

广义扇图和广义轮图的顶点PI指数和加权顶点PI指数

陈建华,高玉斌*

(中北大学 数学学院,山西 太原 030051)

摘要:本文解决了广义扇图和广义轮图的顶点Padmakar-Ivan指数(PI指数)和加权顶点PI指数的计算问题。首先,根据图结构的对称性对图的顶点和边进行划分,利用分类讨论的方法对不同类边对应顶点的距离进行探究,得到其顶点PI指数。其次,利用顶点PI指数和加权顶点PI指数的关联,研究相应顶点的度并刻画出该类图的加权顶点PI指数。

关键词:拓扑指数;PI指数;扇图;轮图

中图分类号:O157.5 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2025)02-0358-09

Vertex PI and Weighted Vertex PI Indices for Generalized Fan Graphs and Generalized Wheel Graphs

CHEN Jianhua, GAO Yubin*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: In this paper, we solve the problem of computing vertex PI indices and weighted vertex PI indices for generalized fan graphs and generalized wheel graphs. Firstly, the vertices and edges of the graphs are divided according to the symmetry of the graph structure, and the distances of different types of edges corresponding to the vertices are explored by using the method of categorical discussion to obtain their vertex PI indices. Secondly, using the association between vertex PI index and weighted vertex PI index, the degree of the corresponding vertex is investigated and the weighted vertex PI index of this type of graph is inscribed.

Key words: Topological index; PI index; fan graph; wheel graph

0 引言

本文所考虑的图均为无向连通简单图。设 $G=(V, E)$ 是一个图,其顶点集和边集分别为 $V=V(G)$ 和 $E=E(G)$ 。用 $N_G(u)^{[1]}$ 表示顶点 u 的邻点集, $d_G(u)$ 表示顶点 u 在图 G 中的度,则 $d_G(u)=|N_G(u)|$ 。 $d_G(u, v)$ 表示图 G 中边 e 的两个顶点 u 和 v 之间的距离,即图 G 中连接边 e 的两个端点 u 和 v 的一条最短路径所包含的边数。

分子拓扑指数是图的一类重要参数,也是图论中重要的研究课题之一,在理论化学中有较为广泛的应用。图的Padmakar-Ivan指数(简称PI指数)是Padmakar^[2]于2000年提出的,用来评估Szeged指数和Wiener指数。图的顶点PI指数是Khalifeh等^[3]于2008年提出的,它表示对于图中每一条边,求出到该边的两个顶点的距离不相等的顶点个数,然后将所得结果对所有边求和。该指数与聚并

收稿日期:2023-11-27;接受日期:2024-05-15

基金项目:山西省回国留学人员科研资助项目(2022-149)

作者简介:陈建华(1997-),女,山西朔州人,硕士研究生,研究方向为图论及其应用。E-mail:chenjianhua6708@163.com

* 通信作者:高玉斌(GAO Yubin),E-mail:ybgao@nuc.edu.cn

引文格式:陈建华,高玉斌.广义扇图和广义轮图的顶点PI指数和加权顶点PI指数[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(2):358-366. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024083.

苯、螺烯、聚苯等多样化复杂化合物的性质(定量结构-性质关系, Quantitative Reticulum Property Relationship 简称为 QRPR), 毒性(定量结构-毒性关系, Quantitative Structure Toxicity Relationship, 简称为 QSTR) 和有机分子活性(定量构效关系, Quantitative Structure Activity Relationship, 简称为 QSAR) 等理化性质和生物活性密切相关^[4]。很多专家学者对 PI 指数的研究取得了可观的成果, 推动 PI 指数研究领域的蓬勃发展, 如 Deng 等^[5]给出了亚苯基的 PI 指数的计算公式, Xu 等^[6]研究了多氨基链的 PI 指数, Bokhary 等^[7]给出了特定三角剖分网络的顶点 PI 指数。近年来, 对 PI 指数的研究已不仅限于顶点 PI 指数和边 PI 指数, 如 Ilić 和 Milosavljević^[8]提出了加权顶点 PI 指数, 它表示对于图中每一条边, 将到该边的两个顶点的距离不相等的顶点个数与该边两个顶点的度之和相乘, 然后将所得结果对所有边求和。该指数能够更好地反映图的多样性特征, 近年来很多专家对其展开研究, 如 Manju 等^[9]给出了路图、圈图及其补图幂的 PI 指数和加权 PI 指数, Ma 等^[10-12]研究了双圈图、三圈图以及仙人掌图的加权 PI 指数的界, 使图的加权 PI 指数的研究内容也越来越丰富。

扇图和轮图的许多特性已被研究, 如何丽丽等^[13]研究了扇图的 PI 指数, 给出了相应的计算公式, Lin 等^[14]研究了轮图和扇图的拉普拉斯谱特征; 吕新忠和仪明源^[15]研究了星图、扇图、轮图的符号控制数。徐保根等^[16]于 2015 年推广了轮图的概念, 引出了广义轮图, 随后很多专家学者加入了广义轮图的研究行列, 如温一慧^[17]研究了广义轮图的友好性, 推动了广义轮图的研究进程。

在综合上述已有研究工作的基础上, 本文推广了扇图的概念, 引出了广义扇图, 并得到了广义轮图和广义扇图的顶点 PI 指数和加权 PI 指数的计算公式, 此研究内容可以启发进一步探索一些对称性较强的图类有关距离和度的拓扑指数问题。

本文第一部分介绍了相关术语和符号, 在第二部分中研究了广义扇图和广义轮图的顶点 PI 指数和加权顶点 PI 指数, 根据这两类图的对称性及其他结构特性, 分别给出了它们的顶点 PI 指数和加权顶点 PI 指数的计算公式。

1 基本概念

定义 1^[3] 设 $G=(V, E)$ 为一个图, 称 $I_{Pl, v}(G) = \sum_{e=uv \in E} (n_u(e|G) + n_v(e|G))$ 为图 G 的顶点 PI 指数, 其中 $n_u(e|G)$ 表示图 G 中到边 $e=uv$ 的端点 u 的距离小于到端点 v 的距离的顶点数。

定义 2^[8] 设 $G=(V, E)$ 为一个图, 图 G 的加权顶点 PI 指数定义为

$$I_{Pl, w}(G) = \sum_{e=uv \in E} (d_G(u) + d_G(v))(n_u(e|G) + n_v(e|G)).$$

若用 $n(e|G)$ 表示图 G 中到边 $e=uv$ 的端点 u 的距离不等于到端点 v 的距离的顶点数, 则图 G 的顶点 PI 指数及加权顶点 PI 指数可分别表示为

$$I_{Pl, v}(G) = \sum_{e=uv \in E} n(e|G),$$

$$I_{Pl, w}(G) = \sum_{e=uv \in E} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G).$$

定义 3 $F(n, m)$ 表示有 $n(n \geq 1)$ 条圆弧, 且每条弧上都有 $m(m \geq 3)$ 个点的广义扇图。图 1 给出的是 $n=2, m=3$ 的广义扇图 $F(2, 3)$ 。

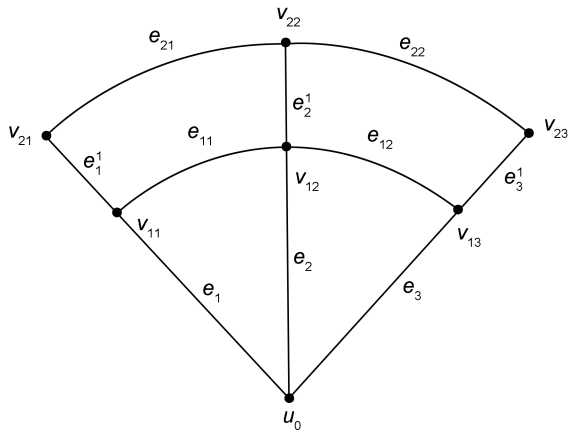
定义 4^[16] $W(n, m)$ 表示有 $n(n \geq 2)$ 层圈, 且每个圈上都有 $m(m \geq 3)$ 个点的广义轮图。图 2 给出的是 $n=2, m=5$ 的广义轮图 $W(2, 5)$ 。

2 主要结果

定理 1 设 $G=F(n, m)$ 为广义扇图, $n \geq 1, m \geq 3$, 则

$$I_{Pl, v}(G) = 2m^2n^2 - mn^2 - mn + 2n.$$

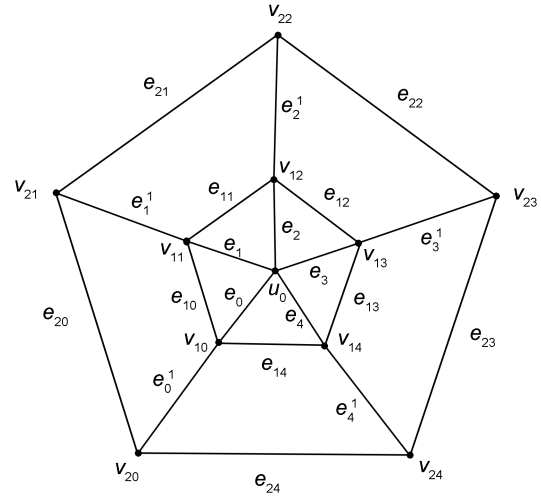
证明 由广义扇图的定义可知, $|V(G)| = mn + 1, |E(G)| = n(m - 1) + mn = 2mn - n$ 。记



注: u_0, v_{1i}, v_{2i} 是对扇图中不同顶点的标号; e_i 是连接顶点 u_0 和 v_{1i} 构成的边; e_i^1 是连接顶点 v_{1i} 和 v_{2i} 构成的边; e_{ij} 是连接顶点 v_{1i} 和 $v_{1(i+1)}$ 构成的边; e_{2i} 是连接顶点 v_{2i} 和 $v_{2(i+1)}$ 构成的边 ($i=1, 2, 3$)。

图1 广义扇图 $F(2,3)$

Fig. 1 The generalized fan graph $F(2,3)$



注: u_0, v_{1i}, v_{2i} 是对轮图中不同顶点的标号; e_i 是连接顶点 u_0 和 v_{1i} 构成的边; e_i^1 是连接顶点 v_{1i} 和 v_{2i} 构成的边; e_{ij} 是连接顶点 v_{1i} 和 $v_{1(i+1)}$ 构成的边; e_{2i} 是连接顶点 v_{2i} 和 $v_{2(i+1)}$ 构成的边 ($i=0, 1, 2, 3, 4$)。

图2 广义轮图 $W(2,5)$

Fig. 2 The generalized wheel graph $W(2,5)$

$V(G) = \{u_0, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1m}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m}, \dots, v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nm}\}$, $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, 其中 $E_1 = \{e_i = u_0 v_{1i} | 1 \leq i \leq m\}$, $E_2 = \{e_{ij} = v_{1i} v_{1,j+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$, $E_3 = \{e_i^k = v_{1i} v_{k+1,l} | 1 \leq k \leq n-1, 1 \leq l \leq m\}$ 。则由广义扇图 $F(n,m)$ 的对称性以及顶点PI指数的定义可得

$$I_{PI, v}(G) = \sum_{e=uv \in E} n(e|G) = \sum_{e=uv \in E_1} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} n(e|G).$$

(1) 对于边集 E_1 , 易知 $|E_1| = m$ 。由分析可得, 对于任意 $e_i = u_0 v_{1i} \in E_1$:

当 $i=1$ 时, 令 $V_{11} = \{v_{12}, v_{22}, v_{32}, \dots, v_{n2}\}$, 则对任意的顶点 $w \in V(G)$, 当且仅当 $w \in V(G) \setminus V_{11}$, $d_G(w, u_0) \neq d_G(w, v_{11})$, 故 $n(e_1|G) = mn - n + 1$ 。

当 $i=m$ 时, 令 $V_{12} = \{v_{1,m-1}, v_{2,m-1}, \dots, v_{n,m-1}\}$, 则对任意的顶点 $w \in V(G)$, 当且仅当 $w \in V(G) \setminus V_{12}$, $d_G(w, u_0) \neq d_G(w, v_{1m})$, 此时与 $i=1$ 时类似, $n(e_m|G) = mn - n + 1$ 。

当 $i \neq 1, m$ 时, 令 $V_{13} = \{v_{1,i-1}, v_{2,i-1}, \dots, v_{n,i-1}, v_{1,i+1}, v_{2,i+1}, \dots, v_{n,i+1}\}$, 对任意的顶点 $w \in V(G)$, 当且仅当 $w \in V(G) \setminus V_{13}$, $d_G(w, u_0) \neq d_G(w, v_{1i})$, 此时有 $n(e_i|G) = mn - 2n + 1$ 。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_1} n(e|G) = 2(mn - n + 1) + (m-2)(mn - 2n + 1) = m^2n - 2mn + m + 2n.$$

(2) 对于边集 E_2 , 易知 $|E_2| = mn - n$ 。由分析可得, 对任意 $e_{ij} = v_{1i} v_{1,j+1} \in E_2$ 及 $w \in V(G)$, 当且仅当顶点 $w \in V(G) \setminus \{u\}$ 时, $d_G(w, v_{1i}) \neq d_G(w, v_{1,j+1})$ 。此时有 $n(e_{ij}|G) = mn + 1 - 1 = mn$ 。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = (mn - n)mn = m^2n^2 - mn^2.$$

(3) 对于边集 E_3 , $|E_3| = mn - m$ 。由分析可得, 对任意 $e_i^k = v_{1i} v_{k+1,l} \in E_3$ 及 $w \in V(G)$, $d_G(w, v_{1i}) \neq d_G(w, v_{k+1,l})$ 。此时 $n(e_i^k|G) = mn + 1$ 。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_3} n(e|G) = (mn - m)(mn + 1) = m^2n^2 - m^2n + mn - m.$$

综上所述, 有

$$I_{PI, v}(G) = \sum_{e=uv \in E_1} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} n(e|G) =$$

$$(m^2n - 2mm + m + 2n) + (m^2n^2 - mm^2) + (m^2n^2 - m^2n + mm - m) = 2m^2n^2 - mm^2 - mn + 2n。$$

定理1证毕。

定理2 设 $G = F(n, m)$ 为广义扇图且 $n \geq 1, m \geq 3$, 则其加权顶点PI指数

$$I_{PI, w}(G) = m^3n + 16m^2n^2 - 9m^2n + m^2 - 14mn^2 + 6mn - 5m + 6n + 2。$$

证明 设 $G = F(n, m)$ 为广义扇图, 对其顶点和边的定义同定理1。由广义扇图 G 的对称性以及加权顶点PI指数的定义可得

$$I_{PI, w}(G) = \sum_{e=uv \in E} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = \sum_{e=uv \in E_1} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G)。$$

在定理1的证明中, 已经对广义扇图中任意一条边 e , 计算出了 $n(e|G)$, 下面对广义扇图中任意一条边 e 的两个顶点 u 和 v 的度 $d_G(u)$ 和 $d_G(v)$ 进行研究分析。

(1) 对于边集 E_1 , 由分析可知, 任意 $e_i = u_0v_{i1} \in E_1$, 顶点 u_0 的度 $d_G(u) = m$; 当 $i = 1$ 或 $i = m$ 时, $d_G(v_{i1}) = 3$, 当 $i \neq 1, m$ 时, $d_G(v_{i1}) = 4$ 。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_1} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = 2(m+3)(mn - n + 1) + (m-2)(m+4)(mn - 2n + 1) = m^3n + 2m^2n + m^2 - 8mn + 4m + 10n - 2。$$

(2) 对于边集 E_2 , 由分析可知, 任意的 $e_{ij} = v_{ij}v_{i,j+1} \in E_2$, 其对应顶点的度及相应边的情况如表1所示。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = 2(3+4)(n-1)mn + (4+4)(m-3)(n-1)mn + 2(2+3)mn + (3+3)(m-3)mn = 8m^2n^2 - 2m^2n - 10mn^2 + 2mm。$$

表1 边集 E_2 中边对应顶点的度及相应边的数目

Table 1 Degree of vertices and number of edges in an edge set E_2

$i; j$	$d_G(v_{ij})$	$d_G(v_{i,j+1})$	$ e_{ij} $
$j=1, i \neq n$	3	4	$n-1$
$j=m-1, i \neq n$	4	3	$n-1$
$j \neq 1, m-1; i \neq n$	4	4	$(m-3)(n-1)$
$j=1, i=n$	2	3	1
$j=m-1, i=n$	3	2	1
$j \neq 1, m-1; i=n$	3	3	$m-3$

注: $|e_{ij}|$ 表示对应边的数目。

(3) 对于边集 E_3 , 与情况(2)类似, 对任意 $e_l^k = v_{kl}v_{k+1,l} \in E_3$, 容易计算得

$$\sum_{e=uv \in E_3} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = 2(3+3)(n-2)(mn+1) + (4+4)(m-2)(n-2)(mn+1) + 2(2+3)(mn+1) + (3+4)(m-2)(mn+1) = 8m^2n^2 - 9m^2n - 4mn^2 + 12mn - 9m - 4n + 4。$$

综上所述, 有

$$I_{PI, w}(G) = \sum_{e=uv \in E} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = \sum_{e=uv \in E_1} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = (m^3n + 2m^2n + m^2 - 8mn + 4m + 10n - 2) + (8m^2n^2 - 2m^2n - 10mn^2 + 2mm) +$$

$$(8m^2n^2 - 9m^2n - 4mn^2 + 12mn - 9m - 4n + 4) = m^3n + 16m^2n^2 - 9m^2n + m^2 - 14mn^2 + 6mn - 5m + 6n + 2。$$

定理2证毕。

定理3 设 $W(n, m)$ 为广义轮图且 $n \geq 2, m \geq 3$, 则

$$I_{PI, v}(W(n, m)) = \begin{cases} \frac{4}{3}mn^3 + m^2n^2 + 2mn^2 - \frac{1}{3}mn, & \text{若 } n \leq \frac{m}{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{1}{2}m^2n - mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 0 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{3}{4}m^2n - \frac{13}{8}mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 1 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{3}{2}mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 2 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{3}{4}m^2n - \frac{17}{8}mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 3 \pmod{4}。 \end{cases}$$

证明 设 $G = W(n, m)$ 为广义轮图(下文中出现的所有顶点 v_{kl} 的第二个下标 l 均按取模 m 对待), $V(G) = \{u_0, v_{10}, v_{11}, \dots, v_{1, m-1}, v_{20}, v_{21}, \dots, v_{2, m-1}, \dots, v_{n0}, v_{n1}, \dots, v_{n, m-1}\}, E(G) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, 其中

$$E_1 = \{e_i = u_0v_{1i} | 0 \leq i \leq m-1\},$$

$$E_2 = \{e_{ij} = v_{ij}v_{i, j+1} | 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m-1\},$$

$$E_3 = \{e_i^k = v_{kl}v_{k+1, l} | 1 \leq k \leq n-1, 0 \leq l \leq m-1\}。$$

从而有 $|E_1| = m, |E_2| = mn, |E_3| = mn - m$ 。

由广义轮图 G 的定义可知, $|V(G)| = mn + 1, |E(G)| = 2mn$ 。又由顶点 PI 指数的定义可得

$$I_{PI, v}(G) = \sum_{e=uv \in E} n(e|G) = \sum_{e=uv \in E_1} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} n(e|G)。$$

(1) 对于边集 E_1 , 易知 $|E_1| = m$ 。令 $V_{31} = \{v_{1, i-1}, v_{2, i-1}, \dots, v_{n, i-1}, v_{1, i+1}, v_{2, i+1}, \dots, v_{n, i+1}\}$, 由分析易得, 对于任意 $e_i = u_0v_{1i} \in E_1$ 及 $w \in V(G)$, 当且仅当 $w \in V(G) \setminus V_{31}, d_G(w, u_0) \neq d_G(w, v_{1i})$, 此时有 $n(e_i|G) = mn - 2n + 1$ 。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_1} n(e|G) = m(mn - 2n + 1) = m^2n - 2mn + m。$$

(2) 对于边集 $E_3, |E_3| = m(n-1) = mn - m$ 。分析可得, 对任意 $e_i^k = v_{kl}v_{k+1, l} \in E_3$ 及 $w \in V(G), d_G(w, v_{kl}) \neq d_G(w, v_{k+1, l})$, 此时有 $n(e_i^k|G) = mn + 1$ 。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_3} n(e|G) = (mn - m)(mn + 1) = m^2n^2 - m^2n + mn - m。$$

(3) 对于边集 $E_2, |E_2| = mn$ 。由分析易得, 对任意 $e_{ij} = v_{ij}v_{i, j+1} \in E_2$,

当 $n \leq \frac{m}{4}$ 时, 令

$$V_{32} = \{v_{1, j-2i+1}, v_{1, j-2i+2}, \dots, v_{1, j+2i}, v_{2, j-2i+1}, v_{2, j-2i+2}, \dots, v_{2, j+2i}, \dots, v_{n, j-2i+1}, v_{n, j-2i+2}, \dots, v_{n, j+2i}\},$$

$$V_{33} = \{v_{1, j-2i+1}, v_{1, j-2i+2}, \dots, v_{1, j-2}, v_{1, j+3}, v_{1, j+4}, \dots, v_{1, j+2i}, v_{2, j-2i+1}, v_{2, j-2i+2}, \dots, v_{2, j-4}, v_{2, j+5}, v_{2, j+6}, \dots, v_{2, j+2i}, \dots, v_{i-1, j-2i+1}, v_{i-1, j-2i+2}, v_{i-1, j+2i-1}, v_{i-1, j+2i}\},$$

则 $|V_{32}| = 4ni, |V_{33}| = \frac{i[0 + 4(i-1)]}{2} = 2i^2 - 2i$ 。对任意顶点 $w \in V(G)$, 当且仅当 $w \in V_{32} \setminus V_{33}, d_G(w, v_{ij}) \neq d_G(w, v_{i, j+1})$ 。从而有

$$\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = m \sum_{i=1}^n [4ni - (2i^2 - 2i)] = \frac{4}{3}mn^3 + 2mn^2 + \frac{2}{3}mn。$$

当 $n > \frac{m}{4}$ 时, 按照 m 除以 4 所得余数的不同(如: $m = 1 \pmod{4}$ 表示 m 除以 4 所得余数为 1), 分为以下四种情形讨论:

情形 1 若 $m = 1 \pmod{4}$, 令

$$V_{34} = \left\{ v_{1,j-\frac{m-1}{2}}, v_{1,j-\frac{m-3}{2}}, \dots, v_{1,j+\frac{m-1}{2}}, v_{2,j-\frac{m-1}{2}}, v_{2,j-\frac{m-3}{2}}, \dots, v_{2,j+\frac{m-1}{2}}, \dots, v_{n,j-\frac{m-1}{2}}, v_{n,j-\frac{m-3}{2}}, \dots, v_{n,j+\frac{m-1}{2}} \right\};$$

$$V_{35} = \left\{ v_{1,j-\frac{m-3}{2}}, v_{1,j-\frac{m-5}{2}}, \dots, v_{1,j-2}, v_{1,j+3}, v_{1,j+4}, \dots, v_{1,j+\frac{m-1}{2}}, v_{2,j-\frac{m-3}{2}}, v_{2,j-\frac{m-1}{2}}, \dots, v_{2,j-4}, v_{2,j+5}, v_{2,j+6}, \dots, v_{2,j+\frac{m-1}{2}}, \dots, v_{i-1,j-\frac{m-3}{2}}, v_{i-1,j-\frac{m-5}{2}}, v_{i-1,j+\frac{m-3}{2}}, v_{i-1,j+\frac{m-1}{2}} \right\},$$

则 $|V_{35}| = \frac{1}{2} \times \frac{m-5}{4} (4+m-5) = \frac{1}{8} m^2 - \frac{3}{4} m + \frac{5}{8}$, $|V_{34}| = mn$ 。对任意顶点 $w \in V(G)$, 当且仅当 $w \in V_{34} \setminus V_{35}$, $d_G(w, v_{ij}) \neq d_G(w, v_{i,j+1})$ 。则有

$$\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = mn \left[mn - \left(\frac{1}{8} m^2 - \frac{3}{4} m + \frac{5}{8} \right) \right] = -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{3}{4} m^2 n - \frac{5}{8} mn。$$

情形 2 若 $m = 3 \pmod{4}$, 该种情况与情形 1 类似, 从而可计算得出

$$\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = mn \left[mn - \frac{1}{2} \times \frac{m-3}{4} (2+m-5) \right] = -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{3}{4} m^2 n - \frac{9}{8} mn。$$

情形 3 若 $m = 2 \pmod{4}$, 则令

$$V_{36} = \left\{ v_{1,j-\frac{m-2}{2}}, v_{1,j-\frac{m-4}{2}}, \dots, v_{1,j+\frac{m}{2}}, v_{2,j-\frac{m-2}{2}}, v_{2,j-\frac{m-4}{2}}, \dots, v_{2,j+\frac{m}{2}}, \dots, v_{n,j-\frac{m-2}{2}}, v_{n,j-\frac{m-4}{2}}, \dots, v_{n,j+\frac{m}{2}} \right\};$$

$$V_{37} = \left\{ v_{1,j-\frac{m-2}{2}}, v_{1,j-\frac{m-4}{2}}, \dots, v_{1,j-2}, v_{1,j+3}, v_{1,j+4}, \dots, v_{1,j+\frac{m}{2}}, v_{2,j-\frac{m-2}{2}}, v_{2,j-\frac{m-4}{2}}, \dots, v_{2,j-4}, v_{2,j+5}, v_{2,j+6}, \dots, v_{2,j+\frac{m}{2}}, \dots, v_{i-1,j+\frac{m}{2}}, v_{i-1,j-\frac{m-2}{2}} \right\},$$

则 $|V_{36}| = mn$, $|V_{37}| = \frac{1}{2} \times \frac{m-2}{4} (2+m-4) = \frac{1}{8} m^2 - \frac{1}{2} m + \frac{1}{2}$ 。对任意顶点 $w \in V(G)$, 当且仅当 $w \in V_{36} \setminus V_{37}$, $d_G(w, v_{ij}) \neq d_G(w, v_{i,j+1})$ 。则有

$$\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = mn \left[mn - \left(\frac{1}{8} m^2 - \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{1}{2} m^2 n - \frac{1}{2} mn。$$

情形 4 若 $m = 0 \pmod{4}$, 则该种情况与情形 3 类似, 根据情形 3 可计算得出

$$\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = mn \left[mn - \frac{1}{2} \times \frac{m-4}{4} (4+m-4) \right] = -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{1}{2} m^2 n。$$

从而有

$$\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = \begin{cases} \frac{4}{3} mn^3 + 2mn^2 + \frac{2}{3} mn, & \text{若 } n \leq \frac{m}{4}; \\ -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{1}{2} m^2 n, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 0 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{3}{4} m^2 n - \frac{5}{8} mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 1 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{1}{2} m^2 n - \frac{1}{2} mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 2 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8} m^3 n + m^2 n^2 + \frac{3}{4} m^2 n - \frac{9}{8} mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 3 \pmod{4}。 \end{cases}$$

综上所述,有

$$\begin{aligned}
I_{Pl, v}(W(n, m)) &= \sum_{e=uv \in E} n(e|G) = \\
&= \sum_{e=uv \in E_1} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} n(e|G) = \\
&= \begin{cases} \frac{4}{3}mn^3 + m^2n^2 + 2mn^2 - \frac{1}{3}mn, & \text{若 } n \leq \frac{m}{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{1}{2}m^2n - mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 0 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{3}{4}m^2n - \frac{13}{8}mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 1 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{3}{2}mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 2 \pmod{4}; \\ -\frac{1}{8}m^3n + 2m^2n^2 + \frac{3}{4}m^2n - \frac{17}{8}mn, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 3 \pmod{4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

定理 3 证毕。

定理 4 设 $W(n, m)$ 为广义轮图, 且 $n \geq 1, m \geq 3$, 则其加权顶点 PI 指数

$$I_{Pl, w}(W(n, m)) = \begin{cases} m^3n + 8m^2n^2 - 7m^2n + m^2 + \frac{32}{3}mn^3 + 12mn^2 + \frac{4}{3}mn - 5m, & \text{若 } n \leq \frac{m}{4}; \\ 16m^2n^2 - 3m^2n + m^2 - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 0 \pmod{4}; \\ 16m^2n^2 - m^2n + m^2 - 5mn - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 1 \pmod{4}; \\ 16m^2n^2 - 3m^2n + m^2 - 4mn - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 2 \pmod{4}; \\ 16m^2n^2 - m^2n + m^2 - 9mn - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

证明 设 $W(n, m)$ 为广义轮图, 对其顶点和边的定义同定理 3。由加权顶点 PI 指数的定义可得

$$\begin{aligned}
I_{Pl, w}(G) &= \sum_{e=uv \in E} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = \\
&= \sum_{e=uv \in E_1} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G)。
\end{aligned}$$

在定理 3 的证明中, 已经对广义轮图中任意一条边 e , 计算出了 $n(e|G)$, 下面对广义轮图中关于边 e 的两个顶点 u 和 v 的度 $d_G(u)$ 和 $d_G(v)$ 进行研究分析。

令 $V_{41} = V(G) \setminus \{u_0\}, V_{42} = \{v_{n0}, v_{n1}, \dots, v_{n, m-1}\}$ 。由分析易知, $d_G(u_0) = m$; 当任意的顶点 $w \in V_{42}$ 时, $d_G(w) = 3$; 当任意的 $w \in V_{41} \setminus V_{42}$ 时, $d_G(w) = 4$ 。从而结合定理 3 的证明, 易得

$$\begin{aligned}
\sum_{e=uv \in E_1} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) &= (d_G(u) + d_G(v)) \cdot \sum_{e=uv \in E_1} n(e|G) = \\
&= (m + 4)(m^2n - 2mn + m) = m^3n + 2m^2n + m^2 - 8mn + 4m。 \\
\sum_{e=uv \in E_3} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) &= (4 + 4)m(n - 2)(mn + 1) + (4 + 3)m(mn + 1) = \\
&= 8m^2n^2 - 9m^2n + 8mn - 9m。
\end{aligned}$$

对于边集 E_2 , 由分析可得, 对任意 $e_{ij} = v_{ij}v_{i, j+1} \in E_2$:

当 $n \leq \frac{m}{4}$ 时, 由定理 3 知, $\sum_{e=uv \in E_2} n(e|G) = \frac{4}{3}mn^3 + 2mn^2 + \frac{2}{3}mn, |V_{32}| = 4ni, |V_{33}| = \frac{i[0 + 4(i - 1)]}{2} = 2i^2 - 2i$ 。令 $E_{31} = \{e_0^n, e_1^n, \dots, e_{m-1}^n\}$, 有 $|E_{31}| = m$ 。且任意的 $w \in E_{31}, n(e_{ij}|G) = 4n^2 - (2n^2 - 2n) = 2n^2 + 2n$ 。从而

$$\sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = \left(\frac{4}{3}mn^3 + 2mn^2 + \frac{2}{3}mn\right) \times (4+4) - [(4+4) - (3+3)]m(2n^2 + 2n) = \frac{32}{3}mn^3 + 12mn^2 + \frac{4}{3}mn。$$

当 $n > \frac{m}{4}$ 时, 同定理三分为以下四种情形:

情形 1 若 $m = 0 \pmod{4}$ 时, 根据定理 3 可得,

$$\sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = (4+4) \times \left(-\frac{1}{8}m^3n + m^2n^2 + \frac{1}{2}m^2n\right) = -m^3n + 8m^2n^2 + 4m^2n。$$

情形 2 若 $m = 1 \pmod{4}$ 时, 根据定理 3 可得,

$$\sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = (4+4) \times \left(-\frac{1}{8}m^3n + m^2n^2 + \frac{3}{4}m^2n - \frac{5}{8}mn\right) = -m^3n + 8m^2n^2 + 6m^2n - 5mn。$$

情形 3 若 $m = 2 \pmod{4}$ 时, 根据定理 3 可得,

$$\sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = (4+4) \times \left(-\frac{1}{8}m^3n + m^2n^2 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{1}{2}mn\right) = -m^3n + 8m^2n^2 + 4m^2n - 4mn。$$

情形 4 当 $m = 3 \pmod{4}$ 时, 根据定理 3 可得,

$$\sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) = (4+4) \times \left(-\frac{1}{8}m^3n + m^2n^2 + \frac{3}{4}m^2n - \frac{9}{8}mn\right) = -m^3n + 8m^2n^2 + 6m^2n - 9mn。$$

综上所述, 广义轮图 $W(n, m)$ 的加权顶点 PI 指数

$$I_{PI, w}(W(n, m)) = \sum_{e=uv \in E_1} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_2} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) + \sum_{e=uv \in E_3} (d_G(u) + d_G(v))n(e|G) =$$

$$\begin{cases} m^3n + 8m^2n^2 - 7m^2n + m^2 + \frac{32}{3}mn^3 + 12mn^2 + \frac{4}{3}mn - 5m, & \text{若 } n \leq \frac{m}{4}; \\ 16m^2n^2 - 3m^2n + m^2 - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 0 \pmod{4}; \\ 16m^2n^2 - m^2n + m^2 - 5mn - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 1 \pmod{4}; \\ 16m^2n^2 - 3m^2n + m^2 - 4mn - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 2 \pmod{4}; \\ 16m^2n^2 - m^2n + m^2 - 9mn - 5m, & \text{若 } n > \frac{m}{4} \text{ 且 } m = 3 \pmod{4}。 \end{cases}$$

定理 4 证毕。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York: American Elsevier Pub. Co., 1976.
 [2] KHADIKAR P V. On A Novel Structural Descriptor PI [J]. *Nat Acad Sci Lett*, 2000, **23**:113-118.
 [3] KHALIFEH M H, YOUSEFI-AZARI H, ASHRAFI A R.

Vertex and Edge PI Indices of Cartesian Product Graphs [J]. *Discrete Appl Math*, 2008, **156**(10): 1780-1789. DOI: 10.1016/j.dam.2007.08.041.
 [4] KHADIKAR P V, KARMARKAR S, AGRAWAL V K. A Novel PI Index and Its Applications to QSPR/QSAR Studies[J]. *J Chem Inf Comput Sci*, 2001, **41**(4): 934-

949. DOI: 10.1021/ci0003092.
- [5] DENG H Y, CHEN S B, ZHANG J. The PI Index of Phenylenes[J]. *J Math Chem*, 2007, **41**(1): 63–69. DOI: 10.1007/s10910-006-9198-2.
- [6] XU L X, CHEN S B. The PI Index of Polyomino Chains [J]. *Appl Math Lett*, 2008, **21**(11): 1101–1104. DOI: 10.1016/j.aml.2007.12.007.
- [7] BOKHARY S A U H, ADNAN. On Vertex PI Index of Certain Triangular Tessellation Networks[J]. *Main Group Met Chem*, 2021, **44**(1): 203–212. DOI: 10.1515/mgmc-2021-0020.
- [8] ILIĆ A, MILOSAVLJEVIĆ N. The Weighted Vertex PI Index[J]. *Math Comput Model*, 2013, **57**(3/4): 623–631. DOI: 10.1016/j.mcm.2012.08.001.
- [9] MANJU S C, GEETHA J, SOMASUNDARAM K. PI and Weighted PI Indices for Powers of Paths, Cycles, and Their Complements[J]. *J Intell Fuzzy Syst*, 2023, **44**(1): 1439–1452. DOI: 10.3233/jifs-221436.
- [10] MA G, BIAN Q J, WANG J F. The Weighted Vertex PI Index of Tricyclic Graphs[J]. *Discrete Appl Math*, 2023, **328**(C): 89–96. DOI: 10.1016/j.dam.2022.12.015.
- [11] MA G, BIAN Q J, WANG J F. The Weighted Vertex PI Index of Tricyclic Graphs[J]. *Discrete Appl Math*, 2023, **328**(C): 89–96. DOI: 10.1016/j.dam.2022.12.015.
- [12] MA G, BIAN Q J, WANG J F. Bounds on the Weighted Vertex PI Index of Cacti Graphs[J]. *Filomat*, 2019, **33**(18): 5977–5989. DOI: 10.2298/fil1918977m.
- [13] 何丽丽, 黄敏, 郝建修. 扇及其一致膨胀图的PI指数[J]. *浙江师范大学学报(自然科学版)*, 2012, **35**(1): 37–40. DOI: 10.3969/j.issn.1001-5051.2012.01.007.
- HE L L, HUANG M, HAO J X. The PI Indices of Fans and Uniform Inflations of Fans[J]. *J Zhejiang Norm Univ Nat Sci*, 2012, **35**(1): 37–40. DOI: 10.3969/j.issn.1001-5051.2012.01.007.
- [14] LIN Y Q, SHU J L, MENG Y. Laplacian Spectrum Characterization of Extensions of Vertices of Wheel Graphs and Multi-fan Graphs[J]. *Comput Math Appl*, 2010, **60**(7): 2003–2008. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.07.035.
- [15] 吕新忠, 仪明源. 几类图的符号全控制数[J]. *浙江师范大学学报(自然科学版)*, 2009, **32**(3): 253–256. DOI: 10.3969/j.issn.1001-5051.2009.03.003.
- LÜ X Z, YI M Y. Signed Total Domination Number of some Special Graphs[J]. *J Zhejiang Norm Univ Nat Sci*, 2009, **32**(3): 253–256. DOI: 10.3969/j.issn.1001-5051.2009.03.003.
- [16] 徐保根, 邹妍, 张博涵, 等. 广义轮图的F-控制[J]. *宜春学院学报*, 2015, **37**(3): 1–3. DOI: 10.3969/j.issn.1671-380X.2015.03.001.
- XU B G, ZOU Y, ZHANG B H, *et al.* Fractional Domination for Generalized Wheel Graph[J]. *J Yichun Univ*, 2015, **37**(3): 1–3. DOI: 10.3969/j.issn.1671-380X.2015.03.001.
- [17] 温一慧. 广义轮图的友好性[J]. *兰州大学学报(自然科学版)*, 2008, **44**(3): 103–108. DOI: 10.13885/j.issn.0455-2059.2008.03.002.
- WEN Y H. Friendliness of Generalized Wheel[J]. *J Lanzhou Univ Nat Sci*, 2008, **44**(3): 103–108. DOI: 10.13885/j.issn.0455-2059.2008.03.002.