

# 宇称-时间对称的三阱系统精确解及动力学演化

王妞妞, 郭利平\*

(山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006)

**摘要:** 本文研究了一种基于一个宇称-时间 (Parity-time, PT) 对称的三阱系统的精确解及其动力学特征。文章具体给出了 PT 对称、PT 对称破缺区间以及奇异点 (Exceptional Points, EPs) 的精确解。在此基础上, 进一步分析了系统在不同区域的动力学行为。研究发现, 增益/耗散强度和势能差会影响 PT 对称相的周期振荡特性, 尤其在 EPs 和 PT 对称破缺的情况下, 其振荡被破坏。另外, 处于中间阱的占据概率随着增益/耗散强度的增加而增加, 尤其当增益/耗散强度大于跃迁能时其增大得更快一些。

**关键词:** PT 对称; 非厄米三阱系统; 增益/耗散; 周期振荡

中图分类号: O469

文献标志码: A

文章编号: 0253-2395(2026)01-0108-07

## Exact Solutions and Dynamical Evolutions of Three-well Systems with Parity-time Symmetry

WANG Niuniu, GUO Liping\*

(Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

**Abstract:** In this paper, we study the exact solutions of a three-well system with a parity-time (PT) symmetry. The exact solutions are discussed in the PT symmetric region, broken PT symmetric region and exceptional points (EPs), respectively. Based on them, we analyzed the dynamics of the system in these regions furtherly. It is found that the periodic oscillation characteristics of the PT symmetric phase are influenced by the gain/loss strength and the potential energy difference. However, in the case of EPs and PT broken phase, its oscillation is broken. In addition, the occupancy probability in the intermediate well increases with the gain/loss strength, and especially grows faster when the strength is larger than the transition energy.

**Key words:** PT symmetry; non-Hermitian three-well system; gain/loss; periodic oscillations

### 0 引言

通过 Bender 和 Boettcher 的开创性研究, 我们知道有一类广泛的非厄米哈密顿量可以在宇称-时间 (Parity-time, PT) 对称<sup>[1]</sup>条件下具有实的本征谱, 即在 PT 对称下哈密顿量存在一个从实谱到复谱<sup>[2-3]</sup>的转变, 这使得近几十年来探索非厄米系统中的新量子态已经成为具有吸

引力的课题之一, 尤其是由耗散和增益构成的具有 PT 对称的非厄米系统<sup>[4-5]</sup>。对于这样的系统, 一般存在 PT 对称相和 PT 对称破缺相<sup>[6-7]</sup>, 而它们之间的分界线则是由具有手征性和拓扑结构等特性的奇异点 (Exceptional Points, EPs) 组成<sup>[8]</sup>, 该点是非厄米系统中广泛存在的一类特殊简并现象。由于奇异点的出

收稿日期: 2024-01-27; 修回日期: 2024-05-28

基金项目: 国家自然科学基金(12375016); 山西省基础研究计划(20210302123442); 山西省“1331工程”重点学科建设计划

作者简介: 王妞妞(1996-), 女, 山西长治人, 硕士研究生, 研究方向为冷原子物理。E-mail: wnn8105@163.com

\* 通信作者: 郭利平(GUO Liping), E-mail: guolp@sxu.edu.cn

引文格式: 王妞妞, 郭利平. 宇称-时间对称的三阱系统精确解及动力学演化[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2026, 49(1): 108-114. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024088.

现,这类系统迅速成为研究者们探索非厄米物理现象最理想的模型之一,并且人们在不同的领域里已进行了很多的研究,如光学<sup>[9-10]</sup>、量子多体系统<sup>[11-12]</sup>、拓扑模型<sup>[13]</sup>等。

在研究PT对称的非厄米量子系统时,我们寻找它的解析精确解一直是一项非常困难的挑战。并且大多数讨论的精确解都是用复杂的特殊函数表示,如两级系统<sup>[14-15]</sup>中的Heun函数<sup>[16]</sup>、Weber函数<sup>[17]</sup>等,而简单形式的精确解是非常少见的,特别是对于多级系统<sup>[18-19]</sup>以及多阱系统。到目前为止,有关PT对称的非厄米双阱系统研究有冷原子动力学<sup>[20]</sup>、量子操控<sup>[21]</sup>等。三阱系统的研究内容也集中于暗态解、绝热近似和动力学等,比如双频场驱动的弗洛凯动力学<sup>[22]</sup>和具有复数势的非厄米系统动力学<sup>[23]</sup>,而关于其能量本征值的精确解关注度并不高,但它对我们深入理解和精准调控一些非厄米物理特性起到重要的理论推动作用。目前,Reimann小组提出了利用三对不同波长(4:2:1)的激光对射叠加去构建三阱系统的实验方案<sup>[24]</sup>。若我们利用三阱构成的非厄米原子系统模拟PT对称的单个离散量子态<sup>[25]</sup>,便可以进一步探索多格点甚至更多复杂的非厄米系统新奇的物理现象和应用。我们主要关注的是非厄米三阱系统的精确解以及它的动力学演化情况,具体研究了三阱系统在不同的耗散/增益强度下,本征能谱随着不同势能差的变化,以及阱内占据的动力学演化情况。同时,我们还发现该系统存在两个奇异点,讨论了奇异点附近能谱连续性的问题,得到了其具体解的表达式。这些结果都可以为操纵量子态<sup>[26]</sup>和量子相位控制<sup>[27]</sup>的分析方法提供理论支持,而且不需要长距离控制序列<sup>[28]</sup>。

因此,本文主要基于PT对称的三阱系统研究其精确解以及动力学行为,这为实现相关的量子模拟提供了更清晰的物理途径。其中,PT对称、破缺区间以及EPs的动力学对三阱分布的影响更为有趣,激发了人们探索新物理现象的实验兴趣。

## 1 PT对称的三阱系统本征谱

首先,我们考虑一个具有平衡增益和耗散

的三阱系统

$$H = \begin{pmatrix} \Delta_1 - i\gamma & -g & 0 \\ -g & 0 & -G \\ 0 & -G & \Delta_2 + i\gamma \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $\Delta_1$ 和 $\Delta_2$ 分别为阱1和阱3与阱2的势能差, $\gamma$ 为增益/耗散的强度。而 $g$ 和 $G$ 分别是阱1和阱3与中间阱2的跃迁能。这里引入离散奇偶算符 $P = \text{antidiag}(1, 1, 1)$ ,它表示交换阱1和阱3的位置,而阱2不动,并且时间反演算符 $T$ 只是复共轭 $T = *$ 。当两个势能差值和跃迁能分别满足 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ 和 $g = G$ 时,公式(1)哈密顿量才具有PT对称性。换句话说,当且仅当哈密顿量为

$$H_{PT} = \begin{pmatrix} \Delta - i\gamma & -G & 0 \\ -G & 0 & -G \\ 0 & -G & \Delta + i\gamma \end{pmatrix} \quad (2)$$

时,它与算符 $P \cdot T$ 满足交换对易关系,而与 $P$ 和 $T$ 单独交换不对易,这样的三阱系统如图1所示。总之,我们可以发现当阱1和阱3与阱2具有相同的势能差且它们之间的跃迁能相等时是该系统具有PT对称性的必要条件。

简单起见,取 $G = 1$ ,使所有的能量都以 $G$ 为单位,那么公式(1)哈密顿量的久期方程可

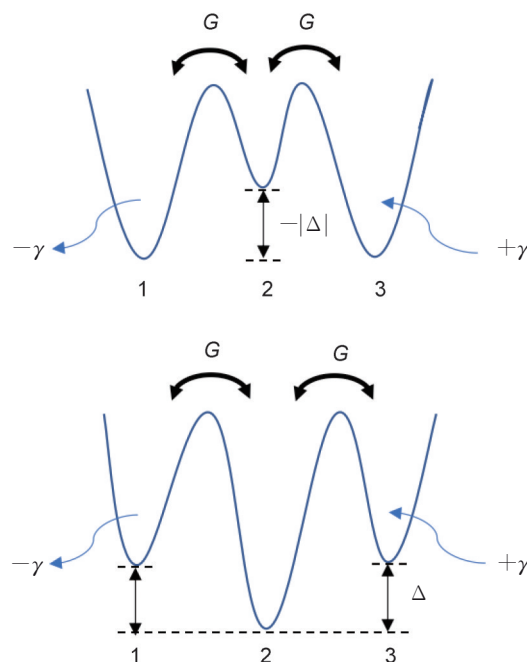


图1 具有PT对称的非厄米三阱系统示意图

Fig. 1 Schematic representation of a non-Hermitian three-well system with PT symmetry

以写为

$$(\Delta - E - i\gamma)[E(\Delta - E + i\gamma) + 1] + (\Delta - E + i\gamma) = 0, \quad (3)$$

其中  $E$  是它的特征值。首先通过引入

$$y = E - \frac{2\Delta}{3}, \quad (4)$$

消除  $E$  的二次幂项, 然后得到以下包含一个变量的一元三次方程

$$y^3 + py + q = 0, \quad (5)$$

其中

$$p = -\left(\frac{\Delta^2}{3} + 2 - \gamma^2\right), \quad (6)$$

$$q = \frac{2\Delta}{3}\left(\gamma^2 + 1 + \frac{\Delta^2}{9}\right).$$

根据卡丹公式, 我们知道上述方程(5)有一个判据

$$\zeta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} =$$

$$\Delta^4\gamma^2 + \Delta^2(2\gamma^4 + 10\gamma^2 - 1) + (\gamma^2 - 2)^3, \quad (7)$$

用来判断其是否具有实根:  $\zeta < 0$  有三个不相等的实根,  $\zeta > 0$  有一个实根和一对复共轭根。而当

$$\zeta = 0 \quad (8)$$

时, 方程有三个实根, 其中两个根是相等的。当系统是非厄米的情况时, 即  $\gamma \neq 0$  时, 该条件给出的是 EPs 的位置, 它将参数区间分割为两部分, 如图 2 所示, 该情况与 EPs 特征一致。(8) 式是一个关于  $\Delta$  二次幂的一元二次方程, 从而解出奇异点处  $\Delta^2$  和  $\gamma^2$  的关系:

$$\Delta_0^2 = \frac{-(2\gamma^4 + 10\gamma^2 - 1) + \sqrt{\eta}}{2\gamma^2}. \quad (9)$$

为了方便我们把奇异点的势能差值标记为  $\Delta_0$ , 参数  $\eta = 64\gamma^6 + 48\gamma^4 + 12\gamma^2 + 1$  (该式的另一个解由于违反  $\Delta^2 > 0$  的要求被舍弃)。这里如图 2 所示, 奇异点  $\gamma^2$  关于势能差  $\Delta = 0$  是对称的。其中, 红色实线代表 EPs, 它是 PT 对称和 PT 对称破缺区的分界线。图像表明这是个对称的函数:  $\Delta < 0$ , 参数  $\gamma^2$  随  $\Delta_0$  的增大而递增, 而在区间  $\Delta > 0$  中, 它则为递减函数。此外, 由于  $\zeta$  可能只有在  $p < 0$  时才为负, 所以 PT 对称区域在  $\gamma^2 < 2$  范围内, 如图 2 所示, 实线下方的区域

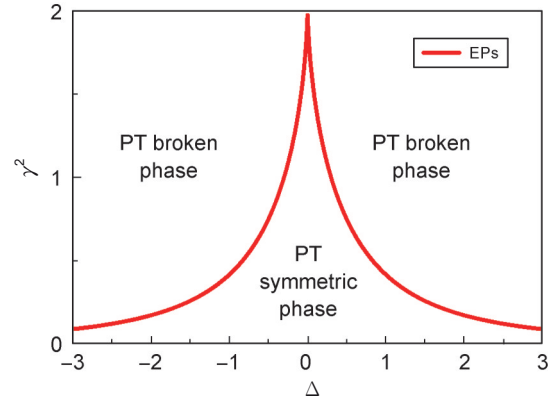


图 2 具有 PT 对称的非厄米三阱系统在不同失谐情况下的相图

实线是 EPs 的集合, 它是 PT 对称相和 PT 破缺相的分界线。

Fig. 2 Phase diagrams of non-Hermitian threewell system with PT symmetry under different detuning conditions

The solid line is a collection of the EPs, which are used as a dividing line to separate the two phases: the PT symmetric phase and the PT broken phase.

就是 PT 对称的区域。而其余  $\zeta > 0$  区间, 即  $\Delta > |\Delta_0|$  和  $\Delta < -|\Delta_0|$ , 是 PT 对称破缺区域, 其本征值存在一对共轭复数。总之, 结果表明, 在势能差较大的条件下, 只有  $\gamma$  足够小时, 才能保证系统的 PT 对称性。当  $\gamma$  比较大, 仅在势能差接近零时才出现实数解, 即系统具有 PT 对称性。

我们首先计算方程(5)的解  $y_k$ , 然后根据关系式(4), 进一步得到式(3)的本征值

$$E_k = \frac{2\Delta}{3} + y_k, \quad (10)$$

其中  $k = 1, 2, 3$ 。如图 3 所示, 当  $-|\Delta_0| < \Delta < |\Delta_0|$ , 方程(5)有三个不同的实根。据卡丹公式, 先定义模量和参数

$$R = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \Theta = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2R}\right), \quad (11)$$

则该区间方程(5)的解为

$$y_1 = 2R^{\frac{1}{3}} \cos \Theta,$$

$$y_2 = 2R^{\frac{1}{3}} \cos\left(\Theta + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = 2R^{\frac{1}{3}} \cos\left(\Theta + \frac{4\pi}{3}\right). \quad (12)$$

图 3(a) 显示, 实部有三条相互不重合的线, 而它们在图 3(b) 则重叠为一条线即虚部为零。

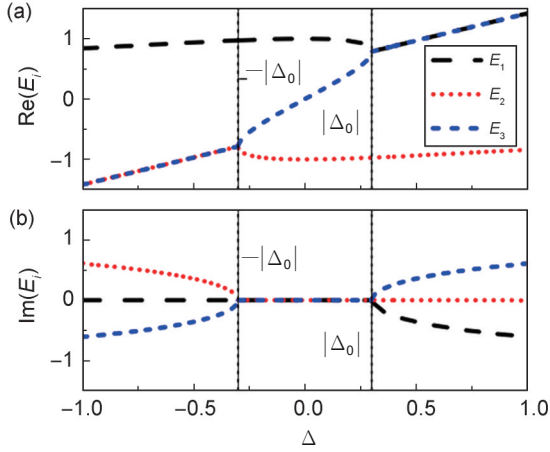


图3 在不同失谐下系统本征值的变化情况

当 $\gamma^2 = 1$ ,系统的本征值的实部 $\text{Re} E_i$ (a)和虚部 $\text{Im} E_i$ (b);

当 $\Delta = -|\Delta_0|$ ,  $E_2 = E_3$ ;  $\Delta = |\Delta_0|$ ,  $E_1 = E_3$ 。而 $\Delta > |\Delta_0|$ ,  
 $\text{Re} E_1 = \text{Re} E_3$ 和 $\text{Im} E_1 = -\text{Im} E_3$ ,  $\text{Im} E_2 = 0$ ;  $\Delta < -|\Delta_0|$ ,  
 $\text{Re} E_2 = \text{Re} E_3$ 和 $\text{Im} E_2 = -\text{Im} E_3$ ,  $\text{Im} E_1 = 0$ 。

Fig. 3 The variation of system eigenvalues under different detuning conditions

When  $\gamma^2 = 1$ , the real part  $\text{Re} E_i$  (a) and imagine part  $\text{Im} E_i$  (b) of the system eigenvalues; when  $\Delta = -|\Delta_0|$ ,  $E_2 = E_3$ ;

$\Delta = |\Delta_0|$ ,  $E_1 = E_3$ .  $\Delta > |\Delta_0|$ ,  $\text{Re} E_1 = \text{Re} E_3$  and  
 $\text{Im} E_1 = -\text{Im} E_3$ ,  $\text{Im} E_2 = 0$ ;  $\Delta < -|\Delta_0|$ ,  $\text{Re} E_2 = \text{Re} E_3$  and  
 $\text{Im} E_2 = -\text{Im} E_3$ ,  $\text{Im} E_1 = 0$ 。

在图3中我们发现三条线中的两条在 $\Delta = \pm|\Delta_0|$ 发生相交,即两个交叉点是由于三个分支中的一条分别和另外两个相交形成的,接下来我们将讨论图中这些细节。首先从式(8)中我们发现奇异点 $-p^3/27 = q^2/4$ ,然后得到:

$$R = \frac{|q|}{2}, \Theta = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{|q|}\right). \quad (13)$$

由于模 $R$ 为非负值,这里取 $q$ 的绝对值。从图2可知势能差除了零值外,其他都是正负两个值,这样根据(6)式可知 $q$ 有两个符号相反的值,分别对应两个不同的EPs。例如,我们考虑 $\Delta = -|\Delta_0|$ 时,则 $q < 0$ ,可以得到

$$R = -\frac{q}{2}, \Theta = 0. \quad (14)$$

同时(12)式变为

$$y_1 = 2R^{\frac{1}{3}}, y_2 = y_3 = -R^{\frac{1}{3}}. \quad (15)$$

式(14)和式(15)结合式(10)解释了图3左边的交叉点是由于能量 $E_2$ 和 $E_3$ 在此处相等而形成的。至于另一个EP点 $\Delta = |\Delta_0|$ ,我们同样因

为 $q > 0$ ,则

$$R = \frac{q}{2}, \Theta = \frac{\pi}{3}, \quad (16)$$

然后(12)式则变成

$$y_1 = y_3 = R^{\frac{1}{3}}, y_2 = -2R^{\frac{1}{3}}, \quad (17)$$

式(10)和式(17)与图3的描述一致。总之,当 $\Delta_0 < 0$ 时,相交点是 $E_2 = E_3$ ,而 $\Delta_0 > 0$ 时则相交于 $E_1 = E_3$ 位置。

在PT对称破缺区域, $q$ 的符号是由等式(6)决定的。当 $\Delta < -|\Delta_0|$ 且 $p < 0$ 时,根据式(6)和(7)可得 $q < 0$ 和 $-q/2 > \sqrt{\zeta}$ 。这里引入 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ :

$$\lambda_1 \equiv -\frac{q}{2} + \sqrt{\zeta}, \quad (18)$$

$$\lambda_2 \equiv -\frac{q}{2} - \sqrt{\zeta},$$

并且发现 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 。因此,根据卡丹公式,式(5)的复根可以表示为

$$y_1 = \sqrt[3]{\lambda_1} + \sqrt[3]{\lambda_2},$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\lambda_1} \exp\frac{i2\pi}{3} + \sqrt[3]{\lambda_2} \exp\frac{i4\pi}{3}, \quad (19)$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\lambda_1} \exp\frac{i4\pi}{3} + \sqrt[3]{\lambda_2} \exp\frac{i2\pi}{3}.$$

然而,在 $\Delta = -|\Delta_0|$ 处的EP点

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{q}{2} = R, \quad (20)$$

因此,式(19)中的三个根满足 $y_1 = 2R^{\frac{1}{3}}, y_2 = y_3 = -R^{\frac{1}{3}}$ ,这与(15)式是完全一样的。在另一个破缺区间 $\Delta > |\Delta_0|$ 中,用相同的方法,我们可以得到 $q > 0$ 和 $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ,此时根解为

$$y_1 = \sqrt[3]{-\lambda_1} \exp\frac{i\pi}{3} + \sqrt[3]{-\lambda_2} \exp\frac{i5\pi}{3},$$

$$y_2 = -\sqrt[3]{-\lambda_1} - \sqrt[3]{-\lambda_2}, \quad (21)$$

$$y_3 = \sqrt[3]{-\lambda_1} \exp\frac{i5\pi}{3} + \sqrt[3]{-\lambda_2} \exp\frac{i\pi}{3}.$$

同样我们也可以得到在 $\Delta = |\Delta_0|$ 处EP的根

$$-\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{q}{2} = R, \quad (22)$$

则式(21)的三个根也与(17)式一致。综上所述,我们给出了系统在所有不同区间的解析解,其中给出了两个不同奇异点的准确表达式,有助于研究它们对应的物理特性,如动力学演化。

## 2 三阱系统的动力学演化

本节研究(2)式哈密顿量的动力学演化。对于这个具有PT对称的三阱系统,将重点讨论它在初始态为 $(1,0,0)^T$ 时的动力学演化情况。根据上节我们可以得到系统的三个本征态

$$|\psi_{E_k}\rangle = \left( \frac{1}{\Delta - i\gamma - E_k}, 1, \frac{1}{\Delta + i\gamma - E_k} \right)^T, \quad (23)$$

其中 $E_k = y_k + 2\Delta/3$ ,  $y_k$ 是(5)的解,这里 $k = 1, 2, 3$ 。在态空间中时间演化算子 $C$ 的矩阵可定义为

$$|\psi(\tau)\rangle = \begin{pmatrix} C_{11}(\tau) & C_{12}(\tau) & C_{13}(\tau) \\ C_{21}(\tau) & C_{22}(\tau) & C_{23}(\tau) \\ C_{31}(\tau) & C_{32}(\tau) & C_{33}(\tau) \end{pmatrix} |\psi(0)\rangle, \quad (24)$$

其中

$$C = S^\dagger \text{Diag}(e^{-iE_1\tau}, e^{-iE_2\tau}, e^{-iE_3\tau}) \tilde{S}, \quad (25)$$

可计算给出。这里时间 $\tau$ 以 $\hbar/G$ 为单位并且矩阵

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\Delta - i\gamma - E_1} & \frac{1}{\Delta - i\gamma - E_2} & \frac{1}{\Delta - i\gamma - E_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\Delta + i\gamma - E_1} & \frac{1}{\Delta + i\gamma - E_2} & \frac{1}{\Delta + i\gamma - E_3} \end{pmatrix} \quad (26)$$

和

$$\tilde{S} = (S^\dagger)^{-1} = \frac{(S^\dagger)^*}{|S^\dagger|}. \quad (27)$$

算符 $S^\dagger$ 和 $\tilde{S}^\dagger$ 满足 $S^\dagger \tilde{S} = \tilde{S} S^\dagger = 1$ 和 $\tilde{S}^\dagger S = S \tilde{S}^\dagger = 1$ 。对于任意的初始状态 $|\psi(0)\rangle$ ,我们可以利用系数 $C_{kj}(\tau)$ 得到系统状态演化 $|\psi(\tau)\rangle$ ,即第 $k$ 个阱振幅 $c_k(\tau) = C_{k1}(\tau)c_1^0 + C_{k2}(\tau)c_2^0 + C_{k3}(\tau)c_3^0$ 。然后相应地讨论各阱的占据概率,即系数模方

$$P_k(\tau) = |c_k(\tau)|^2, \quad (28)$$

其中 $\sum_k P_k(\tau) = 1$ 。在这我们关注耗散对系统初始态为 $(1,0,0)^T$ 的影响,因此对于初始状态有 $c_2^0 = c_3^0 = 0$ 和 $c_1^0 = 1$ ,而 $\tau$ 时刻的状态则为

$$|\psi(\tau)\rangle = (C_{11}(\tau), C_{21}(\tau), C_{31}(\tau))^T. \quad (29)$$

首先,关注PT对称区间,如图4所示。图

4(a)和4(b)显示了 $\Delta = 0$ 时 $P_k(\tau)$ 随时间的演化情况,总体 $P_k(\tau)$ 的振幅随 $\gamma$ 的增大而明显增加,其中 $P_2(\tau)$ 增加的幅度比其它两个更明显。此外, $P_k(\tau)$ 的周期也随 $\gamma$ 的增大而增加,且 $P_k(\tau)$ 的波形始终为驻波。当势能差增大,如 $\Delta = 0.5\Delta_0$ ,即图4(c)和图4(d),不仅周期变长,波形不再是驻波,而是分裂出不规则的双峰。当势能差继续增大到奇异点 $\Delta = 1.0\Delta_0$ ,根据式(10)、式(15)和式(17)我们知道有两种不同的EPs: $E_3 = E_2$  ( $\Delta = -|\Delta_0|$ )和 $E_3 = E_1$  ( $\Delta = |\Delta_0|$ )。由于这两个结果的动力学行为是相同的,因此我们选 $\Delta = |\Delta_0|$ 的这个点来解释它随时间演化的过程。如图4(e)和图4(f),其周期性被破坏,而且当 $\gamma$ 从0.5增大到1.5时, $P_2(\tau)$ 的增加明显,甚至超越了 $P_{1,3}(\tau)$ 。当势能差继续增大至PT对称破缺区间时, $P_k(\tau)$ 增加更加明显。综上所述,对于小值的 $\gamma$ ,周期振荡特性随 $\Delta$ 变化较大,但 $\gamma$ 值越大,其振荡行为随 $\Delta$ 增加则是越强。而奇异点和PT对称破缺时, $P_k(\tau)$ 不再振荡,而是随时间单调递增,其中当 $\gamma$ 增大至1.5时, $P_2(\tau)$ 比其他两个阱的占据概率增大得更快一些。其原因是耗散/增益强度比阱间跃迁能大时,阱2更容易堆积使得 $P_2(\tau)$ 随 $\gamma$ 的增加而增大得更快, $P_3(\tau)$ 次之。而当耗散/增益强度小于阱间跃迁能时, $P_3(\tau)$ 受阱3增益的影响明显增大。

## 3 结论

本文详细分析了耗散和增益平衡的PT对称的三阱系统本征方程的精确解,并给出了相图和能谱图。且在此基础上,研究了该系统在初始态为 $(1,0,0)^T$ 时三个阱占据随时间演化的情况。首先,我们得到了奇异点的解析解。对于给定增益/耗散强度,在文章的能谱图中出现两次两个能量特征值相交的情况,这结果表明三阱系统存在两个对称的EPs。进一步,我们研究了该系统分别在PT对称、PT对称破缺区间以及奇异点下的动力学演化。结果表明,在PT对称区间,随着增益/耗散强度的增加,处于中间阱的占据概率比例增加,而其他两个

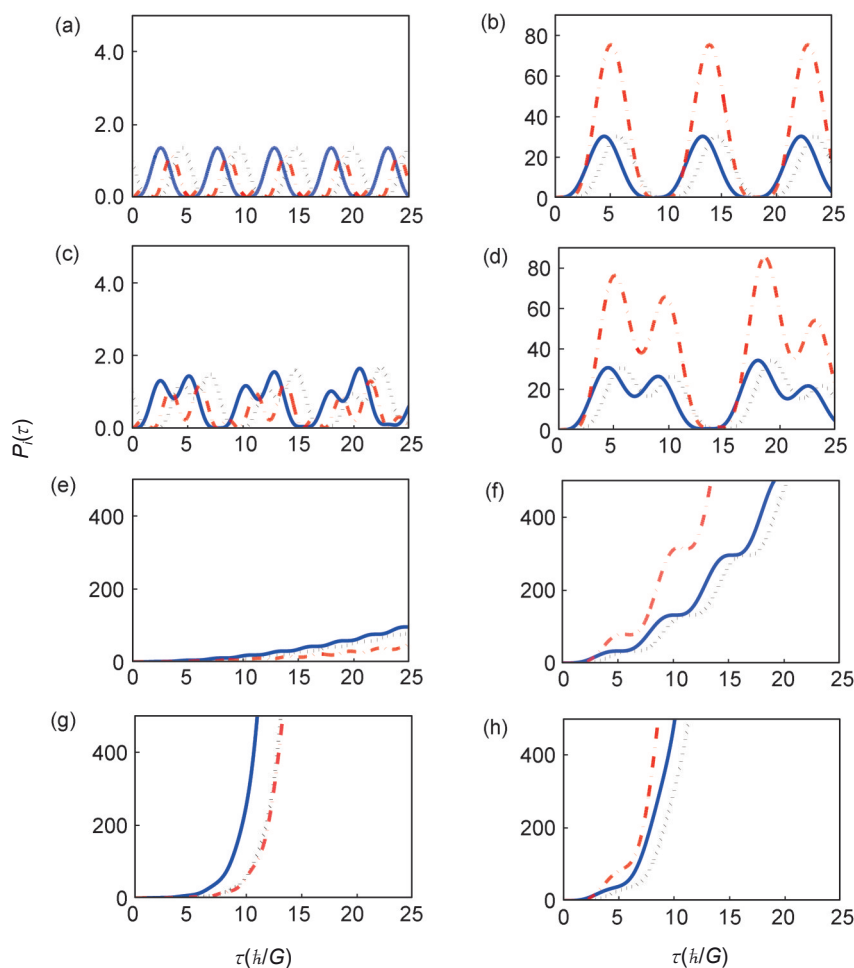


图4 在不同参数下系统的动力学行为分析

完整描述了在不同参数下的动力学行为:其中(a)、(b) $\Delta=0$ ; (c)、(d) $\Delta=0.5\Delta_0$ ; (e)、(f) $\Delta=1.0\Delta_0$ ; (g)、(h) $\Delta=1.5\Delta_0$ ,而两列图中的耗散则分别为0.5和1.5。图中黑色短点线、红色短点划线和蓝色实线分别表示 $P_1(\tau)$ 、 $P_2(\tau)$ 以及 $P_3(\tau)$ 的变化。在这初始状态为 $(1, 0, 0)^T$ 。

Fig. 4 Analysis of dynamic behavior of system under different parameters

Complete description of the dynamics with different parameters: (a), (b)  $\Delta=0$ ; (c), (d)  $\Delta=0.5\Delta_0$ ; (e), (f)  $\Delta=1.0\Delta_0$ ; (g), (h)  $\Delta=1.5\Delta_0$  and the two columns of dissipation are 0.5 and 1.5 respectively.  $P_1(\tau)$ ,  $P_2(\tau)$  and  $P_3(\tau)$  are characterized by black short-dot, red shot-dash-dot and blue solid lines respectively. Initial state is  $(1, 0, 0)^T$ .

阱的比例减小。此外,增益/耗散强度和势能差会影响PT对称相的周期振荡特性,但在奇异点和PT破缺的情况下,振荡被破坏,并且处于中间阱的比例随着增益/耗散强度的增加而增大得更快。

#### 参考文献:

- [1] BENDER C M, BOETTCHER S. Real Spectra in Non-hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **80**(24): 5243–5246. DOI: 10.1103/physrevlett.80.5243.
- [2] MOSTAFAZADEH A. Pseudo-hermitian Representation of

Quantum Mechanics[J]. *Int J Geom Methods Mod Phys*, 2010, **7**(7): 1191–1306. DOI: 10.1142/s0219887810004816.

- [3] CAROLAN J, HARROLD C, SPARROW C, *et al.* Universal Linear Optics[J]. *Science*, 2015, **349**(6249): 711–716. DOI: 10.1126/science.aab3462.
- [4] DIZDAREVIC D, MAIN J, ALPIN K, *et al.* Realization of Balanced Gain and Loss in a Time-dependent Four-mode Bose-Hubbard Model[J]. *Phys Rev A*, 2018, **97**: 013623. DOI: 10.1103/physreva.97.013623.
- [5] NAKANISHI Y, SASAMOTO T. PT Phase Transition in Open Quantum Systems with Lindblad Dynamics[J]. *Phys Rev A*, 2022, **105**(2): 022219. DOI: 10.1103/physreva.105.022219.

- [6] ZHU B G, LÜ R, CHEN S. PT Symmetry in the Non-hermitian Su-Schrieffer-Heeger Model with Complex Boundary Potentials[J]. *Phys Rev A*, 2014, **89**(6): 062102. DOI: 10.1103/physreva.89.062102.
- [7] PAN L, WANG X L, CUI X L, *et al.* Interaction-induced Dynamical PT-symmetry Breaking in Dissipative Fermi-Hubbard Models[J]. *Phys Rev A*, 2020, **102**(2): 023306. DOI: 10.1103/physreva.102.023306.
- [8] HEISS W D. The Physics of Exceptional Points[J]. *J Phys A: Math Theor*, 2012, **45**(44): 444016. DOI: 10.1088/1751-8113/45/44/444016.
- [9] EL-GANAINY R, MAKKRIS K G, KHAJAVIKHAN M, *et al.* Non-hermitian Physics and PT Symmetry[J]. *Nat Phys*, 2018, **14**: 11–19. DOI: 10.1038/nphys4323.
- [10] LONGHI S. Quantum Statistical Signature of  $\mathcal{PT}$  Symmetry Breaking[J]. *Opt Lett*, 2020, **45**(6): 1591–1594. DOI: 10.1364/ol.386232.
- [11] YAMAMOTO K, ASHIDA Y, KAWAKAMI N. Rectification in Nonequilibrium Steady States of Open Many-body Systems[J]. *Phys Rev Research*, 2020, **2**(4): 043343. DOI: 10.1103/physrevresearch.2.043343.
- [12] PIRES D P, MACRÌ T. Probing Phase Transitions in Non-hermitian Systems with Multiple Quantum Coherences[J]. *Phys Rev B*, 2021, **104**(15): 155141. DOI: 10.1103/physrevb.104.155141.
- [13] XIA S Q, KALTSAS D, SONG D H, *et al.* Nonlinear Tuning of PT Symmetry and Non-hermitian Topological States[J]. *Science*, 2021, **372**(6537): 72–76. DOI: 10.1126/science.abf6873.
- [14] HAI W H, HAI K, CHEN Q. Transparent Control of an Exactly Solvable Two-level System via Combined Modulations[J]. *Phys Rev A*, 2013, **87**(2): 023403. DOI: 10.1103/physreva.87.023403.
- [15] LUO X B, YANG B Y, ZHANG X F, *et al.* Analytical Results for a Parity-time-symmetric Two-level System under Synchronous Combined Modulations[J]. *Phys Rev A*, 2017, **95**(5): 052128. DOI: 10.1103/physreva.95.052128.
- [16] ZHANG W J, JIN K, JIN L L, *et al.* Analytic Results for the Population Dynamics of a Driven Dipolar Molecular System[J]. *Phys Rev A*, 2016, **93**(4): 043840. DOI: 10.1103/physreva.93.043840.
- [17] LI W J, YIN H C, YI J, *et al.* Physics of Manipulation of Spin Dynamics in a Driven Double Well Made Transparent[J]. *Results Phys*, 2022, **39**: 105706. DOI: 10.1016/j.rinp.2022.105706.
- [18] TOROSOV B T, DELLA VALLE G, LONGHI S. Non-hermitian Shortcut to Stimulated Raman Adiabatic Passage[J]. *Phys Rev A*, 2014, **89**(6): 063412. DOI: 10.1103/physreva.89.063412.
- [19] LUAN T Z, SHEN H Z, YI X X. Shortcuts to Adiabaticity with General Two-level Non-hermitian Systems[J]. *Phys Rev A*, 2022, **105**: 013714. DOI: 10.1103/physreva.105.013714.
- [20] LUO Y R, WANG X M, YI J, *et al.* Exact Solutions for a Spin-orbit Coupled Ultracold Atom Held in a Driven Double Well[J]. *J Phys A: Math Theor*, 2023, **56**(32): 325302. DOI: 10.1088/1751-8121/ace570.
- [21] BRADLY C J, RAB M, GREENTREE A D, *et al.* Coherent Tunneling via Adiabatic Passage in a Three-well Bose-Hubbard System[J]. *Phys Rev A*, 2012, **85**(5): 053609. DOI: 10.1103/physreva.85.053609.
- [22] LI L P, WANG B, LI W B. Integer and Fractional Floquet Resonances in a Driven Three-well System[J]. *Photonics*, 2022, **9**(10): 738. DOI: 10.3390/photonics9100738.
- [23] GUO L P, DU L, YIN C H, *et al.* Dynamical Evolutions in Non-hermitian Triple-well Systems with a Complex Potential[J]. *Phys Rev A*, 2018, **97**(3): 032109. DOI: 10.1103/physreva.97.032109.
- [24] SCHLAGHECK P, MALET F, CREMON J C, *et al.* Transport and Interaction Blockade of Cold Bosonic Atoms in a Triple-well Potential[J]. *New J Phys*, 2010, **12**(6): 065020. DOI: 10.1088/1367-2630/12/6/065020.
- [25] YAO S Y, WANG Z. Edge States and Topological Invariants of Non-hermitian Systems[J]. *Phys Rev Lett*, 2018, **121**(8): 086803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.086803.
- [26] SHILLITO R, GROSS J A, DI PAOLO A, *et al.* Fast and Differentiable Simulation of Driven Quantum Systems[J]. *Phys Rev Research*, 2021, **3**(3): 033266. DOI: 10.1103/physrevresearch.3.033266.
- [27] LI W L, DONG X, ZHANG G F, *et al.* Flying-qubit Control via a Three-level Atom with Tunable Waveguide Couplings[J]. *Phys Rev B*, 2022, **106**(13): 134305. DOI: 10.1103/physrevb.106.134305.
- [28] ECONOMOU S E. High-fidelity Quantum Gates via Analytically Solvable Pulses[J]. *Phys Rev B*, 2012, **85**(24): 241401. DOI: 10.1103/physrevb.85.241401.