

温度差下一维两分量玻色气体的输运性质

王丽蓉^{1,2}, 于海如^{1,2}, 尹相国^{1,2,3*}

(1. 山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006;

2. 山西大学 光量子技术与器件全国重点实验室, 山西 太原 030006;

3. 山西大学 极端光学协同创新中心, 山西 太原 030006)

摘要: 本文研究了两个具有不同温度的一维半无限两分量玻色气体系统结合后的输运性质。通过 Bethe ansatz 方法和可积系统存在无穷多守恒量的性质, 建立了适用于非平衡态的两分量玻色气体的广义流体力学方程。数值计算该方程得到了系统在局域温度差下的能量密度、粒子数密度、能量流和粒子流分布等物理量。其研究结果发现, 对于温度差下的非平衡态, 在低温弱磁场强度下, 受自旋激发的影响, 能量密度分布和粒子密度分布都呈现四个平台特征, 能量流和粒子密度流都在结合点处出现峰值, 体现了和单分量玻色气体的不同之处。当磁场强度增大到一定程度时, 自旋向下的分量逐渐消失, 此时两分量玻色气体和单分量玻色气体输运性质相同。

关键词: 热力学平衡态; 广义流体力学; 输运; 守恒量

中图分类号: O469 文献标志码: A 文章编号: 0253-2395(2026)01-0129-14

Transport Properties of One-dimensional Two-component Bose Gas Under Temperature Difference

WANG Lirong^{1,2}, YU Hairu^{1,2}, YIN Xiangguo^{1,2,3*}

(1. Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

2. State Key Laboratory of Quantum Optics Technologies and Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

3. Extreme Optics Collaborative Innovation Center of Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: We study the transport properties of two one-dimensional half-infinite two-component Bose gas systems with different temperatures. By using the Bethe ansatz method and the property that there are infinitely many conserved quantities in the integrable system, a generalized hydrodynamic equation for two-component Bose gas in non-equilibrium state is established. The physical quantities such as energy density, particle number density, energy flow and particle flow distribution of the system under local temperature difference are obtained by numerical calculation of the equation. The results of the non-equilibrium state under temperature difference show that, under the influence of spin excitation at low temperature and weak magnetic field intensity, the energy density distribution and particle density distribution show four plateau characteristics, and the energy flow and particle density flow both peak at the junction point, which reflects the difference from the single-component Bose gas. When the magnetic field strength increases to a certain extent, the spin-down component gradually disappears, so the two-component Bose gas has the same transport properties as the single-component Bose gas.

Key words: thermodynamic equilibrium state; generalized hydrodynamic; transport; conserved charges

收稿日期: 2024-02-26; 修回日期: 2024-05-09

基金项目: 山西省基础研究计划(202103021224033); 国家自然科学基金(11704233)

作者简介: 王丽蓉(1995-), 女, 山西朔州人, 硕士研究生, 研究方向为冷原子物理。E-mail: 17835416309@163.com

* 通信作者: 尹相国(YIN Xiangguo), E-mail: yinxiangguo@sxu.edu.cn

引文格式: 王丽蓉, 于海如, 尹相国. 温度差下一维两分量玻色气体的输运性质[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2026, 49(1): 129-142. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2024091.

0 引言

自1995年在实验上首次观察到碱金属 ^{87}Rb 和 ^{23}Na 的玻色爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein Condensation, BEC)以来,超冷原子气体领域在实验和理论的相互促进下得到极大的发展^[1],特别是外势场和原子间相互作用强度得到有效调控^[2]。各种超冷原子气体的基态和热力学平衡态的研究已经比较广泛且成熟,而其动力学行为和非平衡态性质在近年来则得到了更多的关注,特别是热化^[3]、quench动力学^[4-5]、周期性驱动^[6]、自旋电荷分离等^[7]。超冷原子气体是一个存在原子间相互作用的量子多体系统,而Bethe Ansatz(BA)方法是量子多体系统的一种严格解方法,可以计算一维任意强度接触相互作用量子气体的本征态和热力学平衡态性质,例如一维玻色气体(Lieb-Liniger模型)^[8-10]、两分量玻色气体(Yang-Gaudin模型)^[11-12]。

基于BA方法、广义吉布斯系综(Generalized Gibbs Ensemble)和无穷多守恒量的连续性方程发展起来的流体力学被称为广义流体力学(Generalized Hydrodynamic, GHD),近年来被应用到非平衡态系统的研究中。2016年Castro-Alvaredo等^[13]基于广义热力学BA方程和流体力学的连续性方程,得到了形式简单的广义流体力学微分方程,并研究了一维玻色气体的局域温度差导致的能量流,得到的结果与共形场论相符。同时Bertini等^[14]基于XXZ自旋链模型提出了类似的微分方程,计算的能量流结果与矩阵乘积密度算符的数值解一致。2017年Doyon研究组^[15]将广义流体动力学推广到非均匀外势系统,2019年Caux研究组^[16]将其推广到随时间和空间变化的相互作用情形,发现了由相互作用强度变化导致的原子集体振荡行为。另外广义流体力学还被用来研究周期性外势驱动的玻色气体系统^[4]和微扰引起的非线性效应^[17]。2020年Doyon研究组将扩散项加入广义流体力学方程,指出在量子牛顿摆实验中原子气体在经过大约50个振荡周期后完全热化^[3]。2022年Scopa等将其应用到一维自旋为1/2的排斥费米子气体模型得到了有限温度下脉冲扰动引起的自旋-电荷分离效应^[18]。

与此同时,广义流体力学也不断被实验

证。2019年Schemmer研究组^[4]研究了束缚在原子芯片上的一维 ^{87}Rb 原子气体的量子牛顿摆,验证了广义流体动力学计算结果^[19]的准确性。Weiss研究组^[5]基于 ^{87}Rb 玻色爱因斯坦凝聚的一维超冷原子气体,研究了势阱中一维强相互作用玻色气体的动力学,GHD计算结果与实验相符。

虽然广义流体力学方法已经被广泛应用于多种模型的研究,例如,单分量的玻色气体、二分量的费米气体、玻色费米混合气体、费米哈伯德模型、Sine-Gordon模型^[20]以及自旋链模型,但是该方法应用到两分量玻色气体的研究却相对较少。两分量玻色气体不同于其他两分量气体,其基态是铁磁的,很可能导致其低温动力学过程有所不同,这种研究的缺乏严重阻碍了人们对两分量气体非平衡动力学的认识。两分量玻色气体一般指处于两个不同超精细内部态上的玻色子,通过旋转这两个超精细态,例如 ^{87}Rb 的超精细态 $|F=2, m_f=-1\rangle$ 和 $|F=1, m_f=1\rangle$,使两个原子超精细态组成一个赝自旋偶极子,在磁阱中^[21-22]产生了两分量玻色气体。两分量玻色气体和两分量费米气体一样存在自旋-电荷分离现象^[23],但在自旋独立相互作用的情况下,两分量费米气体的基态可由有效磁场调节两个分量的比例,而两分量玻色气体基态是铁磁性的,即在零温情况下完全转变为单分量玻色气体^[24-25]。本文将采用广义流体力学方法研究一维两分量玻色气体在低温下的动力学行为,描述其在局域温度差下的密度和流的变化规律。

第1节,我们介绍一维两分量玻色气体的理论模型及其热力学描述。第2节描述与模型相关的广义流体力学方程。在第3节中,观察模型在不同磁场强度下和不同温度情形局域温度差下的稳态,并讨论在这些条件下密度和流出现的不同现象。最后一节对前述内容进行总结。

1 理论模型

考虑一个由两种自旋分量(标记为 N_\uparrow 和 N_\downarrow)的玻色子组成的均匀一维系统,系统被限制在

长度 L 内, 粒子间通过接触作用势 δ 函数相互作用。考虑到外加塞曼磁场的影响, 系统的哈密顿量可以写为(这里取 $\hbar = 2m = 1$):

$$H = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) - \Omega M, \quad (1)$$

其中第一项为动能项, 第二项为粒子间相互作用项, 第三项为塞曼能项, x_i 是第 i 个粒子的坐标, c 表示粒子间的相互作用强度, $M = N_\uparrow - N_\downarrow$ 表示不同自旋粒子数的差值, N_\uparrow, N_\downarrow 分别表示自旋向上的粒子数和自旋向下的粒子数, Ω 表示磁场强度。本文考虑粒子间为排斥相互作用, 即 $c > 0$ 。

该模型可以用 BA 方法严格求解。由粒子间的接触边界条件、周期性边界条件和任意玻色子的交换对称性条件, 可以得到两分量玻色气体准动量 k_j 和自旋速度 λ_α 满足的 BA 方程^[26]:

$$\exp(ik_j L) = -\prod_{l=1}^N \frac{k_j - k_l + ic}{k_j - k_l - ic} \prod_{\alpha=1}^M \frac{k_j - \lambda_\alpha - ic/2}{k_j - \lambda_\alpha + ic/2}, \quad (2)$$

$j = 1, 2, \dots, N,$

$$\prod_{l=1}^N \frac{\lambda_\alpha - k_l - ic/2}{\lambda_\alpha - k_l + ic/2} = -\prod_{\beta=1}^M \frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta - ic}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta + ic}, \quad (3)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, M,$

进而得到系统的能量本征值 $E = \sum_{j=1}^N k_j^2$ 。自旋速度 λ_α 是在建立 BA 方程的过程中从数学角度引入的一个中间量, 和准动量类似, 不同的速度解对应不同的量子态。准动量一般理解为电荷准粒子所带的动量, 类似地, 速度可理解为自旋准粒子所带的“动量”。当系统处于基态的时候, 所有的 k_j, λ_α 的解都是实数; 当系统不处于基态, 即温度不为零时, 所有的 k_j 都是实数, 但 λ_α 不一定是实数, 而是互为共轭的复数对, 即“束缚态”, 形成了一根弦。因此长度为 n (正整数) 的弦假设为:

$$\lambda_{\alpha, l} = \lambda_\alpha^n + i(n+1-2l)c/2, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

λ_α^n 为实部, 被称为弦中心, i 为虚数单位。

在热力学极限下, 即 $L, N \rightarrow \infty, N/L$ 和 M/L 均为有限值的情况下, 准动量和速度的分布变得密集, 我们可以用以下准动量分布函数和速度分布函数来描述:

$$\rho_1^{(1)}(k_j) \sim \frac{1}{L(k_{j+1} - k_j)},$$

$$\rho_n^{(2)}(\lambda_\alpha) \sim \frac{1}{L(\lambda_{\alpha+1}^n - \lambda_\alpha^n)},$$

$n = 1, 2, \dots, \infty.$

由于粒子间存在相互作用, $\rho_1^{(1)}(k)$ 和 $\rho_n^{(2)}(\lambda)$ 不是独立的。它们需要满足 BA 方程(2)和方程(3)在热力学极限下的积分方程:

$$\rho_1^{(1)}(k) + \rho_{1,h}^{(1)}(k) = \frac{1}{2\pi} + a_1 * \rho_1^{(1)}(k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \rho_n^{(2)}(k), \quad (6)$$

$$\rho_n^{(2)}(\lambda) + \rho_{n,h}^{(2)}(\lambda) = a_n * \rho_1^{(1)}(\lambda) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \rho_m^{(2)}(\lambda), \quad (7)$$

其中 $\rho_{1,h}^{(1)}(k)$ 和 $\rho_{n,h}^{(2)}(\lambda)$ 分别为准动量空穴和速度空穴的分布函数, 卷积的定义为 $f * g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda - \mu)g(\mu)d\mu$, 且

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{nc}{(nc/2)^2 + x^2}, \quad (8)$$

$$T_{mm}(\lambda) =$$

$$\begin{cases} a_{|n-m|}(\lambda) + 2a_{|n-m|+2}(\lambda) + \dots + & n \neq m, \\ 2a_{n+m-2}(\lambda) + a_{n+m}(\lambda) & \\ 2a_2(\lambda) + 2a_4(\lambda) + \dots + & n = m, \\ 2a_{2n-2}(\lambda) + a_{2n}(\lambda) & \end{cases} \quad (9)$$

通过 Yang-Yang 热力学方法, 即有限温度 T 下, 吉布斯自由能变分为零, 可获得该模型在热力学平衡态下的 BA 方程 (Thermodynamic Bethe Ansatz Equation, TBAE)^[26]:

$$\epsilon_1^{(1)}(k) = k^2 - \Omega - \mu - Ta_2 * \ln(1 + e^{-\epsilon_1^{(1)}(k)/T}) -$$

$$T \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \ln(1 + e^{-\epsilon_n^{(2)}(k)/T}),$$

$$\epsilon_n^{(2)}(\lambda) = 2n\Omega + Ta_n * \ln(1 + e^{-\epsilon_1^{(1)}(\lambda)/T}) +$$

$$T \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln(1 + e^{-\epsilon_m^{(2)}(\lambda)/T}), \quad (11)$$

其中 $\epsilon_1^{(1)}(k)$ 和 $\epsilon_n^{(2)}(\lambda)$ 分别是准动量和长度为 n 的自旋弦的缀势能, 定义 $\epsilon_n^{(r)}(\lambda) = T \ln(\rho_{n,h}^{(r)}(\lambda)/\rho_n^{(r)}(\lambda))$ 。在给定温度、化学势、磁场和相互作用强度下, 通过对(10)式和(11)式进行数值迭代得到平衡态的缀势能, 进而根据缀势能定义, 通过(6)式和(7)式得到准动量分布函数 $\rho_1^{(1)}(k)$ 和速度分布函数 $\rho_n^{(2)}(\lambda)$ 。

2 广义流体力学

2.1 广义流体力学方程

不同尺度下多体系统的行为变得非常不同,特别是当局域尺寸远小于系统的长度但远大于粒子间的平均距离时,量子气体可以被当成连续的流体对待,从而使得系统的行为可以通过流体力学方程来描述而不是大量的非线性动力学方程。量子可积系统的守恒量数目等于系统自由度。在热力学极限下,无穷多的守恒量要求一维量子气体满足流体力学中的连续性方程

$$\partial_t q(x,t) + \partial_x j(x,t) = 0, \quad (12)$$

此方程将守恒量密度分布 $q(x,t)$ 和守恒量流分布 $j(x,t)$ 联系在一起, x 和 t 分别表示空间和时间。

假设 $q_1^{(1)}(k)$ 和 $q_n^{(2)}(\lambda)$ 都为单粒子本征值,则守恒量密度分布和守恒流分布可以写成在快度空间的积分形式:

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} dk q_1^{(1)}(k) \rho_1^{(1)}(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda q_n^{(2)}(\lambda) \rho_n^{(2)}(\lambda), \quad (13)$$

$$j = \int_{-\infty}^{+\infty} dk v_1^{(1)}(k) q_1^{(1)}(k) \rho_1^{(1)}(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda v_n^{(2)}(\lambda) q_n^{(2)}(\lambda) \rho_n^{(2)}(\lambda). \quad (14)$$

这里的有效速度 $v_n^{(r)}$ 定义为准粒子的能量变化量和动量变化量的比值

$$v_n^{(r)}(\lambda) = \frac{\epsilon_n^{(r)'}(\lambda)}{(\rho')^{dr}(\lambda)} = \frac{\epsilon_n^{(r)'}(\lambda)}{2\pi\rho_{n,t}^{(r)}(\lambda)}, \quad (15)$$

上标“dr”表示缀饰操作,其中态密度分布表达式为

$$\rho_{n,t}^{(r)}(\lambda) = \rho_n^{(r)}(\lambda) + \rho_{n,h}^{(r)}(\lambda). \quad (16)$$

将(15)式与(6)和(7)式结合,得到有效速度满足的积分方程:

$$v_1^{(1)}\rho_{1,t}^{(1)}(k) = \frac{e'(k)}{2\pi} + a_2 * v_1^{(1)}\rho_1^{(1)}(k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * v_n^{(2)}\rho_n^{(2)}(k), \quad (17)$$

$$v_n^{(2)}\rho_{n,t}^{(2)}(\lambda) = -a_n * v_1^{(1)}\rho_1^{(1)}(\lambda) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * v_m^{(2)}\rho_m^{(2)}(\lambda), \quad (18)$$

其中裸能量 $e(k) = k^2 - \mu$ 。上述积分方程不仅

适用于平衡态,同时也适用于非平衡态。对于平衡态,准动量分布函数和快度分布函数都是对称的偶函数,从(17)和(18)式,以及 $e'(k) = 2k$,可以看出,有效速度都是奇函数。

分别将守恒量的密度(13)式和流(14)式代入(12)式中,由于单粒子本征值的独立性可得到该模型的广义流体力学方程

$$\partial_t \rho_1^{(1)}(k) + \partial_x [v_1^{(1)}(k) \rho_1^{(1)}(k)] = 0, \quad (19)$$

$$\partial_t \rho_n^{(2)}(\lambda) + \partial_x [v_n^{(2)}(\lambda) \rho_n^{(2)}(\lambda)] = 0, \quad (20)$$

选择占据数表象可以消除非对角部分,得到形式简单的微分方程

$$\partial_t \vartheta_1^{(1)}(k) + v_1^{(1)}(k) \partial_x \vartheta_1^{(1)}(k) = 0, \quad (21)$$

$$\partial_t \vartheta_n^{(2)}(\lambda) + v_n^{(2)}(\lambda) \partial_x \vartheta_n^{(2)}(\lambda) = 0, \quad (22)$$

其中 $\vartheta_n^{(r)}(\lambda)$ ($r=1,2$) 为准粒子占据数,即准动量(快度)分布函数除以态密度的分布函数 $\vartheta_n^{(r)}(\lambda) = \frac{\rho_n^{(r)}(\lambda)}{\rho_{n,t}^{(r)}(\lambda)}$,依赖于 λ, x 和 t 。微分方程

(21)式和(22)式是处理两分量玻色气体非平衡态问题的主要方程,在给定初态的情况下,系统会按照该方程组演化,进而得到占据数,可以进一步计算粒子数密度、磁化密度和能量密度:

$$n[\rho] = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \rho_1^{(1)}(k), \quad (23)$$

$$m[\rho] = \frac{n[\rho]}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \rho_n^{(2)}(\lambda), \quad (24)$$

$$e = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \rho_1^{(1)}(k) e(k) - 2m[\rho] \Omega, \quad (25)$$

以及这些量对应的流:

$$j_n[\rho] = \int_{-\infty}^{+\infty} dk v_1^{(1)}(k) \rho_1^{(1)}(k), \quad (26)$$

$$j_m[\rho] = \frac{j_n[\rho]}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda v_n^{(2)}(\lambda) \rho_n^{(2)}(\lambda) n, \quad (27)$$

$$j_e[\rho] = \int_{-\infty}^{+\infty} dk v_1^{(1)}(k) \rho_1^{(1)}(k) e(k) - 2\Omega j_m[\rho]. \quad (28)$$

2.2 温度差下的解

假设两个半无限子系统,分别处于热力学平衡态,左边温度高于右边,即 $T_L > T_R$,突然将其拼接起来后,系统因温度差而演化,经过长时间的演化,在 $x=0$ 附近形成稳态,研究稳态下的密度和流。

系统经过长时间的弛豫演化,在每一个局域单元内,在满足无穷多守恒量的约束条件下,达到了熵的最大值。虽然每个准粒子的运

动速度不一样,但是都在作匀速运动,其运动速度就是有效速度,所以准粒子占据数和系统物理量在时空上仅依赖一个参数 $\xi = x/t$,如图1所示的“光锥”行为。所以(21)、(22)式可以化简为:

$$[v_{1,\xi}^{(1)}(k) - \xi] \partial_{\xi} \vartheta_{1,\xi}^{(1)}(k) = 0, \quad (29)$$

$$[v_{n,\xi}^{(2)}(\lambda) - \xi] \partial_{\xi} \vartheta_{n,\xi}^{(2)}(\lambda) = 0. \quad (30)$$

该方程的解为

$$\vartheta_{1,\xi}^{(1)}(k) = \vartheta_{1,T_L}^{(1)}(k) \Theta_H(v_{1,\xi}^{(1)}(k) - \xi) + \vartheta_{1,T_R}^{(1)}(k) \Theta_H(\xi - v_{1,\xi}^{(1)}(k)), \quad (31)$$

$$\vartheta_{n,\xi}^{(2)}(\lambda) = \vartheta_{n,T_L}^{(2)}(\lambda) \Theta_H(v_{n,\xi}^{(2)}(\lambda) - \xi) + \vartheta_{n,T_R}^{(2)}(\lambda) \Theta_H(\xi - v_{n,\xi}^{(2)}(\lambda)), \quad (32)$$

其中 $\Theta_H(x)$ 为阶跃函数 $\Theta_H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$,

$\vartheta_{n,T}^{(r)}(\lambda)$ 为温度为 T 时的平衡态占据数

$$\vartheta_{n,T}^{(r)}(\lambda) = \frac{1}{1 + e^{\epsilon_n^{(r)}(\lambda)/T}}. \quad (33)$$

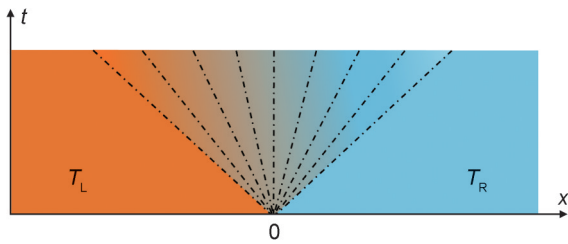


图1 在温度为 T_L 和 T_R 两个处于热力学平衡下的半无限系统接触后出现一个光锥区域
虚线代表 $\xi = x/t$ 的不同值,稳态位于 $\xi = 0$ 。

Fig. 1 After the sudden junction of the two halves in two thermal states at temperatures T_L and T_R , a light-cone region emerges from the junction

The dashed line represents the different values of $\xi = x/t$, and the steady state is at $\xi = 0$.

为了确定非平衡态占据数 $\vartheta_{n,\xi}^{(r)}$,通常借助迭代法求出它的数值解:先假设一个初始有效速度 v_{ξ} ,将其代入(31)、(32)式得到 $\vartheta_{n,\xi}^{(r)}$,再通过(6)、(7)、(17)和(18)式求出新的有效速度,再代入(31)、(32)式,重复上述过程,直到相邻两次的有效速度差非常小时停止迭代,得到所需的 $\vartheta_{n,\xi}^{(r)}$ 。

一旦确定了 $\vartheta_{n,\xi}^{(r)}$ 后,就可以通过求解(6)式和(7)式来确定准动量分布函数和快度分布函数,并用它们来计算守恒量密度和流的分布。

3 结果分析

3.1 平衡态

在计算模型的动力学行为前,先计算了其在平衡态下的性质。我们用迭代法对热力学平衡态下的BA方程(10)、(11)式和热力学极限下的积分方程(6)、(7)式进行有效的数值求解,得到了平衡态的准动量分布函数和快度分布函数。两分量玻色气体的准动量分布函数和单分量情形类似。如图2(a)所示,当温度 $T = 0.04$ (蓝线)时,准动量分布函数在 $k = 0$ 处有一个峰值,随着 $|k|$ 的增大,函数值逐渐减小,在费米动量附近突然变为零。这里的费米动量类似于绝对零度下理想费米气体粒子占据的最高能级对应的正动量。此时温度非常低,准动量分布函数非常接近绝对零度下的分布,因为粒子间存在相互作用,所以所有粒子不能都占据在准动量为零的态上,而是类似满足泡利不相容原理的费米气体,形成了一个费米海分布,占满正负费米动量之间的准动量,而在正负费米动量之外没有占据,又因为粒子间的相互作用强度不是无穷大,而是处于相互作用的中间区域,所以准动量分布函数在正负费米动量之间不是均匀分布,而是在 $k = 0$ 最大,随着准动量绝对值的增大而减小。当增大温度为 $T = 1$ (红线)后,准动量分布由最大值减小为0的过程变得较为平缓,同时 $k = 0$ 处的函数值也下降。这是因为温度效应致使部分处于正负费米动量之间的准粒子被激发到正负费米动量之外的高准动量位置,造成了费米海内的占据概率降低,而费米海外的占据升高,在费米动量附近的分布变得光滑。

图2(b)和2(c)分别为 $T = 0.04$ 和 $T = 1$ 的快度分布函数,纵坐标采用对数坐标。当 $T = 0.04$ (图2(b))时,由于粒子间的排斥相互作用,快度分布在 $\lambda = 0$ 处出现极小值并且出现“V”字型突变,且 n 越小,突变越明显,但其突变的范围越小。在“V”字型之外,随着 $|\lambda|$ 的增大,快度分布函数减小,且 n 越大,函数值越小。具体原因分析如下:缀势能的积分方程(11)式右侧的两个积分项分别是关于准动量和快度缀势能的积分,始终保持正值,则可知积分方程左侧的快度缀势能 $\epsilon_n^{(2)}(\lambda)$ 始终大于等于右侧的

第一项 $2m\Omega$ 。准动量缀势能积分项的主要贡献范围大约在正负费米动量之间,且相互作用强度越大,则两个积分项的值就越大,导致快度缀势能在正负费米动量之间的值越大,从(32)式可知,对应的在费米海区间的占据数越小,因此快度分布在费米海区间出现了一个“V”字型低谷。准动量缀势能对越小的 n 影响越大,对应快度分布在费米海区间的变化范围就越大。当增大温度为 $T=1$ 时,温度减弱了相互作用引起的“V”字形,如图 2(c) 所示。当 $n=1$ 时,快度分布呈现“M”型分布,即在 $\lambda=0$ 处出现局域极小值,在费米动量附近出现极大值,后随着 $|\lambda|$ 的增大而减小;当增大 n 时,“M”型分布逐渐变为平滑的“弧形”分布,只在 $\lambda=0$ 处出现极大值,且当自旋快度 λ 足够大时,该温度下不同 n 的自旋快度分布趋近于同一值。

图 3(a) 显示电荷激发的有效速度,表示准

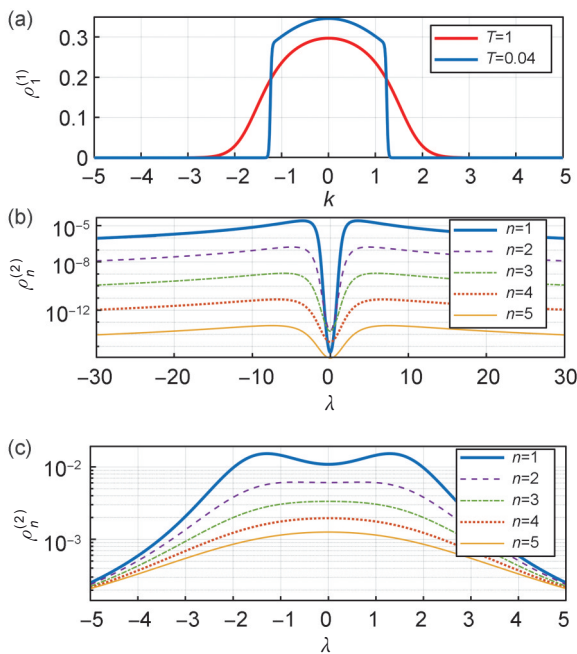


图 2 准动量分布函数(a)和温度分别为 $T=0.04$ (b)和 $T=1$ (c)时的快度分布函数
它们来自方程(6)、(7)的数值解。参数取值为 $c=1, \Omega=0.1, \mu=1$ 。

Fig. 2 The quasi-momentum distribution function (a) and the rapidity distribution function with the temperature $T=0.04$ (b) and $T=1$ (c), respectively. They come from the numerical solutions of Eqs. (6) and (7). We have set $c=1, \Omega=0.1$ and $\mu=1$.

粒子的运动速度。对于相互作用强度为零的情况,准动量对应的有效速度等于单粒子速度的 2 倍,这是因为我们前面设了 $2m=1$ 。对于相互作用强度不为零的情况,根据(15)式或者(17)式,相互作用强度给予准动量的有效速度一定的修正。例如图 3(a),费米动量对应的有效速度,即声速,为 1.6。声速是系统在基态的基础上产生的最小的激发引起的能量改变量与动量改变量的比值。这种激发由费米动量附近的准粒子跃迁产生,所以声速就是费米动量对应的有效速度。在我们的两分量系统中,存在电荷准粒子和自旋准粒子,因此也存在两种声速,分别是电荷声速和自旋声速。当准动量为零时,有效速度也为零;当准动量为正(负)时,有效速度也为正(负),即准粒子的运动方向与准动量完全相同。整体上,有效速度随着准动量的增加而单调增加,但两者不是线性关系,在准动量为零附近的有效速度增加较为平缓。图 3(b)为自旋激发的有效速度随快度的变化关系图,当快度为零时,有效速度也为零。与电荷激发有效速度的单调性存在很大的不同,当快度为正(负)时,有效速度为负(正),即自旋对应的准粒子的运动方向与快度相反,且快度分布整体呈现出先增大后减小再增大的趋势,在 $|\lambda|=\pm 1.3$ 附近有效速度的值最大(最小),随着 $|\lambda|$ 的增大,有效速度的值趋向于零。具体的原因分析如下:从自旋激发的有效速度的方程(18)式可以看出,自旋激发的有效速度除了和自身的耦合(方程右侧第二个积分项)外,主要受到准动量分布函数和其有效速度(方程右侧第一个积分项)的影响。对于 $\lambda > 0$ 的情况,在方程右侧第一个积分项中,准动量分布函数大于零, a_n 也大于零,大于零的准动量有效速度起主要贡献,因此第一积分项是大于零的,但是第一积分项的系数是负的,所以导致方程右侧自旋激发的有效速度小于零。在零到正费米动量之间,随着 λ 增大,准动量有效速度起主导作用,在对应的区间也变大,因此第一积分项的值也变大,导致了自旋激发的有效速度的下降。在大于正费米动量区间,随着 λ 增大,虽然准动量有效速度还在继续增大,但是准动量分布函数存在明显的下降,最后趋向

于零,导致它们的乘积和第一个积分项先到达一个峰值,然后下降,也趋向于零,所以相应的自旋激发有效速度先到达一个低谷,然后上升,最后趋向于零。低谷的位置大于费米动量。对于 $\lambda < 0$ 的情况,可以做类似的分析,总的来说,负的准动量有效速度导致正的自旋激发有效速度。

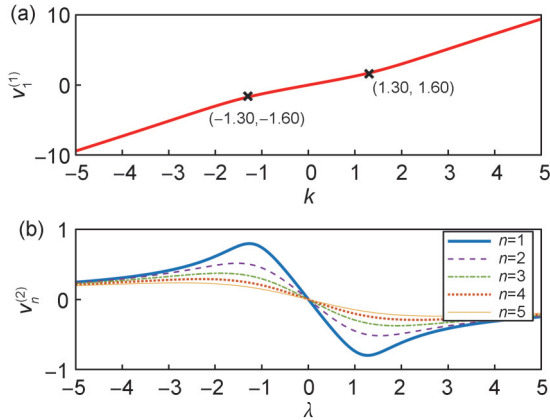


图3 准动量的有效速度(a)和快度函数的有效速度(b)它们来自方程(17)和(18)的数值解。图(a)标记处为准动量在正负费米动量对应的有效速度,参数取值为 $c=1, \Omega=0.1, \mu=1, T=0.04$ 。

Fig. 3 The effective velocity of the quasi-momentum (a) and the effective velocity of the rapidity function (b)

They come from numerical solutions of Eqs. (17) and (18).

Figure (a) marks the effective velocity of the quasi-momentum at the positive and negative Fermi point. We have set $c=1, \Omega=0.1, \mu=1$ and $T=0.04$.

在固定相互作用强度和化学势下,两个分量的粒子数密度(自旋向上 n_1 ,自旋向下 n_2)在不同磁场强度时随温度的变化,如图4所示。当温度很低时,即使微弱的正磁场,自旋向下粒子数密度 n_2 也会趋向于零,即系统中所有粒子的自旋向上,方向全部相同,这时系统处于铁磁态。在有限温度的情况下,磁场强度 Ω 越大, n_1 越大, n_2 越小,因此可以等效理解为磁场使得自旋向下的粒子发生翻转,变成了自旋向上的粒子。当磁场非常大时,系统中所有粒子都会自旋向上,方向全部相同,系统也会处于铁磁态。随着温度的升高,自旋向上粒子数密度 n_1 逐渐减小,自旋向下粒子数密度 n_2 逐渐增大,和磁场的效果相反,说明温度对磁场的翻转效果有一定的抑制作用。

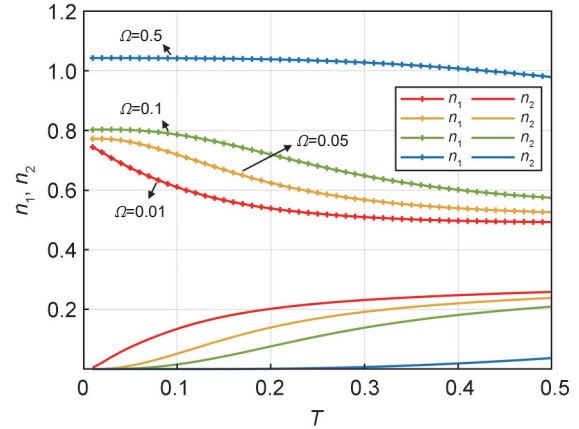


图4 在不同磁场强度下两个分量的粒子密度随温度的变化(参数取值为 $c=1, \mu=1$)

Fig. 4 The particle densities of the two components varied with temperature under different magnetic fields (We have set $c=1$ and $\mu=1$)

3.2 非平衡态

图5(a)为在不同 ξ 值下准动量 k 的分布函数,由于温度较小,所以准动量的分布在不同 ξ 值下的变化很小,由图5(a)中的插图可以看出,从 $\xi=0$ 到 $\xi=1.6$,准动量 k 分布函数值逐渐增大,当 $\xi=1.6$ 时,准动量 k 的分布函数值最大, $\xi=1.8$ 时准动量 k 的分布函数值又减小。

非平衡态的自旋激发可根据占据数表达式(32)和快度的有效速度(可参照平衡态时的有效速度分布图3(b))分析。当 $\xi=1$ 时快度的有效速度 $v_n^{(2)}$ 都小于1,因此快度的占据数和较低温度 T_R 的占据数相同,几乎没有自旋激发。当 $\xi=0$ 时,在快度为负值区间,有效速度 $v_n^{(2)}$ 大于0,占据数和较高温度 T_L 的占据数相同,存在自旋激发;在快度为正值区间,有效速度 $v_n^{(2)}$ 小于0,占据数和较低温度 T_R 的占据数相同,几乎没有自旋激发。同理分析,当 $\xi=0.3$ 时,在快度为负值的区间,存在部分自旋激发;当 $\xi=1.6$ 时,没有自旋激发。因此由图5(d)中快度分布函数 $\rho_n^{(2)}$ 可知,在 $\xi=0$ 处存在较大的自旋激发, $\xi=0.3$ 处存在较小的自旋激发, $\xi=1$ 和 $\xi=1.6$ 处几乎没有自旋激发。

自旋激发对准动量分布函数有一定的影响,如图5(b)所示。对于 $\xi \geq 0$ 的情况,当自旋激发变多时,对应的快度分布函数 $\rho_n^{(2)}$ 在负快度区间变大,根据积分方程(6)式,动量分布函数

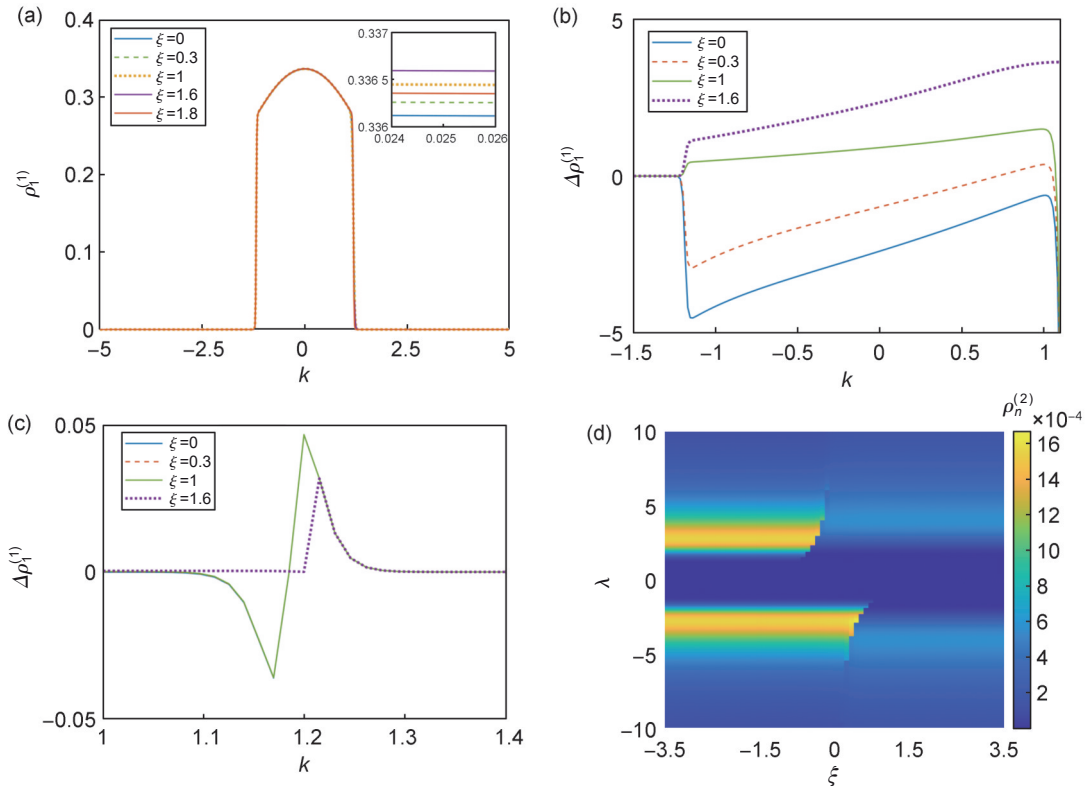


图5 基于不同 ξ 的准动量分布函数和快度分布函数及其与右侧平衡态的偏差

(a)为不同 ξ 下的准动量分布函数 $\rho_1^{(1)}(\xi)$,插图为 $x=0$ 附近的放大图;(b)和(c)分别为费米动量以内及其附近区域的准动量分布函数差 $\Delta\rho_1^{(1)}(\xi)=\rho_1^{(1)}(\xi)-\rho_1^{(1)}(1.8)$,其中(b)的纵轴值已放大 10^4 倍;(d)快度分布函数。系统参数设为: $c=1, \Omega=0.01, \mu=1, T_L=0.04, T_R=0.02$ 。

Fig. 5 Quasimomentum and rapidity distribution functions for different ξ and their deviations from the right equilibrium state (a) Quasimomentum distribution function $\rho_1^{(1)}(\xi)$ for various ξ . The inset shows a magnified view near $x=0$. (b) and (c) show the difference in the quasimomentum distribution function, $\Delta\rho_1^{(1)}(\xi)=\rho_1^{(1)}(\xi)-\rho_1^{(1)}(1.8)$, within and near the Fermi momentum, respectively. Note that the vertical axis values in (b) are magnified by a factor of 10^4 . (d) Rapidity distribution function. System parameters are set as: $c=1, \Omega=0.01, \mu=1, T_L=0.04$ and $T_R=0.02$.

$\rho_1^{(1)}$ 主要在负准动量区间变小,尤其在负费米动量附近,因此如图5(b)所示,随着 ξ 变小,非平衡态的准动量分布函数和较低温度 T_R 的平衡态的差值也变大,在费米海区间,越趋向于负费米动量,差值越大。准动量分布函数这种变化对粒子数密度分布、能量密度分布、能量流分布和粒子流分布产生了影响。对于处在0到正电荷声速区间的 ξ ,自旋激发导致准动量分布函数在负准动量区间下降占主导地位,又因为在负准动量区间, $e(k)<0, v<0, ve(k)>0$,所以根据(25)式—(28)式,随着 ξ 的变小,准动量分布函数也变小,导致粒子数密度也变小(图6(a)),能量密度变大(图7(a)),粒子流变大(图8(b)),能量流的第一项和第二项都变小。

除了自旋激发,系统还存在准动量的电荷激发。根据非平衡态占据数[(31)式]和准动量的有效速度(可参照平衡态时的有效速度分布图3(a))分析,当 $\xi=1.6$ 时即电荷声速,由于正费米动量以上的准粒子有效速度 $v_1^{(1)}$ 大于1.6,因此费米动量以上的准动量占据数和较高温度 T_L 的占据数相同,存在电荷激发,在正费米动量以下的准粒子有效速度 $v_1^{(1)}$ 小于1.6,因此正费米动量以下的准动量占据数和较低温度 T_R 的占据数相同,几乎没有电荷激发,所以准动量分布函数和较低温度 T_R 的差值在正费米动量以上出现一个峰值,如图5(c)紫色点线所示。从物理上来说,电荷激发的准粒子运动速度快于费米海内的其他粒子,因此率先到达右侧的平衡态区。准动量分布函数的峰值导致了

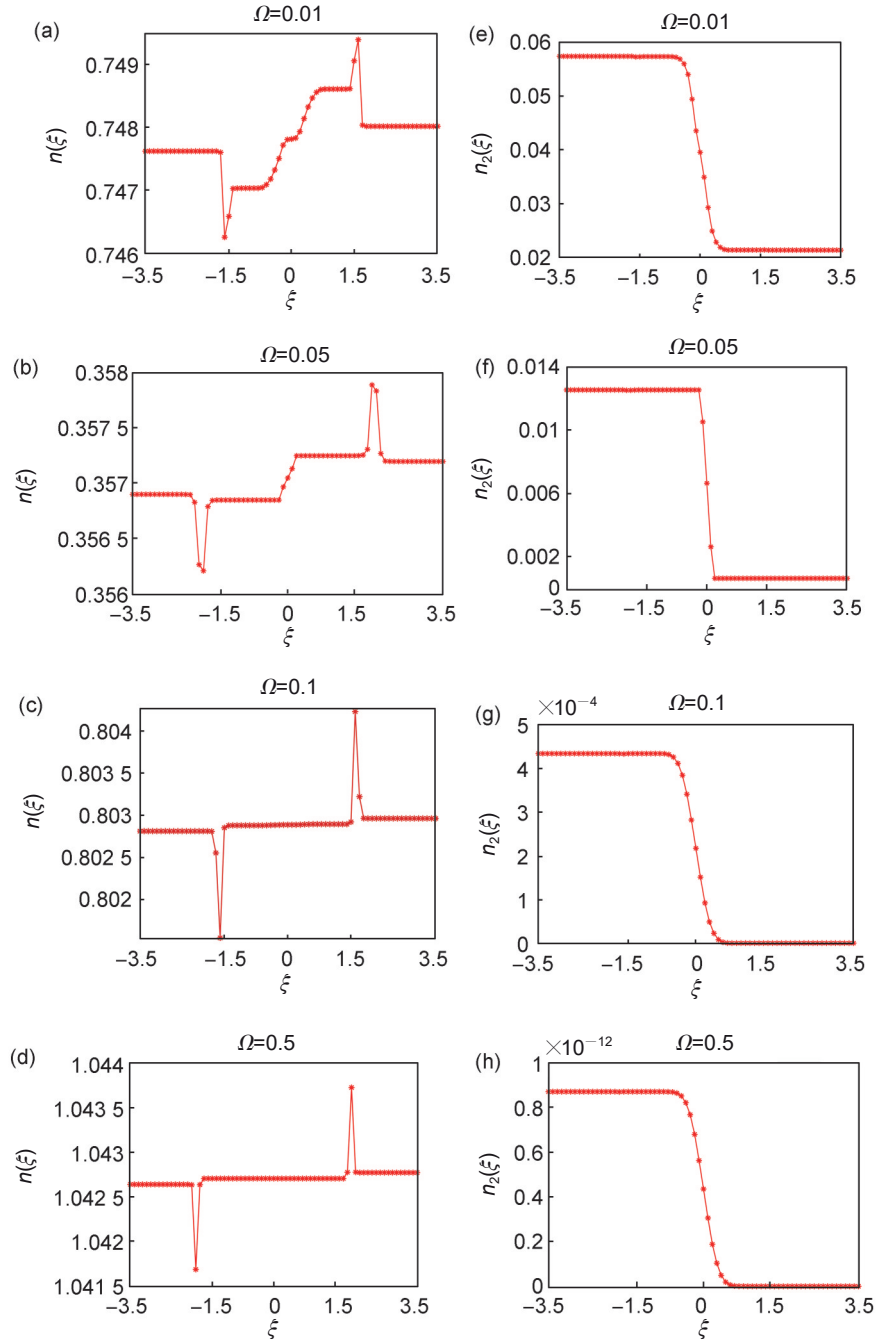


图6 低温下在磁场强度分别为0.01 (a)、0.05 (b)、0.1 (c) 和0.5 (d)的总粒子数密度分布和磁场强度分别为0.01 (e)、0.05 (f)、0.1 (g)和0.5 (h)时自旋向下的粒子数密度分布
参数取值为 $c = 1, \mu = 1, T_L = 0.04, T_R = 0.02$ 。

Fig. 6 At low temperature, when the magnetic field strength is 0.01 (a), 0.05 (b), 0.1 (c) and 0.5 (d) respectively, the total particle number density distribution and the spin-down particle number density distribution when the magnetic field strength is 0.01 (e), 0.05 (f), 0.1 (g) and 0.5 (h), respectively

We have set $c = 1, \mu = 1, T_L = 0.04$ and $T_R = 0.02$.

粒子密度和粒子流在 $\xi = 1.6$ 时的峰,如图6(a)和图8(b)所示。当 $\xi = 1$ 时准动量在正费米动量附近有效速度 $v_1^{(1)}$ 大于1,因此正费米动量以上的准动量占据数和较高温度 T_L 的占据数相

同,存在电荷激发,准动量分布函数和较低温度 T_R 的差值在正费米动量附近出现谷和峰,如图5(c)绿线所示。其他的 ξ 可以作同样的分析。

从图6到图7可以看出,粒子数密度和能量密度在弱磁场强度下都呈现了四个平台。最右边的平台对应温度低的平衡态,激发几乎可以忽略。最左边的平台对应温度高的平衡态,存在两种激发,一种是准动量对应的电荷激发,

另一种是快度对应的自旋激发。 $\xi=0$ 右边的第一个平台与最右侧的平台相比,其增量来自正费米动量附近电荷激发的贡献。 $\xi=0$ 左边的第一个平台与最左侧的平台相比,减少的部分是由于负费米动量附近电荷激发的缺失。

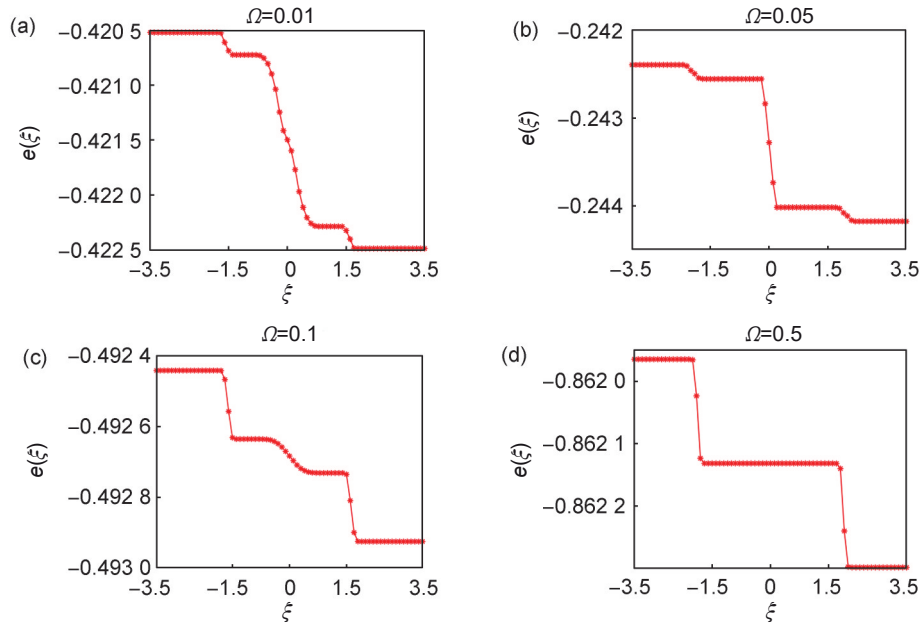


图7 低温下两分量玻色气体在磁场强度分别为0.01(a)、0.05(b)、0.1(c)和0.5(d)时的能量密度分布
参数取值为 $c=1, \mu=1, T_L=0.04, T_R=0.02$ 。

Fig. 7 The energy density distribution of the two-component Bose gas in the magnetic field intensity of 0.01 (a), 0.05 (b), 0.1 (c) and 0.5 (d) at low temperature

We have set $c=1, \mu=1, T_L=0.04$ and $T_R=0.02$.

图6表示低温下两分量玻色气体在不同磁场强度下总粒子密度和自旋向下粒子密度分布,由图5(c)可以看出,当磁场强度 $\Omega=0.01$ 时,在 $\xi=1.6$ 处 $\rho_1^{(1)}$ 在正费米动量以上出现了来自左侧准粒子的贡献,在 $\xi=-1.6$ 处 $\rho_1^{(1)}$ 在负费米动量以下缺失了准粒子激发,所以总粒子数密度在这两个位置(正负声速位置)出现高峰和低谷。类似地,图6(b)—图6(d)中出现的高峰和低谷是同样的原因造成的。图6(e)—图6(h)为自旋向下的粒子数密度分布,自旋向下的粒子数密度 n_2 在 $\xi=0$ 附近发生突变,不管磁场强度有多大,都在 $\xi=0$ 附近呈现突然下降的行为,整体上是单个台阶的形状,不受声速的影响。图6(a)—图6(d)磁场强度依次增大,自旋向下的粒子数密度 n_2 变得越来越小,当磁场强度 $\Omega=0.5$,此时自旋向下的粒子数密度接近于0。

保持相互作用强度、温度和化学势不变,改变磁场的值,得到了低温下两分量玻色气体在不同磁场强度下能量密度的分布,如图7所示。由于两个子系统是半无限长的且 $T_L > T_R$,所以能量密度从左往右整体呈下降趋势。当磁场强度较小时,如图7(a)所示,能量密度呈现四个平台,且 $\xi=0$ 两边的平台相距比较远,能量密度的突变较大。最左边和最右边的平台高度分别是温度为 T_L 和 T_R 的热力学平衡态的能量密度。这两个平台到相邻平台的转变位置分别为负正电荷声速,这是因为低温下两个子系统准动量 k 分布的差别主要集中在费米动量附近。由图5(b)可知, $\xi=0$ 附近的变化主要是自旋激发导致的,中间两个平台到 $\xi=0$ 的转变位置为正负自旋声速。如图7(a)—图7(d)所示,随着磁场强度的增大,则自旋朝下粒子的占比变小,因此能量密度分布中间两平台间

的能量密度差值越来越小,直到 $\Omega=0.5$ 时,差值消失,由最初的四个平台变为三个平台。图7(d)是所有粒子都是自旋向上而自旋向下粒子几乎为零的情况下的能量密度分布,中间的平台高度是两个平台高度的平均值。

图8为不同磁场强度下的能量流和粒子流的分布,初始时刻系统处于热平衡态,所以能量流和粒子流在左右两侧远离 $\xi=0$ 的地方都为零。 $\xi=0$ 处的能量流主要来自自旋激发的影响。能量流公式由两项组成,受自旋激发的影响,第一项在 $\xi=0$ 处形成一个谷,第二项来自磁化密度的流的贡献,在 $\xi=0$ 处形成一个更陡的谷,两项相减形成一个峰。磁场强度越大,自旋向下的粒子越少,自旋激发越少,峰值越趋向两个平台,在磁场非常大的时候峰值消失。

如图8(a)所示,当磁场强度 $\Omega=0.01$ 时,能量流在 $\xi=0$ 处出现峰值,但是峰值高度低于两边的平台,且在 $\xi=0$ 附近两边出现局域极小值;随着磁场强度的增大,如磁场强度 $\Omega=0.05$ (绿色虚线)时, $\xi=0$ 处的峰值升高,高于两边的平台,且局域极小值消失;随着磁场强度的再次增大, $\xi=0$ 处的峰值降低,且变得逐渐平缓;当磁场强度增大到 $\Omega=0.5$ 时,系统只存在自旋向上的粒子, $\xi=0$ 处不再有峰值,在正负声速内能量流保持恒定值。图8(b)为粒子流分布,当磁场强度 $\Omega=0.01$ 和 0.05 时,粒子流出现三个峰值,特别的是在 $\xi=0$ 处,粒子流出现一个小的峰值,当增大磁场强度为 $\Omega=0.1$ 和 0.5 时,粒子流仅在正负声速处出现两个峰值。由图4可知,磁场强度越大 n_2 越小,当磁场强度增大到一定程度时,系统中自旋向下的粒子数密度几乎为零,这时两分量玻色气体表现出的动力学行为与单分量玻色气体类似,可参考文献[13]。另外,峰值之间的平台高度随着磁场强度的增大而降低,即随着自旋向下的粒子密度 n_2 的降低而降低。

在强相互作用下,保持化学势和磁场强度不变,得到了温度分别为 $T_L=0.04, T_R=0.02$ 和 $T_L=1, T_R=0.98$ 的能量密度 e 、能量流 j_e 、总粒子数密度 n 、自旋向下的粒子数密度 n_2 和粒子流 j_n 的分布。如图9(a)(f)所示,由于左边区

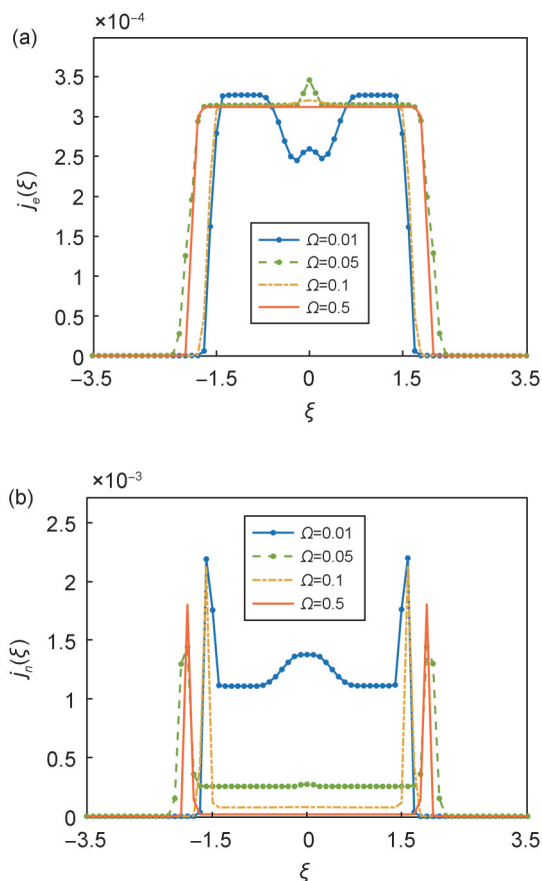


图8 低温下两分量玻色气体在不同磁场强度下的能量流分布(a)和粒子流分布(b)

参数取值为 $c=1, \mu=1, T_L=0.04, T_R=0.02$ 。

Fig. 8 The energy flow distribution (a) and particle flow distribution (b) of two-component Bose gas under different magnetic field strengths at low temperatures

We have set $c=1, \mu=1, T_L=0.04$ and $T_R=0.02$.

域的温度高于右边,所以能量密度的分布从左到右呈四个平台下降趋势,但温度较高时,平台消失,能量密度曲线由突变变得光滑,但整体趋势保持不变;如图9(b)和(g)所示,低温下在正负声速处存在明显的突变而在高温处比较光滑,但是能量流都在 $\xi=0$ 处出现了一个峰值;如图9(c)和(e)所示,温度较低时,总粒子数密度出现尖锐的峰和一个非常窄的谷,粒子流出现两个尖锐的峰,且都较为明显,但该温度下自旋向下的粒子数密度 n_2 一直处于很小的值,甚至为0,呈现两个平台,如图9(d)所示。随着温度的升高,如图9(h)和(j)所示,总粒子数密度仍然会出现峰和谷,粒子流仍然会出现两个峰值,但曲线都变得比较光滑,峰和谷变得更宽,同时,自旋向下的粒子数密度 n_2 增大。

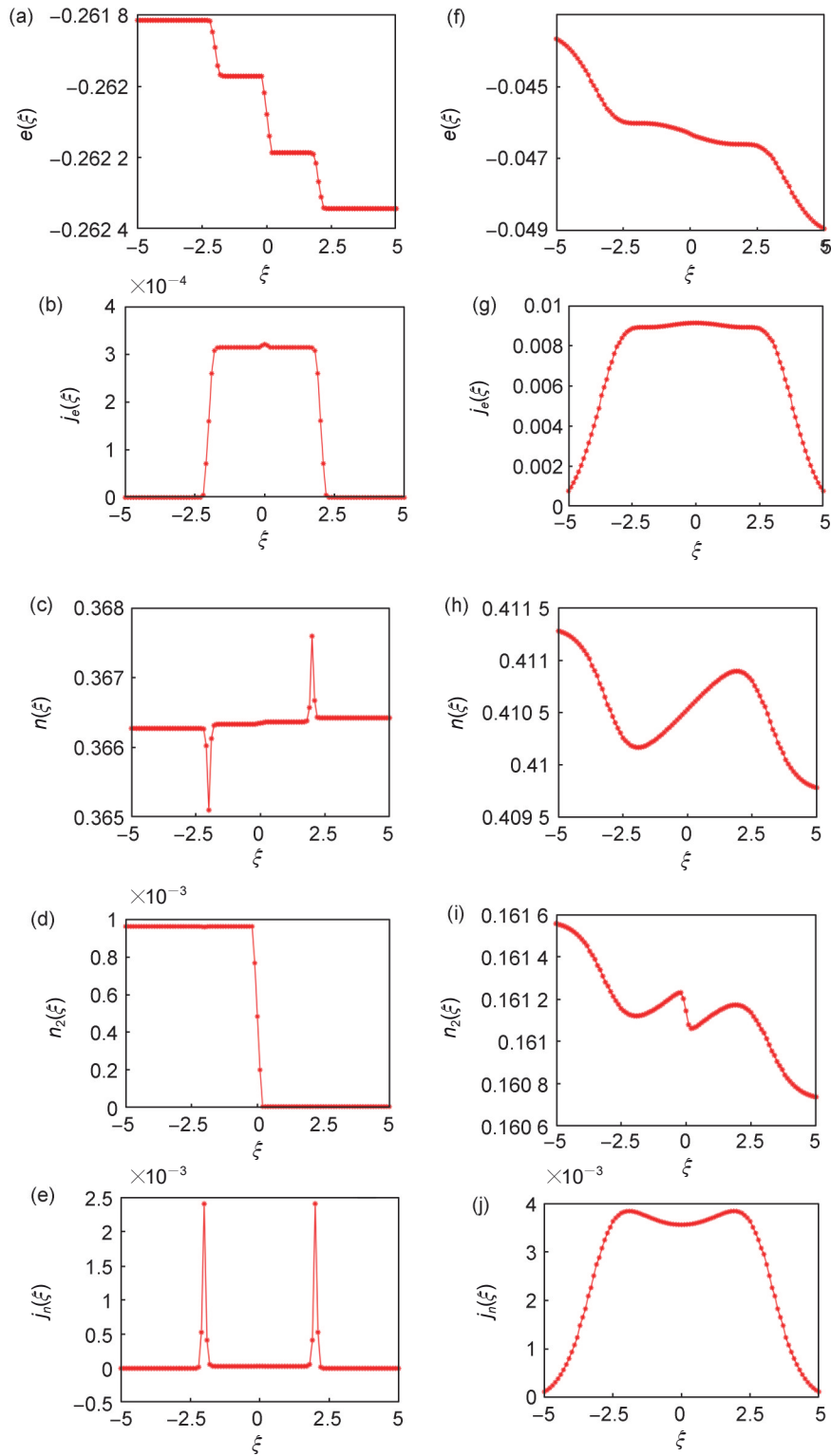


图9 强相互作用下在左右初始温度为 $T_L=0.04, T_R=0.02$ 的能量密度(a)、能量流(b)、总粒子数密度(c)、自旋向下的粒子数密度(d)、总粒子流(e) 的分布和 $T_L=1, T_R=0.98$ 的能量密度(f)、能量流(j)、总粒子数密度(h)、自旋向下的粒子数密度(i)、总粒子流(j)的分布 (参数取值为 $c=10, \mu=1, \Omega=0.1$)

Fig. 9 Under strong interactions, the distribution of energy density (a), energy flow (b), total particle density (c), density of spin-down particles (d), and total particle flow (e) with initial temperatures $T_L=0.04$ and $T_R=0.02$, and the distribution of energy density (f), energy flow (g), total particle density (h), density of spin-down particles (i), and total particle flow (j) with initial temperatures $T_L=1$ and $T_R=0.98$ (We have set $c=10, \mu=1$ and $\Omega=0.1$)

4 结论

本文通过BA方法,得到了准粒子的准动量分布、快度分布和有效速度,然后通过广义流体力学方法研究了两分量玻色气体在不同磁场强度以及不同温度下表现出的非平衡的性质。对于平衡态,相互作用导致快度分布在 $\lambda=0$ 附近区域的函数降低,而温度效应会一定程度上抵消相互作用的影响;准动量的有效速度方向与准动量相同,而快度对应的有效速度方向与快度相反。在保持相互作用强度和化学势不变的情况下,温度越高或者磁场强度越小,自旋向下粒子数密度就越大。对于温度差下的非平衡态,在低温弱磁场强度下,受自旋激发的影响,能量密度呈现四个平台特征,总粒子数密度在 $\xi=0$ 两边出现平台,能量流和粒子密度流都在 $\xi=0$ 处出现峰值,这都是和单分量玻色气体的不同之处;而磁场强度增大到一定程度时,两分量玻色气体转变为单分量玻色气体,这时的能量密度、能量流、粒子密度以及粒子流的分布与单分量玻色气体类似,此时自旋向下的粒子数密度接近于零。

参考文献:

- [1] BLOCH I, DALIBARD J, ZWINGER W. Many-body Physics with Ultracold Gases[J]. *Rev Mod Phys*, 2008, **80** (3): 885–964. DOI: 10.1103/revmodphys.80.885.
- [2] CHIN C, GRIMM R, JULIENNE P, *et al.* Feshbach Resonances in Ultracold Gases[J]. *Rev Mod Phys*, 2010, **82** (2): 1225–1286. DOI: 10.1103/revmodphys.82.1225.
- [3] BASTIANELLO A, DE LUCA A, DOYON B, *et al.* Thermalization of a Trapped One-dimensional Bose Gas via Diffusion[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **125**(24): 240604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.240604.
- [4] SCHEMMER M, BOUCHOLE I, DOYON B, *et al.* Generalized Hydrodynamics on an Atom Chip[J]. *Phys Rev Lett*, 2019, **122**(9): 090601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.090601.
- [5] MALVANIA N, ZHANG Y C, LE Y, *et al.* Generalized Hydrodynamics in Strongly Interacting 1D Bose Gases[J]. *Science*, 2021, **373**(6559): 1129–1133. DOI: 10.1126/science.abf0147.
- [6] RYLANDS C, ROZENBAUM E B, GALITSKI V, *et al.* Many-body Dynamical Localization in a Kicked Lieb-Liniger Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 2020, **124**(15): 155302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.155302.
- [7] SCOPA S, CALABRESE P, PIROLI L. Real-time Spin-charge Separation in One-dimensional Fermi Gases from Generalized Hydrodynamics[J]. *Phys Rev B*, 2021, **104** (11): 115423. DOI: 10.1103/physrevb.104.115423.
- [8] LIEB E H, LINIGER W. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. the General Solution and the Ground State [J]. *Phys Rev*, 1963, **130**(4): 1605–1616. DOI: 10.1103/physrev.130.1605.
- [9] LIEB E H. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. the Excitation Spectrum[J]. *Phys Rev*, 1963, **130**(4): 1616–1624. DOI: 10.1103/physrev.130.1616.
- [10] YANG C N, YANG C P. Thermodynamics of a One-dimensional System of Bosons with Repulsive Delta-function Interaction[J]. *J Math Phys*, 1969, **10**(7): 1115–1122. DOI: 10.1063/1.1664947.
- [11] YANG C N. Some Exact Results for the Many-body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-function Interaction[J]. *Phys Rev Lett*, 1967, **19**: 1312. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1312.
- [12] GUAN X W, BATCHELOR M T, LEE C H. Fermi Gases in one Dimension: From Bethe Ansatz to Experiments[J]. *Rev Mod Phys*, 2013, **85**(4): 1633–1691. DOI: 10.1103/revmodphys.85.1633.
- [13] CASTRO-ALVAREDO O A, DOYON B, YOSHIMURA T. Emergent Hydrodynamics in Integrable Quantum Systems out of Equilibrium[J]. *Phys Rev X*, 2016, **6**(4): 041065. DOI: 10.1103/physrevx.6.041065.
- [14] BERTINI B, COLLURA M, DE NARDIS J, *et al.* Transport in Out-of-equilibrium XXZ Chains: Exact Profiles of Charges and Currents[J]. *Phys Rev Lett*, 2016, **117**(20): 207201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.207201.
- [15] DOYON B, YOSHIMURA T. A Note on Generalized Hydrodynamics: Inhomogeneous Fields and other Concepts[J]. *SciPost Phys*, 2017, **2**(2): 14. DOI: 10.21468/scipostphys.2.2.014.
- [16] BASTIANELLO A, ALBA V, CAUX J S. Generalized Hydrodynamics with Space-time Inhomogeneous Interactions[J]. *Phys Rev Lett*, 2019, **123**(13): 130602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.130602.
- [17] FAVA M, BISWAS S, GOPALAKRISHNAN S, *et al.* Hydrodynamic Nonlinear Response of Interacting Integrable Systems[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2021, **118** (37): e2106945118. DOI: 10.1073/pnas.2106945118.
- [18] SCOPA S, CALABRESE P, PIROLI L. Generalized Hydrodynamics of the Repulsive Spin-1/2 Fermi Gas[J]. *Phys Rev B*, 2022, **106**(13): 134314. DOI: 10.1103/physrevb.106.134314.

- [19] CAUX J S, DOYON B, DUBAIL J, *et al.* Hydrodynamics of the Interacting Bose Gas in the Quantum Newton Cradle Setup[J]. *SciPost Phys*, 2019, **6**(6): 70. DOI: 10.21468/scipostphys.6.6.070.
- [20] BASTIANELLO A. Sine-Gordon Model from Coupled Condensates: a Generalized Hydrodynamics Viewpoint [J]. *Phys Rev B*, 2024, **109**(3): 035118. DOI: 10.1103/physrevb.109.035118.
- [21] ERHARD M, SCHMALJOHANN H, KRONJÄGER J, *et al.* Measurement of a Mixed-spin-channel Feshbach Resonance in Rb₈₇[J]. *Phys Rev A*, 2004, **69**(3): 032705. DOI: 10.1103/physreva.69.032705.
- [22] WIDERA A, MANDEL O, GREINER M, *et al.* Entanglement Interferometry for Precision Measurement of Atomic Scattering Properties[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **92**(16): 160406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.160406.
- [23] KLEINE A, KOLLATH C, MCCULLOCH I P, *et al.* Spin-charge Separation in Two-component Bose Gases [J]. *Phys Rev A*, 2008, **77**: 013607. DOI: 10.1103/physreva.77.013607.
- [24] EISENBERG E, LIEB E H. Polarization of Interacting Bosons with Spin[J]. *Phys Rev Lett*, 2002, **89**(22): 220403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.220403.
- [25] YANG K, LI Y Q. Rigorous Proof of Pseudospin Ferromagnetism in Two-component Bosonic Systems with Component-independent Interactions[J]. *Int J Mod Phys B*, 2003, **17**(7): 1027–1033. DOI: 10.1142/s0217979203018041.
- [26] KLAUSER A, CAUX J S. Equilibrium Thermodynamic Properties of Interacting Two-component Bosons in one Dimension[J]. *Phys Rev A*, 2011, **84**(3): 033604. DOI: 10.1103/physreva.84.033604.