\gamma_1=1.5$ (odd cell), $\gamma_2=0.5$ (even cell), where the red lines represent the analytical critical line equation (6) where the localization length λ diverges.)

到拓扑相的转变,如图3(c)所示,取 $t=1.04$,当 $\Delta < 0.65$ 时,没有成对的零能态出现,且绕数为零,标志此时系统处于拓扑平庸相;当 $\Delta \in (0.65, 0.8)$ 时,存在零能态以及绕数值为1,系统表现出拓扑相的特征,因此,在 $\Delta \approx 0.65$ 时,产生第一次拓扑平庸相到拓扑非平庸相的相变;而当 $\Delta > 0.8$ 后零能态消失,绕数也变为零,这标志着发生了第二次相变,系统由TAI相被准周期势破坏,相变到拓扑平庸相;继续增大准周期势强度,在 $\Delta \approx 2$ 时,零能态与非零绕数值的出现标志体系重新进入TAI相,发生了第三次相变。 $t \in (1.14, 2)$ 是第四个区域,在较小的准周期势强度下体系为拓扑平庸相,当准周期势强度达到一定强度会诱导TAI相产生,发生拓扑相变。如图3(d)所示,当 $t=1.3$ 时, $\Delta < 2.55$,没有成对的零能态出现,绕数为0,当 $\Delta > 2.55$ 时,零能态出现,体系进入TAI相。

为了更直观地观察到系统多次相变的过程,我们还研究了当 $t=1.04$ 时,不同准周期势强度下,本征态波函数的分布。当系统处于拓扑相时,零能态的分布会以指数衰减的形式局域在边界上。如图4所示,将波函数分布作为格点 i 的函数,从图4(a)、(b)中可以清晰地看到当 $\Delta=0.55$ 时,零能量附近的本征态并非为边界态,而是分布在整个晶格中的扩展态。而 $\Delta=0.65$ 时,本征态局域在边界处,体现拓扑相,这表明第一

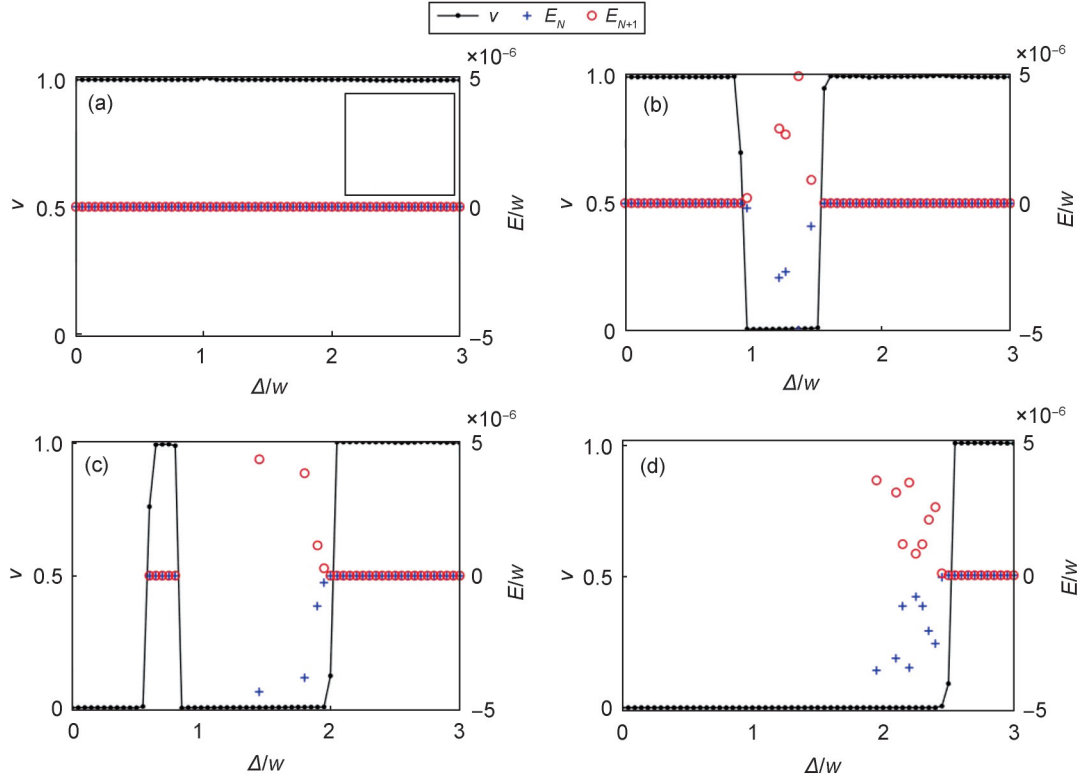
个相变点在 $\Delta \approx 0.6$ 附近。图4(c)、4(d)对应着第二个相变点,由拓扑相到安德森局域相的相变。图4(c)中 $\Delta=0.8$,可以观察到两个本征态都局域在边界处,由此证明零能边界态的存在,图4(d)对应的 $\Delta=0.85$,此时两个本征态都局域在非边界处,表明此时零能边界态消失,伴随着体系进入安德森绝缘相。此外,在图4(e)、4(f)中,我们观察在第三个相变点附近的准周期势强度下,本征态波函数的分布,当 $\Delta=1.95$ 时两个本征态局域在几个有限的位置但并不位于边界,此时体系为拓扑平庸相,当 $\Delta=2.05$ 时边界态出现,由此得出 $\Delta \approx 2$ 是第三个拓扑相变点。

如图3所示,零能态的出现总是伴随着系统非零绕数的产生。另外,由于零能态在拓扑相变点处的局域化长度是发散的^[23],我们还可以通过计算零能模的局域化长度来分析系统的拓扑性质。当 $L \rightarrow \infty$ 时,局域化长度的倒数 $\lambda^{-1} \rightarrow 0$,对应发生拓扑相变的相变点。通过哈密顿量来求解本征态方程 $\psi = \{\psi_{1,A}, \psi_{1,B}, \psi_{2,A}, \psi_{2,B}, \dots, \psi_{N,A}, \psi_{N,B}\}^T$,根据薛定谔方程 $H\psi = E\psi$,由于文章中模型是在奇偶原胞间加入比值不同的准周期势,我们将两个原胞当作一个周期,零能态对应的本征态方程为

$$\begin{aligned} t_j \psi_{j,A} + w_j \psi_{j+1,A} &= 0, \\ w_j \psi_{j,B} + t_{j+1} \psi_{j+1,B} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{j+1}\psi_{j+1,A} + \omega_{j+1}\psi_{j+2,A} &= 0, \\ \omega_{j+1}\psi_{j+1,B} + t_j\psi_{j+2,B} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

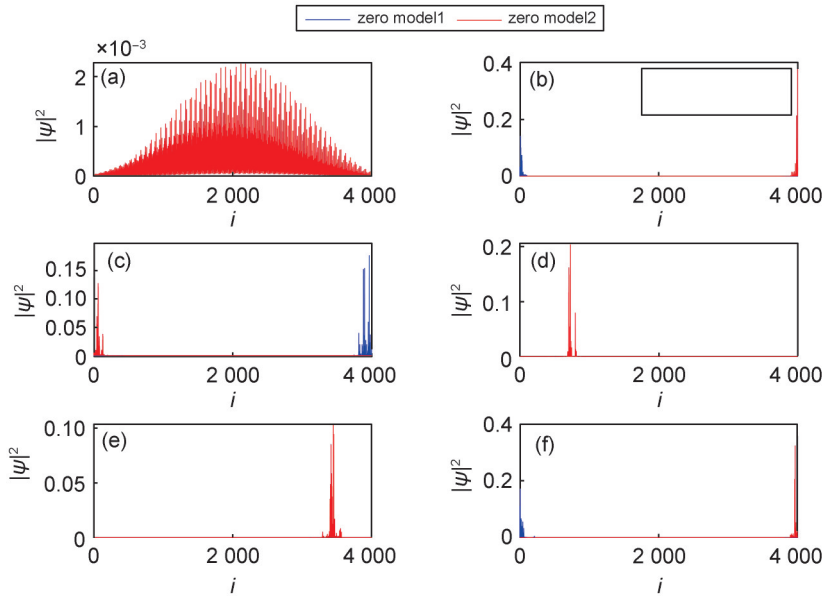
其中 $\psi_{j,A}, \psi_{j,B}$ 是第 j 个原胞中子晶格 A、B 上的零模概率幅度。通过求解耦合方程得到



注:(a) $t=0.3$, (b) $t=0.8$, (c) $t=1.04$, (d) $t=1.3$ 。

图3 开边界条件下,能谱中间两个能级能量 E_N 和 E_{N+1} 以及绕数(ν)随准周期势强度 Δ 的变化, $L=4000$

Fig. 3 Under the open boundary condition, the energy sum of the two energy levels E_N and E_{N+1} in the middle of the energy spectrum and the winding number (ν) changes with quasi-periodic potential strength $\Delta, L=4000$



注:(a) $\Delta=0.55$, (b) $\Delta=0.65$, (c) $\Delta=0.8$, (d) $\Delta=0.85$, (e) $\Delta=1.95$, (f) $\Delta=2.05$

图4 两个中间能级本征态的分布随格点指标(i)的变化, $t=1.04, L=4000$

Fig. 4 The probability distribution of the eigenstates of the two intermediate levels varies with the lattice index (i), $t=1.04, L=4000$

$$\begin{aligned} \phi_{j+2,A} &= \prod_{j=1}^{N/2} \left(\frac{t_j t_{j+1}}{\omega_j \omega_{j+1}} \right) \phi_{j,A}, \\ j &= 1, 3, 5, \dots (\text{奇数}), \end{aligned} \quad (4)$$

因此,在 $L \rightarrow \infty$ 时,零模局域化长度的倒数 λ^{-1} 表示为

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} &= -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \left| \frac{\Psi_{L+1,1}}{\Psi_{1,1}} \right|, \\ \lambda^{-1} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left[\sum_{j=1}^L \left[\ln \left| (1 + \Delta \cos(2\pi j\beta + \phi))^2 \right| - \right. \right. \\ &\quad \left. \ln \left| (t + \gamma_1 \Delta \cos(2\pi j\beta + \phi)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (t + \gamma_2 \Delta \cos(2\pi j\beta + \phi)) \right| \right] \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

当 $\lambda^{-1} \rightarrow 0$, 所对应的拓扑相变边界为

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \left(1 + \sqrt{1 - \Delta^2} \right)^2 = \left(t + \sqrt{t^2 - \gamma_1^2 \Delta^2} \right) \left(t + \sqrt{t^2 - \gamma_2^2 \Delta^2} \right), \Delta < \frac{t}{\gamma_1} \text{ 且 } \Delta < 1; \\ \textcircled{2} \quad & \left(1 + \sqrt{1 - \Delta^2} \right)^2 = \left(t + \sqrt{t^2 - \gamma_2^2 \Delta^2} \right) \gamma_1 \Delta, \\ & \frac{t}{\gamma_1} < \Delta < \frac{t}{\gamma_2} \text{ 且 } \Delta < 1; \\ \textcircled{3} \quad & t = \frac{25}{48} \Delta, 1 < \Delta < \frac{t}{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

解析结果如图 2(b) 红色实线所示,与数值结果相一致。

2.2 局域性质

本节讨论的是系统的局域化性质,可用逆参与率(IPR)和归一化参与率(NPR)来区分扩展相、中间相和局域相的特征。为了方便表示,我们用 I_{PR} 和 N_{PR} 代替 IPR 和 NPR, I_{PR_n} 和 N_{PR_n} 对应于哈密顿量的第 n 个本征态。 I_{PR_n} 和 N_{PR_n} 定义为 $I_{PR_n} = \sum_i |\psi_n(i)|^4$, $N_{PR_n} = (L \sum_i |\psi_n(i)|^4)^{-1}$, 其中 L 为系统尺寸, n 为本征态个数, i 为格点指标。扩展态的 IPR 值与尺寸的倒数正相关,当 $L \rightarrow \infty$ 时, $I_{PR} \rightarrow 0$, 而局域态的 IPR 为非零值,在热力学极限下为 1。相反, NPR 值在扩展态时为有限值,对于局域态在热力学极限下趋于零。如果想要研究系统整体的局域化性质可以进一步定义 IPR 和 NPR 的平均值^[24], 定义为

$$\langle I_{PR} \rangle = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L I_{PR}^{(n)}, \langle N_{PR} \rangle = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L N_{PR}^{(n)}.$$

我们通过计算 $\langle I_{PR} \rangle$ 和 $\langle N_{PR} \rangle$, 分析在 $t-\Delta$ 参数空间中可以将中间相从扩展相和局域相中区

分的相图。为此,计算物理量^[25] η

$$\eta = \log_{10} [\langle I_{PR} \rangle \times \langle N_{PR} \rangle]. \quad (7)$$

当处于扩展相或者局域相时,由于 $\langle I_{PR} \rangle$ 和 $\langle N_{PR} \rangle$ 为非零有限值, η 会满足 $\eta \leq -\log_{10}(L)$ 的条件。在我们考虑尺寸 $L = 2000$ 的情况下 $\eta \leq -3.3$ 的区域为扩展相或者局域相, $\eta > -3.3$ 时为中间相,即同时存在扩展态、局域态和临界态。

如图 5(a) 所示,通过 η 表征系统的局域化性质。“蓝色”对应于扩展和局域相区,“红色”表示中间相区。可以观察到随着准周期势强度的增大系统经历扩展相、中间相和局域相三个阶段。

但 η 无法区分局域相和扩展相。因此,我们用分形维度(D_2)^[26] 来识别不同的本征态,定义为

$$D_2 = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\log(I_{PR})}{\log(L)}, \quad (8)$$

在热力学极限下,它的值为 1(0), 分别对应于扩展态和局域态,当在 0~1 之间时表示临界(多重分形)态。我们展示了当 $t = 1.04$ 时,所有本征态的分形维度值随准周期势强度的变化,不同的本征态在不同的准周期势强度处经历局域化跃迁,这表明存在与能量相关的迁移率边。如图 5(b) 所示,我们可以清晰地观察到当 $\Delta < 0.16$ 时,几乎所有的本征态都是扩展的。在 $\Delta \in [0.16, 0.8]$ 时存在多种状态共存的现象(即有迁移率边的出现),最终在 $\Delta > 0.8$ 后,所有本征态都变为局域态。

除此之外,我们计算 D_2 作为本征态指标(n)和系统大小(L)之比的函数。对应于 $t = 1.04$ 时,选用的尺寸大小为 $L = 1000, 2000, 4000$, 它们在图中通过不同的颜色显示。如图 5(c) 对应 $\Delta = 0.1$, 可以观察到随着系统尺寸的增加所有的本征态的 D_2 值都向 1 移动,这表明所有的本征态都为扩展态。图 5(d) 对应着 $\Delta = 0.72$, 从图中可以观察到在不同的系统尺寸下中间低能态的 D_2 值在 0.4~0.6 之间浮动,这标志着这些本征态是临界态,而其他本征态的 D_2 值却随着尺寸的增大趋于 0, 这些态为局域态,表明在临界态和局域态之间存在异常迁移率边。当 $\Delta = 0.9$ 时,如图 5(e) 所示,所有本征态的 D_2 值随着系统尺寸的增大向 0 的方向移动,这表示系统进入了局域相区。

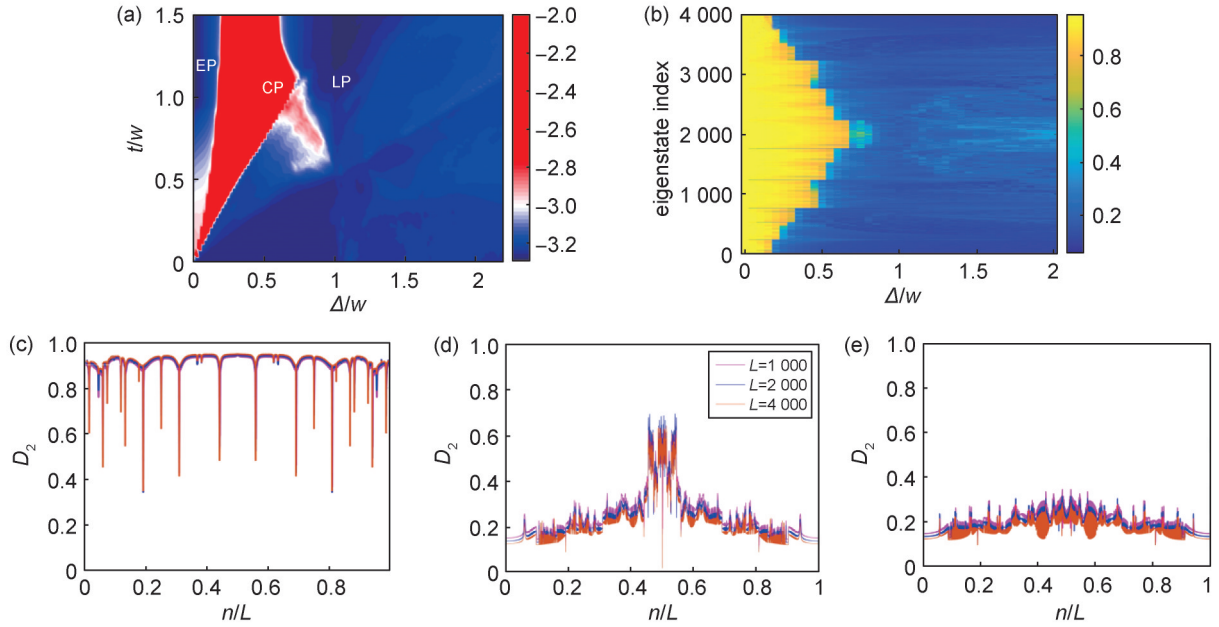


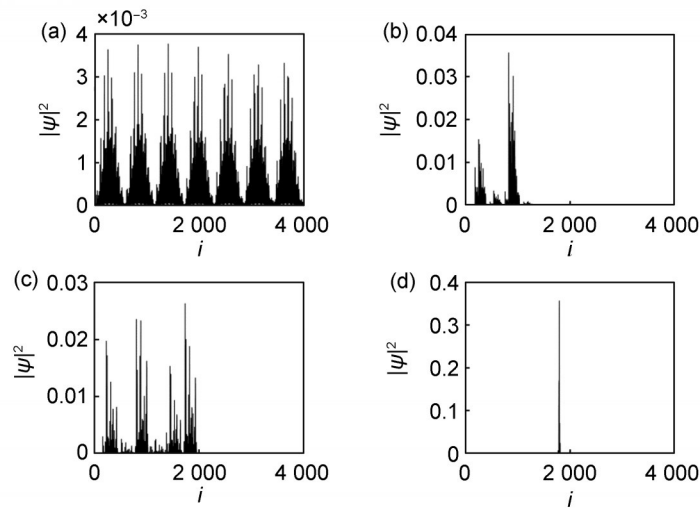
图5 系统的局域化性质随准周期势强度 Δ 的变化

(a) η 在 t - Δ 参数下的局域相图, $L = 2000$; (b) 分形维度 D_2 随准周期势强度 Δ 的变化, $t = 1.04, L = 4000$; 不同尺寸下, 分形维度 D_2 随 n/L 的变化。(c) $\Delta = 0.1$, (d) $\Delta = 0.72$, (e) $\Delta = 0.9$ 。

Fig. 5 The localization properties of the system changes with quasi-periodic potential

(a) Localization phase diagram of physical quantities η under parameters t - $\Delta, L = 2000$; (b) The change of fractal dimension D_2 with quasi-periodic potential strength $\Delta, t = 1.04, L = 4000$. Under the different size, the change of fractal dimension D_2 with n/L ;

(c) $\Delta = 0.1$, (d) $\Delta = 0.72$, (e) $\Delta = 0.9$.



注: (a) $\Delta = 0.65$, (b) $\Delta = 0.7$, (c) $\Delta = 0.8$, (d) $\Delta = 0.9$ 。

图6 波函数的分布随格点(i)的变化。 $t = 1.04, L = 4000$ 。

Fig. 6 The probability distribution of the wavefunction varies with the lattice point (i), $t = 1.04, L = 4000$ 。

波函数的分布可以直观地表征本征态的局域化特性, 从而进一步观察系统随准周期势强度的变化过程。扩展态的波函数分布在整个晶格上, 相反, 局域态只分布在极少数晶格位置上, 而临界态与上述两种状态都不同, 既不

全扩展, 也不完全局域。在图6中我们观察到, 取 $t = 1.04, \Delta = 0.65$ 时, 波函数是分布在整个晶格空间上的, 而 $\Delta = 0.7, 0.8$ 时, 波函数的分布表现出临界态的行为。最后当 $\Delta = 0.9$ 时波函数分布只在几个格点上, 转变为局域态。

3 结论

我们考虑了胞内与胞间准周期势强度比值不同的扩展 SSH 模型。通过计算系统中绕数与零能态描述系统的拓扑性质,观察到在不同的胞内跃迁参数下会有不同的拓扑相变过程,并发现当 $t \in [1, 1.14]$ 时会出现重返拓扑安德森相的行为,通过理论推导零能态的局域化长度确定发生拓扑相变的相变点。除此之外,我们还对系统的局域化性质进行了分析,数值结果表明,随着准周期势强度的增大系统经历扩展相、中间相和局域相三个阶段。其中中间相区域存在两种类型的迁移率边,将扩展相与局域相区域分隔开。

参考文献:

- [1] PAL R K, SCHAEFFER M, RUZZENE M. Helical Edge States and Topological Phase Transitions in Phononic Systems Using Bi-layered Lattices[J]. *J Appl Phys*, 2016, **119**(8): 084305. DOI: 10.1063/1.4942357.
- [2] VERBIN M, ZILBERBERG O, KRAUS Y E, *et al.* Observation of Topological Phase Transitions in Photonic Quasicrystals[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **110**(7): 076403. DOI: 10.1103/physrevlett.110.076403.
- [3] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Solitons in Polyacetylene[J]. *Phys Rev Lett*, 1979, **42**(25): 1698–1701. DOI: 10.1103/physrevlett.42.1698.
- [4] JACKIW R, REBBI C. Solitons with Fermion Number $\frac{1}{2}$ [J]. *Phys Rev D*, 1976, **13**(12): 3398–3409. DOI: 10.1103/physrevd.13.3398.
- [5] GANESHAN S, SUN K, DAS SARMA S. Topological Zero-energy Modes in Gapless Commensurate Aubry-André-harper Models[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **110**(18): 180403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.180403.
- [6] XU Z H, ZHANG R, CHEN S, *et al.* Fate of Zero Modes in a Finite Su-Schrieffer-Heeger Model with PT Symmetry[J]. *Phys Rev A*, 2020, **101**: 013635. DOI: 10.1103/physreva.101.013635.
- [7] LI J, CHU R L, JAIN J K, *et al.* Topological Anderson Insulator[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **102**(13): 136806. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.136806.
- [8] GROTH C W, WIMMER M, AKHMEROV A R, *et al.* Theory of the Topological Anderson Insulator[J]. *Phys Rev Lett*, 2009, **103**(19): 196805. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.196805.
- [9] YANG Y B, LI K, DUAN L M, *et al.* Higher-order Topological Anderson Insulators[J]. *Phys Rev B*, 2021, **103**(8): 085408. DOI: 10.1103/physrevb.103.085408.
- [10] LI C G, FU B, HU Z A, *et al.* Topological Phase Transitions in Disordered Electric Quadrupole Insulators[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(16): 166801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.166801.
- [11] LIU G G, YANG Y H, REN X, *et al.* Topological Anderson Insulator in Disordered Photonic Crystals[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(13): 133603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.133603.
- [12] MEIER E J, AN F A, DAUPHIN A, *et al.* Observation of the Topological Anderson Insulator in Disordered Atomic Wires[J]. *Science*, 2018, **362**(6417): 929–933. DOI: 10.1126/science.aat3406.
- [13] TANG L Z, LIU S N, ZHANG G Q, *et al.* Topological Anderson Insulators with Different Bulk States in Quasiperiodic Chains[J]. *Phys Rev A*, 2022, **105**(6): 063327. DOI: 10.1103/physreva.105.063327.
- [14] ADOLPHS C, TOWERS J, PIRAUD M, *et al.* Effects of Interactions and Temperature in Disordered Ultracold Bose Gases[J]. *J Mod Phys*, 2014, **5**(8): 661–672. DOI: 10.4236/jmp.2014.58077.
- [15] LÜSCHEN H P, SCHERG S, KOHLERT T, *et al.* Single-particle Mobility Edge in a One-dimensional Quasiperiodic Optical Lattice[J]. *Phys Rev Lett*, 2018, **120**(16): 160404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.160404.
- [16] HSU Y T, LI X, DENG D L, *et al.* Machine Learning Many-body Localization: Search for the Elusive Nonergodic Metal[J]. *Phys Rev Lett*, 2018, **121**(24): 245701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.245701.
- [17] XU S L, LI X, HSU Y T, *et al.* Butterfly Effect in Interacting Aubry-Andre Model: Thermalization, Slow Scrambling, and Many-body Localization[J]. *Phys Rev Research*, 2019, **1**(3): 032039. DOI: 10.1103/physrevresearch.1.032039.
- [18] LU Z P, ZHANG Y B, XU Z H. Robust Topological Anderson Insulator Induced Reentrant Localization Transition[E/OL]. arXiv: Preprint: 2306.06818, 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2306.06818.
- [19] ZHOU X F, PAN J S, JIA S T. Exploring Interacting Topological Insulator in the Extended Su-Schrieffer-Heeger Model[J]. *Phys Rev B*, 2023, **107**(5): 054105. DOI: 10.1103/physrevb.107.054105.
- [20] XIE D Z, GOU W, XIAO T, *et al.* Topological Characterizations of an Extended Su-Schrieffer-Heeger Model [J]. *NPJ Quantum Inf*, 2019, **5**: 55. DOI: 10.1038/s41534-019-0159-6.
- [21] CHIU C K, TEO J C, SCHNYDER A P, *et al.* Classification of Topological Quantum Matter with Symmetries

- [J]. *Rev Mod Phys*, 2016, **88**(3): 035005. DOI: 10.1103/revmodphys.88.035005.
- [22] RYU S, SCHNYDER A P, FURUSAKI A, *et al.* Topological Insulators and Superconductors: Tenfold Way and Dimensional Hierarchy[J]. *New J Phys*, 2010, **12**(6): 065010. DOI: 10.1088/1367-2630/12/6/065010.
- [23] MONDRAGON-SHEM I, HUGHES T L, SONG J T, *et al.* Topological Criticality in the Chiral-symmetric AIII Class at Strong Disorder[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, **113**(4): 046802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.046802.
- [24] XU Z H, CHEN S. Dynamical Evolution in a One-dimensional Incommensurate Lattice with PT Symmetry [J]. *Phys Rev A*, 2021, **103**(4): 043325. DOI: 10.1103/physreva.103.043325.
- [25] LI X, DAS SARMA S. Mobility Edge and Intermediate Phase in One-dimensional Incommensurate Lattice Potentials[J]. *Phys Rev B*, 2020, **101**(6): 064203. DOI: 10.1103/physrevb.101.064203.
- [26] WANG Y C, ZHANG L, NIU S, *et al.* Realization and Detection of Nonergodic Critical Phases in an Optical Raman Lattice[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(7): 073204. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.073204.