山西大学学报(自然科学版)47(4):699－703,2024
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024080

一类黏弹性波动方程解爆破时间的下界

刘玉龙
(太原师范学院 数学与统计学院,山西 晋中 030619)

摘　要:文章研究了一类黏弹性波动方程解在有限时间内爆破的问题,当研究的目标方程解存在爆破时,准确估计爆破时间的下界是本文需要解决的关键问题。通过适当的能量模估计以及定义辅助函数等技术方法,得到了带有黏弹项波动方程解爆破时间的下界。

关键词:辅助函数法;能量模估计;非线性阻尼
中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0253-2395(2024)04-0699-05

Lower Bounds for Blow-up Time of Solutions for a Viscoelastic Wave Equation

LIU Yulong
(*School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong* 030619, *China*)

Abstract: The article studies the problem of blow-up in finite time for a class of viscoelastic wave equations. When the solution of the target equation blow up, accurately estimating the lower bound of the blow-up time is a key issue that needs to address. By employing suitable energy mode estimation and defining auxiliary functions, we obtains the lower bound of the blow-up time of the solution to wave equations with viscoelastic terms.

Key words: auxiliary function method; energy mode estimation; nonlinear damping

0　引言

本文考虑的黏弹性波动方程如下:

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau+u_t|u_t|^{m-2}=u|u|^{p-2}, (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u(x,t)=0, x\in\partial\Omega, t\geqslant 0, \\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中Ω是$R^n(n\geqslant 2)$中的有界区域,且具有光滑边界$\partial\Omega$,$p>2$,$m\geqslant 1$,$T>0$,g是$R^+\rightarrow R^+$的单调递减函数。

有关黏弹性波动方程的问题一般出现在材料科学和物理学,一直是偏微分方程研究领域的热点问题。纯粹的弹性材料在没有能量耗散时,能够储存机械能。与此相反的材料称为黏性材料。黏性材料最主要的特点是当外力消失时,这种材料不能恢复原状。介于这两种材料之间的材料在发生形变后不能完全恢复原状,它可以储存和耗散能量,此种情况下这种材料就叫黏弹性材料。黏弹性材料这种既可存储又可耗散能量的动态特性已被应用到许多自然科学领域。特别是近二

收稿日期:2024-01-24;**接受日期**:2024-05-20
基金项目:山西省高等学校科技创新项目(20221_406)
作者简介:刘玉龙(1990-),男,山西临汾人,博士,讲师,研究方向为偏微分方程控制理论。E-mail:Liuylmath@139.com
引文格式:刘玉龙.一类黏弹性波动方程解爆破时间的下界[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(4):699-703. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024080

十年以来,此类问题一直被研究人员关注并且已取得进一步进展。文献[1]研究了方程(1)更一般的形式,证明了当$p>m$时具有负初始能量的解爆破结果,以及当$p\leqslant m$时解全局存在结果。这一结果被文献[2]推广到具有正初始能量情形。在文献[3]中,作者得到解局部存在的结果,并证明了如果初值足够小时,局部解是全局存在且是均匀衰减。其他有关黏弹性波动方程解存在和衰减结果可以参考文献[4-7]。

众所周知,偏微分方程解的稳定性会受到阻尼、源项以及初值等条件的影响。当方程中存在黏弹性阻尼时,研究其解的爆破对材料科学具有十分重要的实际意义。当波动方程的解发生爆破时,准确计算爆破时间有一定的技术难度。因此,在具体的工程实践中,估计出爆破时间的上、下界就具有了非常迫切的实践价值。在有关方程解爆破的研究中,一般都可以估计得到爆破时间的上界。鉴于此,本文主要研究的科学问题是通过适当的不等式以及能量模估计技术得到目标方程(1)的解$u(t)$爆破时间T的下界。

对于黏弹性波动方程解的爆破问题的研究,近年来取得许多研究进展。Song在文献[8]中利用矛盾法证明了问题(1)的爆破结果。Kafini等在文献[9]中利用凸性分析法证明了带有强阻尼和频散的黏弹性波动方程解的爆破。但以上文献都没有考虑爆破时间界限的问题。有关爆破时间上、下界的研究近年来成为许多研究者关注的热点问题。武洁琼等在文献[10]中主要研究了一类耦合非线性波动方程解在有限时间T内爆破,并且通过不等式估计和定义辅助函数等技术得到了T的上界,但对T的下界没有进一步研究。Philippin在文献[11]主要考虑了一类非线波动方程解在有限时间T内爆破,并得到了解发生时爆破时间T的下界。最近几年,文献[12]研究了一类非线性波动方程解的爆炸和爆破时间的估计并通过应用时空截断函数等技术方法得到了爆破时间的上界。文献[13]研究了一类对数非线性阻尼板方程解的爆破,通过势井理论等方法得到解的爆破结果,与此同时还推导了次临界、临界、超临界和超超临界情况下的爆破时间的下界。其他有关黏弹性波动方程解爆破时间上下界的研究可以参考文献[14]。在文献[8]方程解爆破结果的基础上,本文将进一步通过适当的不等式和能量模等估计技术得到目标方程(1)解爆破时间T的下界。

在这篇文章中,用$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_p$分别表示空间$L^2(\Omega)$与$L^p(\Omega)$的模。系统(1)的能量及其导数为

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{p}\|u\|_p^p,$$

$$E'(t)=-\int_\Omega|u_t|^m\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\int_\Omega\left|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega\left|\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

其推导过程将在下文的定理3中给出。

1 相关定理及引理

首先,我们给出问题(1)解的存在性定理和爆破结果。

定理1[15] 假设$(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$,函数$g\in C^1$且满足

$$1-\int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s=l>0, \tag{2}$$

而且$m>2$,p满足

$$\begin{cases}2<p<\infty, & n=2,\\ 2<p<\dfrac{2(n-1)}{n-2}, & n\geqslant 3,\end{cases} \tag{3}$$

则问题(1)对所有T_m有唯一的局部解

$$u\in C\left([0,T_m);H_0^1(\Omega)\right),\ u_t\in C\left([0,T_m);L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(\Omega\times[0,T_m]\right)。$$

定理2[8] 假设$m>2$,$p>\max\{2,m\}$满足公式(3)并且函数$g\in C^1$满足

$$g(s)\geqslant 0,\ g'(s)\leqslant 0, \tag{4}$$

$$\int_0^{\infty} g(s)\mathrm{d}s<\frac{\frac{p}{2}-1}{\frac{p}{2}-1+\frac{1}{2p}}=1-\frac{1}{(p-1)^2}。\tag{5}$$

若$u(t)$是问题(1)的解,满足

$$\int_{\Omega} u(0)u_t(0)\mathrm{d}x>ME(0)>0, \tag{6}$$

则$u(t)$在有限时间T内爆破,其中

$$M=\frac{m-1}{m}\left(\frac{1-\theta}{\varepsilon p}\right)^{\frac{1}{m-1}},\varepsilon\in(0,1),\theta=\frac{p-m}{p-2}。$$

为了获得问题(1)解爆破时间的下界,我们有以下引理。

引理1[11] 假设Ω是$R^n(n\geqslant 2)$中的有界区域,且具有光滑边界。若$u(x)$在Ω上满足$u\in C^1$,且在$\partial\Omega$上$u(x)=0$,则

$$\int_{\Omega} u^{2p}\mathrm{d}x\leqslant\delta\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^p,$$

其中:$n=2$时$p>1$,$n\geqslant 3$时$1<p<\dfrac{n}{n-2}$,$\delta=\left(\dfrac{n-1}{n^{2/3}}\right)^{2p}|\Omega|^{1-\frac{n-2}{n}p}$。

2 主要结果及证明

在这一部分,文章的主要结果将被给出,通过下面的定理,方程(1)解的爆破时间下界将被估计。

定理3 假设$u(x,t)$是方程(1)的解,当p满足

$$\begin{cases} p>2, & n=2,\\ 2<p<\dfrac{n}{n-2}, & n\geqslant 3,\end{cases}$$

方程(1)的解$u(x,t)$在有限时间T内爆破,并且对爆破时间T有如下估计

$$T\geqslant\int_{F(0)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{2^{2p-4}p^{2-p}\frac{\delta}{l^{p-1}}y^{p-1}+y+pE(0)+2^{2p-4}p\frac{\delta}{l^{p-1}}\big(E(0)\big)^{p-1}},$$

其中 $F(0)=\int_{\Omega}|u_0|^p\mathrm{d}x$, $E(0)=\frac{1}{2}\|u_1\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2-\frac{1}{p}\|u_0\|_p^p$, $\delta=\left(\frac{n-1}{n^{2/3}}\right)^{2(p-1)}|\Omega|^{1-\frac{(n-2)(p-1)}{n}}$, $l=1-\int_0^{\infty}g(s)\mathrm{d}s$。

证明 在问题(1)的方程两边同时乘以u_t,并在Ω上积分得

$$\int_{\Omega}u_{tt}u_t\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\Delta u\,u_t\mathrm{d}x+\int_{\Omega}u_t\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|u_t|^m\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|u|^{p-2}uu_t\mathrm{d}x,$$

利用格林公式和分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|u_t|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_0^t g(t-\tau)\int_{\Omega}\nabla u_t\nabla u(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_{\Omega}|u_t|^m\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x, \tag{7}$$

再对等式(7)右边第三项化简

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=$$

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=$$

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t(t)\big(\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau= \tag{8}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_0^t g(t-\tau)\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\tau=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega\left|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right]+\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\int_\Omega\left|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t g(\tau)\int_\Omega\left|\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]-g(t)\int_\Omega\left|\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x,$$

把公式(8)代入公式(7)整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{p}\|u\|_p^p\right)=$$

$$-\int_\Omega|u_t|^m\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\int_\Omega\left|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega\left|\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x, \tag{9}$$

其中$(g\circ v)=\int_0^t g(t-\tau)\|v(t)-v(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau$。由公式(9)可得

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{p}\|u\|_p^p, \tag{10}$$

$$E'(t)=-\int_\Omega|u_t|^m\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\int_\Omega\left|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega\left|\nabla u(t)\right|^2\mathrm{d}x\leqslant 0。$$

因为$E'(t)\leqslant 0$,所以$E(t)$单调递减,则我们有

$$E(0)\geqslant E(t)。 \tag{11}$$

再由公式(10)和公式(11),我们可以得到

$$E(0)+\frac{1}{p}\|u\|_p^p\geqslant\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)。 \tag{12}$$

接下来我们定义辅助函数

$$F(t)=\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x,$$

关于t求导可得

$$F'(t)=p\int_\Omega|u|^{p-2}uu_t\mathrm{d}x,$$

利用Cauchy不等式和引理1可得

$$F'(t)\leqslant\frac{p}{2}\left(\int_\Omega|u|^{2(p-1)}\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_t|^2\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{p}{2}\left(\|u_t\|_2^2+\delta\|\nabla u\|_2^{2(p-1)}\right), \tag{13}$$

再根据公式(9)可得

$$F'(t)\leqslant\frac{p}{2}\left(2E(0)+\frac{2}{p}F(t)+\frac{\delta}{l^{p-1}}\left(2E(0)+\frac{2}{p}F(t)\right)^{p-1}\right)\leqslant$$

$$\frac{p}{2}\left(2E(0)+\frac{2}{p}F(t)+\frac{\delta}{l^{p-1}}2^{p-2}\left(\big(2E(0)\big)^{p-1}+\left(\frac{2}{p}F(t)\right)^{p-1}\right)\right)= \tag{14}$$

$$2^{2p-4}p^{2-p}\frac{\delta}{l^{p-1}}F^{p-1}(t)+F(t)+pE(0)+2^{2p-4}p\frac{\delta}{l^{p-1}}\big(E(0)\big)^{p-1}。$$

因为 $\lim\limits_{t\to T^-}F(t)=\infty$，所以由公式(14)可得

$$T\geqslant\int_{F(0)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{2^{2p-4}p^{2-p}\frac{\delta}{l^{p-1}}y^{p-1}+y+pE(0)+2^{2p-4}p\frac{\delta}{l^{p-1}}\left(E(0)\right)^{p-1}},$$

证毕。

3 结论

在这篇文章中，估计了目标方程系统解爆破时间的下界，与已有结果相对比，目标方程解爆破时间的上下界都已估计出来，完善了已有结果，为具体的工程实践问题提供了新的方法和思路。但由于方法和技术的局限性，本篇文章的下界估计并非最优，因此对目标系统的爆破时间更精确的估计还有待进一步研究。

参考文献：

[1] MESSAOUDI S A. Blow up and Global Existence in a Nonlinear Viscoelastic Wave Equation[J]. *Math Nachr*, 2003, **260**(1): 58-66. DOI: 10.1002/mana.200310104.

[2] MESSAOUDI S A. Blow-up of Positive-initial-energy Solutions of a Nonlinear Viscoelastic Hyperbolic Equation[J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **320**(2): 902-915. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.07.022.

[3] BERRIMI S, MESSAOUDI S A. Existence and Decay of Solutions of a Viscoelastic Equation with a Nonlinear Source[J]. *Nonlinear Anal*, 2006, **64**(10): 2314-2331. DOI: 10.1016/j.na.2005.08.015.

[4] CAVALCANTI M M, DOMINGOS CAVALCANTI V N, MARTINEZ P. General Decay Rate Estimates for Viscoelastic Dissipative Systems[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **68**(1): 177-193. DOI: 10.1016/j.na.2006.10.040.

[5] CAVALCANTI M M, OQUENDO H P. Frictional Versus Viscoelastic Damping in a Semilinear Wave Equation[J]. *SIAM J Contr Optim*, 2003, **42**(4): 1310-1324. DOI: 10.1137/S0363012902408010.

[6] MESSAOUDI S A, TATAR N E. Exponential and Polynomial Decay for a Quasilinear Viscoelastic Equation[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **68**(4): 785-793. DOI: 10.1016/j.na.2006.11.036.

[7] MUÑOZ RIVERA J E, LAPA E C, BARRETO R. Decay Rates for Viscoelastic Plates with Memory[J]. *J Elast*, 1996, **44**(1): 61-87. DOI: 10.1007/BF00042192.

[8] SONG H T. Blow up of Arbitrarily Positive Initial Energy Solutions for a Viscoelastic Wave Equation[J]. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2015, **26**: 306-314. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2015.05.015.

[9] KAFINI M, MUSTAFA M I. Blow-up Result in a Cauchy Viscoelastic Problem with Strong Damping and Dispersive[J]. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2014, **20**: 14-20. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.04.005.

[10] WU J Q, LI S J. Blow-up for Coupled Nonlinear Wave Equations with Damping and Source[J]. *Appl Math Lett*, 2011, **24**(7): 1093-1098. DOI: 10.1016/j.aml.2011.01.030.

[11] PHILIPPIN G A. Lower Bounds for Blow-up Time in a Class of Nonlinear Wave Equations[J]. *Z Für Angew Math Und Phys*, 2015, **66**(1): 129-134. DOI: 10.1007/s00033-014-0400-2.

[12] LAI N A, ZHOU Y. Blow-up and Lifespan Estimate to a Nonlinear Wave Equation in Schwarzschild Spacetime[J]. *J Math Pure Appl*, 2023, **173**: 172-194. DOI: 10.1016/j.matpur.2023.02.009.

[13] LI X T, FANG Z B. Blow-up Phenomena for a Damped Plate Equation with Logarithmic Nonlinearity[J]. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2023, **71**: 103823. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2022.103823.

[14] LIU W J, ZHU B Q, LI G. Upper and Lower Bounds for the Blow-up Time for a Viscoelastic Wave Equation with Dynamic Boundary Conditions[J]. *Quaest Math*, 2020, **43**(8): 999-1017. DOI: 10.2989/16073606.2019.1595768.

[15] GEORGIEV V, TODOROVA G. Existence of a Solution of the Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms[J]. *J Differ Equ*, 1994, **109**(2): 295-308. DOI: 10.1006/jdeq.1994.1051.