

不等质量双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的混溶相变和三相点

李可芯¹, 贺丽^{2*}, 余增强¹

(1. 山西大学 理论物理研究所, 山西 太原 030006;

2. 山西大学 物理电子工程学院, 山西 太原 030006)

摘要:量子涨落对于多组元系统的混溶性有重要影响。本文从包含量子涨落修正的物态方程出发,研究了具有排斥相互作用的 不等质量双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的基态相图。在混溶参数很小的情形下,通过求解热力学平衡条件得到了不混溶态、部分混溶态以及均匀混溶态之间的相边界方程。不同于等质量的情况,在质量不等的混合系统中,两类不同构型的部分混溶态会在适当条件下同时出现,形成三相共存。我们计算了三相共存态的原子密度,确定了出现三相点的相互作用参数范围,并由此归纳出在适当条件下呈现的三种基态相图。这些结果为冷原子物理的实验探索提供了有价值的理论参考。

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚体;混溶性;相变;三相点;量子涨落

中图分类号:O51 文献标志码:A 文章编号:0253-2395(2026)02-0315-08

Miscibility Phase Transitions and Triple Point in Dual-Species Bose-Einstein Condensates with Unequal Mass

LI Kexin¹, HE Li^{2*}, YU Zengqiang¹

(1. Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;

2. College of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Quantum fluctuations have important impact on the miscibility of a multi-component system. Based on the equation-of-state with the corrections due to quantum fluctuations, we investigate the ground-state phase diagram of repulsively interacting binary Bose mixtures with unequal-mass. For the small miscibility parameter, the phase boundaries between the immiscible state, partially-miscible state and the homogenous state are determined by solving the thermodynamic balance equation. Unlike the equal-mass case, in the mixture with mass imbalance, the two different kinds of partially-miscible states can occur simultaneously under appropriate conditions, forming the unique state with three-phase-coexistence. We derive the densities of coexisting phase at the triple point and determine the interaction parameter window for occurrence of the triple point. Three types of phase diagrams presented under appropriate conditions are summarized. These results provide helpful information for the on-going experimental exploration in ultracold atoms.

Key words: Bose-Einstein condensate; miscibility; phase transition; triple point; quantum fluctuation

收稿日期:2024-03-25;修回日期:2024-05-28

基金项目:国家自然科学基金(12104275;12174230)

作者简介:李可芯(1998-),女,山西晋城人,硕士研究生,研究方向为冷原子物理。E-mail:likx18896659499@163.com

* 通信作者:贺丽(HE Li),E-mail:heli@sxu.edu.cn

引文格式:李可芯,贺丽,余增强.不等质量双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的混溶相变和三相点[J].山西大学学报(自然科学版),2026,49(2):315-322. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024098.

0 引言

研究多组元量子物质的混溶性是认识复杂多体系统丰富物性的基础。在传统凝聚态体系中,液体³He和液体⁴He的混溶性曾引发了实验和理论方面的广泛兴趣^[1-3]。近年来,随着冷原子物理的飞速发展,多组分玻色-爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein Condensate, BEC)成为一个新的研究热点,吸引了越来越多的关注^[4-8]。各种不同元素、同位素构成的混合BEC,如²³Na-⁸⁷Rb^[9-10]、³⁹K-⁸⁷Rb^[11-12]、⁴¹K-⁸⁷Rb^[13-14]、⁸⁵Rb-⁸⁷Rb^[15-16]等已被成功实现。实验上通过Feshbach共振技术调控原子间的相互作用,在这些体系中观测到了从混溶态到不混溶态的相变^[10-11, 13, 16]。

根据平均场理论,在零温、无外势情形下,双组分BEC的混溶条件可以用单一相互作用参数 $\Delta_g \equiv \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} - 1$ 刻画^[17-18],其中 g_{ij} 是不同组分原子间短程排斥相互作用的强度(角标 $i, j = 1, 2$ 标记原子种类)。当 $\Delta_g < 0$ 时,两组分凝聚体可以均匀混溶;当 $\Delta_g > 0$ 时,两组分则不能混溶。在简谐势阱中,除了相互作用强度,原子数、组分比和原子质量也都是影响体系混溶性的重要因素^[19-23]。在有限温度, Δ_g 满足的混溶条件会因热涨落效应而发生移动^[24-26]。

最近更深入的理论研究表明^[27],当 Δ_g 为小正数时,量子涨落会对混溶相变产生关键影响,并导致形成两类不同构型的部分混溶态(也称混合气泡态)。如何实现这种新的量子物态是当前冷原子实验面临的一个挑战,对于检验超越平均场层次的量子多体效应具有重要意义。文献^[28]针对等质量的双组分BEC详细讨论了部分混溶态出现的密度区间及其相变特征。对于不等质量的双组分BEC,质量失配使得量子涨落的贡献更加复杂,这会给基态相图带来哪些丰富性的变化是有待深入研究的理论问题。

本文基于包含量子涨落修正的物态方程,考察了由不等质量原子组成的双组分BEC的基态相图,在混溶参数 Δ_g 很小的条件下推导出了不混溶态、部分混溶态以及均匀混溶态之间

的相边界方程。与等质量情形不同的是,此体系的两类部分混溶态可以在适当的相互作用参数下同时出现,形成三相共存。我们计算了三相共存态的原子密度,并确定了出现三相点的参数范围。这些结果为冷原子物理的实验探索提供了有价值的理论参考。

1 物态方程与混溶相变

1.1 均匀相的物态方程

作为出发点,我们先假定双组分BEC在零温下可以均匀混溶。当体系处于 Δ_g 很小的相互作用区间时,单位体积内混合BEC的能量写为^[27]

$$\mathcal{E}(n_1, n_2) = \frac{1}{2} g_{11} n_1^2 + \frac{1}{2} g_{22} n_2^2 + g_{12} n_1 n_2 + \frac{8m_1^{3/2}}{15\pi^2 \hbar^3} (g_{11} n_1)^{5/2} I\left(\frac{m_2}{m_1}, \frac{g_{22} n_2}{g_{11} n_1}\right), \quad (1)$$

其中 n_1, n_2 为两种组分的原子密度, m_1, m_2 为原子质量, \hbar 为约化普朗克常数,无量纲二元函数 $I(z, x)$ 表达为

$$I(z, x) = \frac{1}{2(z^2 - 1)} \times \left[(x^2 z^2 + 2z^2 - 7xz - 2) \sqrt{\frac{x}{z} + 1} - (xz^3 - 3z^2 + 6xz + 2) \frac{\sqrt{1+xz}}{\sqrt{z^2-1}} F \times \left(\arccos \frac{1}{z}, \frac{xz}{1+xz} \right) + (2x^2 z^4 + 7xz^3 - 3x^2 z^2 - 3z^2 + 7xz + 2) \times \frac{\sqrt{1+xz}}{\sqrt{z^2-1}} E \left(\arccos \frac{1}{z}, \frac{xz}{1+xz} \right) \right]. \quad (2)$$

$F(\varphi, \nu)$ 和 $E(\varphi, \nu)$ 分别为第一类和第二类椭圆积分。能量密度(1)包括两部分的贡献:等式右端的前三项为平均场相互作用能,最后一项为量子涨落引起的Lee-Huang-Yang(LHY)能量修正。由于我们限于讨论 Δ_g 很小的情形,这里忽略了LHY能量随 Δ_g 的变化,将其近似取为在 $\Delta_g = 0$ 时的值。这种简化处理在文献中被称为Petrov方案^[29]。该理论近似并不影响本文的主要结果。

根据热力学公式,由(1)式可以进一步导出包含量子涨落修正的物态方程,即压强 $P =$

$\sum_{i=1,2} \mu_i n_i - \mathcal{E}$ 与组分密度 (n_1, n_2) 满足的函数关系, 其中 $\mu_i = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_i}$ 是 i 种组分原子的化学势。当其中一种原子的密度减少至零时, 相应的物态方程即回到单分量 BEC 的情形。

1.2 部分混溶态的热力学平衡条件

现在考虑在小 Δ_g 条件下的混溶相变。当原子密度足够低时, 量子涨落的影响可以忽略不计, 以任意浓度混合的 BEC 都会发生旋节失稳 (即 $\frac{\partial(\mu_1, \mu_2)}{\partial(n_1, n_2)}_T < 0$)^[17], 因此体系只能处于两组分不混溶的相分离态。随着原子密度逐渐增大, 量子涨落的作用越来越显著, 在它和平均场相互作用的联动下, 最终会导致不混溶态到部分混溶态的转变。部分混溶态是指单分量 BEC 与混合 BEC 达成共存平衡的相分离状态, 其中每个共存相仍是密度均匀的, 可以用(1)式描述其能量。根据组分构型的不同, 部分混溶态可以分为两类, 分别记为 PM1 态和 PM2 态, 二者的结构如图 1 插图所示。按图 1 插图中的符号, 将由 i 组分原子组成的单分量 BEC 的密度记为 n_i^S , 将与之共存的混合 BEC 相的密度记为 (n_1^M, n_2^M) 。

对于 PM1 态, 相分离的热力学平衡条件为

$$P(n_1^S, 0) = P(n_1^M, n_2^M), \quad (3)$$

$$\mu_1(n_1^S, 0) = \mu_1(n_1^M, n_2^M), \quad (4)$$

$$\mu_2(n_1^S, 0) > \mu_2(n_1^M, n_2^M), \quad (5)$$

其中式(3)是两相共存的力学平衡条件, 式(4)和式(5)是两组分化学势满足的相平衡条件。值得注意的是, 对于共存相都包含的共同组分(即组分 1), 化学势的相平衡条件为等式, 而对于混合 BEC 相的独有组分(即组分 2), 化学势条件为不等式。

部分混溶态的平衡条件(3)–(5)包含了丰富的相变信息。在共存平衡中, 两相的体积占比可以连续变化。若单分量 BEC 相的占比趋于零, 则 PM1 态转变为均匀混溶态, 因此 (n_1^M, n_2^M) 满足的方程即对应于部分混溶态到均匀混溶态之间的相边界, 该边界方程可以通过联立(3)、(4)式消去变量 n_1^S 得到。另一方面, 如果混合 BEC 相 n_1^M 的取值能连续变化至零, 则 PM1 态转变为不混溶态。将此极限下的 n_1^S 和

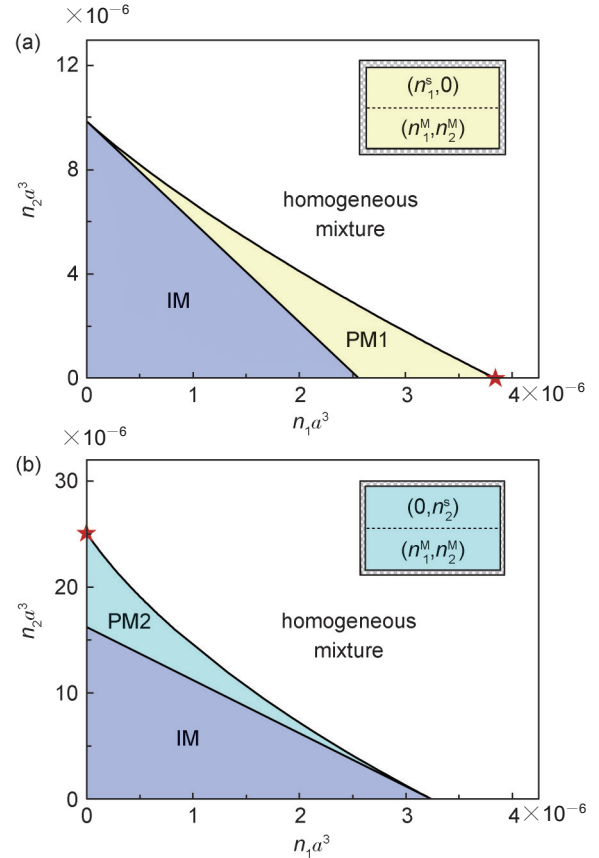


图 1 双组分 BEC 的基态相图, 相互作用参数:

(a) $\alpha = 0.26$, (b) $\alpha = 0.2$

图中 IM 表示不混溶相, PM1 和 PM2 分别表示两类部分混溶态, 插图是其相分离结构的示意。符号 \star 标记混溶相变的临界点。质量比 $\beta = 19$, 混溶参数 $\Delta_g = 0.01$ 。密度单位取为

$$a^{-3}, \text{ 其中 } a \equiv \sqrt{a_{11}a_{22}}.$$

Fig. 1 Ground-state phase diagram of dual-species BEC with the interaction parameter (a) $\alpha = 0.26$ and (b) $\alpha = 0.2$

The notations IM refers to the immiscible phase, PM1 and PM2 refer to the two kinds of partially-immiscible state, respectively, whose structures are illustrated in the insets.

Symbol \star denotes the critical points of miscibility phase transition. The mass ratio $\beta = 19$, and the miscibility parameters $\Delta_g = 0.01$. The densities are measured in the unit of a^{-3} , with $a \equiv \sqrt{a_{11}a_{22}}$.

n_2^M 分别记为 n_1^{IM} 和 n_2^{IM} , 它们表示两组分凝聚体在不混溶状态所能达到的上界密度。由此, 可以得到 PM1 态与不混溶态之间的相边界方程

$$\frac{n_1}{n_1^{IM}} + \frac{n_2}{n_2^{IM}} = 1, \quad (6)$$

在 n_1 - n_2 平面中, 该边界是以 n_1^{IM} 和 n_2^{IM} 为截距的一条直线。

类似地, 对于 PM2 态, 也可以写出相分离

的热力学平衡条件

$$P(0, n_2^S) = P(n_1^M, n_2^M), \quad (7)$$

$$\mu_2(0, n_2^S) = \mu_2(n_1^M, n_2^M), \quad (8)$$

$$\mu_1(0, n_2^S) > \mu_1(n_1^M, n_2^M). \quad (9)$$

由(7)、(8)式可以联立解得 (n_1^M, n_2^M) 满足的方程,此方程即对应于PM2态与均匀混溶态之间的边界。当 n_2^M 连续变化至零时,PM2态转变为不混溶态。将此极限下的 n_1^M 和 n_2^M 记为 n_1^{IM} 和 n_2^{IM} ,由此得到PM2态与不混溶态之间的相边界同样满足方程(6)。

在具体求解平衡条件之前,我们有必要做几点说明:①如果忽略了物态方程中LHY能量的贡献,则容易验证PM1态和PM2态的平衡条件总是无解的,这表明在平均场层次上不会出现部分混溶态。②想要达成两相的共存平衡,就必须让平衡条件等式两端的平均场贡献大多相互抵消掉,而未抵消的剩余项和量子涨落项的贡献处于相同量级,这就解释了为何后者会对部分混溶态的形成产生重要影响。③尽管在求解相边界时不需要用到相平衡的不等式条件,但这些不等式是部分混溶态出现的必要条件。也就是说,由(3)、(4)式解得PM1态的相边界必须满足不等式条件(5)的要求,由(7)、(8)式解得PM2态的相边界必须满足不等式条件(9)的要求。如果两类部分混溶态的解都能满足相应的不等式条件,则意味着可能出现三相共存,这一点我们将在后面讨论。

1.3 不出现三相点的基态相图

由于LHY能量表达式的复杂性,很难从热力学平衡条件直接求得部分混溶相边界的完整解析形式。但在 Δ_g 很小的条件下,原子密度只需达到很小的值即可发挥量子涨落的重要作用,从而触发混溶相变。不难验证,形成部分混溶态时,无量纲组分密度 $n_i a_{ii}^3$ 的领头项贡献为 Δ_g^2 阶,其中 a_{ii} 为 i 组分原子之间的散射长度。如果我们略去密度变量的更高阶变化,则可以解析地推导出 Δ_g 很小时部分混溶相边界满足的近似方程。

按照上述方案,对于PM1态,我们由(3)、(4)式解得

$$n_1^S = n_1^M + \alpha n_2^M, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{15\sqrt{\pi}}{32a_{11}^{3/2}} \alpha^2 \Delta_g (n_2^M)^2 + \\ & (n_1^M)^{3/2} (2n_1^M + 5\alpha n_2^M) I\left(\beta, \frac{\alpha^2 n_2^M}{n_1^M}\right) - \\ & 2\alpha^2 \sqrt{n_1^M} n_2^M (n_1^M + \alpha n_2^M) I\left(\beta, \frac{\alpha^2 n_2^M}{n_1^M}\right) - \\ & 2(n_1^M + \alpha n_2^M)^{5/2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中参数 $\alpha \equiv \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}$ 表征同组分原子间的非对称相互作用, $\beta \equiv \frac{m_2}{m_1}$ 为两种原子的质量比,无量纲函数 $I'(z, x) \equiv \frac{\partial}{\partial x} I(z, x)$ 。(10)式描述了在PM1态中两个共存相的密度关系,(11)式给出 (n_1^M, n_2^M) 满足的方程即对应于PM1态与均匀混溶态之间的相边界。当 $n_1^M \rightarrow 0$ 时,PM1态转变为不混溶态。由(11)式可得出发生此转变时两组分凝聚体的密度

$$n_2^{IM} = \alpha^{-1} n_1^{IM} = \frac{225\pi}{1024a_{22}^3} \frac{\Delta_g^2}{\left[3 - 2\alpha^{-1} I'\left(\frac{1}{\beta}, 0\right) + 2\alpha^{-5/2} \beta^{-3/2}\right]^2}, \quad (12)$$

再将其代入(6)式,即可确定PM1态与不混溶态之间的相边界。当 $n_2^M \rightarrow 0$ 时,两个共存相的密度差趋于零,混溶相变终止于临界点 $(n_1^C, 0)$,由(11)式可以得到临界密度

$$n_1^C = \frac{225\pi}{64a_{11}^3} \frac{\Delta_g^2}{\left[15 - 12\alpha I'(\beta, 0) + 4\alpha^2 I''(\beta, 0)\right]^2}, \quad (13)$$

其中 $I''(z, x) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(z, x)$ 。这里出现的临界点与传统气液相变非常类似,可以将两个共存相的组分密度差视为相变的序参量。序参量的跳变(即组分密度的不连续变化)是一级相变的特征;而通过临界点时,序参量连续变化至零,是二级相变的特征。在临界点附近,体系表现出极强的密度关联,组分密度响应的静态极化率在临界点处发散^[28]。

类似地,对于PM2态,我们由(7)、(8)式解得

$$n_2^S = \alpha^{-1} n_1^M + n_2^M, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{15\sqrt{\pi}}{32a_{22}^{3/2}} \alpha^{-2} \Delta_g (n_1^M)^2 + (n_2^M)^{3/2} (5\alpha^{-1} n_1^M + 2n_2^M) I \times \\ & \left(\frac{1}{\beta}, \frac{n_1^M}{\alpha^2 n_2^M}\right) - 2\alpha^{-2} \sqrt{n_2^M} n_1^M (\alpha^{-1} n_1^M + n_2^M) I' \times \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\beta}, \frac{n_1^M}{\alpha^2 n_2^M}\right) - 2(\alpha^{-1} n_1^M + n_2^M)^{5/2} = 0. \quad (15)$$

(14)式描述了在PM2态中两个共存相的密度关系,(15)式给出 (n_1^M, n_2^M) 满足的方程即对应于PM2态与均匀混溶态之间的相边界。当 $n_2^M \rightarrow 0$ 时,PM2态转变为不混溶态,发生此转变时两组分凝聚体的密度为

$$n_1^{IM} = \alpha n_2^{IM} = \frac{225\pi}{1024a_{11}^3} \frac{\Delta_g^2}{\left[3 - 2\alpha I'(\beta, 0) + 2\alpha^{5/2} \beta^{3/2}\right]^2} \quad (16)$$

当 $n_1^M \rightarrow 0$ 时,PM2态的混溶相变终止于临界点 $(0, n_2^C)$,

$$n_2^C = \frac{225\pi}{64a_{22}^3} \frac{\Delta_g^2}{\left[15 - 12\alpha^{-1} I'\left(\frac{1}{\beta}, 0\right) + 4\alpha^{-2} I''\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)\right]^2}, \quad (17)$$

不难看出,只需将原子组分指标调换PM1态的结果即可相应地转化为PM2态的结果,反之亦然。

通过数值检验,我们发现:对于给定的质量比 β ,当相互作用参数 α 足够大时,(10)、(11)式描述的相分离态满足不等式(5)的要求,而(14)、(15)式描述的相分离态不满足不等式(9),这表明体系会出现PM1态对应的混溶相变;当 α 足够小时,(14)、(15)式给出的相分离解满足不等式(9),而(10)、(11)式的相分离解不满足不等式(5),表明此时体系会出现PM2态对应的混溶相变。图1分别给出了这两种情形的相图示例。

当 α 取在中间一个小参数范围时,PM1态和PM2态的相平衡条件都有解,此时体系可能发生三相共存。下面我们对这种情况做单独讨论。

2 三相共存及其出现的参数范围

2.1 三相共存的平衡条件和基态相图

当两种不同组分的单分量BEC与混合BEC发生如图2插图所示的三相共存时,体系的热力学平衡条件为

$$P(n_1^{S*}, 0) = P(n_1^{M*}, n_2^{M*}) = P(0, n_2^{S*}), \quad (18)$$

$$\mu_1(n_1^{S*}, 0) = \mu_1(n_1^{M*}, n_2^{M*}) < \mu_1(0, n_2^{S*}), \quad (19)$$

$$\mu_2(n_1^{S*}, 0) > \mu_2(n_1^{M*}, n_2^{M*}) = \mu_2(0, n_2^{S*}), \quad (20)$$

其中带星号的变量表示三相共存时各相的密度。(18)–(20)式可以看作两种部分混溶平衡的结合,混合相密度 (n_1^{M*}, n_2^{M*}) 实际上就对应于PM1态与PM2态相边界的交点。联立(11)、(15)式,可以解得三相共存时混合BEC相的密度

$$n_1^{M*} = \frac{\alpha^2}{\nu} n_2^{M*} = \frac{225\pi}{1024a_{11}^3} \times \frac{\Delta_g^2}{\left[3I(\beta, \nu) - 2(\alpha + \nu)I'(\beta, \nu) + 2\beta^{3/2}(\alpha + \nu)^{5/2}\right]^2}, \quad (21)$$

其中 ν 是表征混合相密度组分比的特征量,其值由下式确定

$$(2\alpha + 3\nu)I(\beta, \nu) - 2\nu(\alpha + \nu)I'(\beta, \nu) + 2\left(\beta^{3/2}\nu^2 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)(\alpha + \nu)^{3/2} = 0. \quad (22)$$

三相共存时的两种单分量BEC的密度满足

$$n_1^{S*} = \alpha n_2^{S*} = n_1^{M*} + \alpha n_2^{M*}. \quad (23)$$

将得到的共存相密度再代入(18)–(20)式,即可确定三相点的平衡压强和化学势。与之前情况不同的是,这里的PM1态和PM2态并非连续地变为不混溶态,而是通过三相共存态的衔接转变到不混溶态。在 n_1 – n_2 平面中,三个共存相的密度连成一条直线,此即不混溶态的边界,它满足方程

$$n_1 + \alpha n_2 = n_1^{M*} + \alpha n_2^{M*}, \quad (24)$$

或等价地写成

$$\frac{n_1}{n_1^{S*}} + \frac{n_2}{n_2^{S*}} = 1. \quad (25)$$

图2给出了基态可以发生三相共存的相图示例。可以看到,两类部分混溶态分别在特定密度区间出现,并有各自的临界点,三相点在不混溶态、部分混溶态及均匀混溶态之间起到了联结作用。

2.2 三相共存的参数范围

三相点存在的前提条件是方程(22)能给出 ν 的正数解,这限定了参数 α 和 β 的取值范围。当 $\nu \rightarrow 0$ 时(即 $n_2^{M*} \rightarrow 0$),混合BEC的密度和1组分单分量BEC的密度都趋于临界点密度 n_1^C ,相图中的PM1态随之消失。在此极限下,方程(22)约化为

$$4\alpha I'(\beta, 0) - 4\alpha^2 I''(\beta, 0) + 8\alpha^{5/2} \beta^{3/2} - 3 = 0, \quad (26)$$

对于给定质量比 β ,我们把由上式确定 α 值的记为 α_{II} ,它给出了会发生三相共存的参数范围的下界。当 $\nu \rightarrow \infty$ 时(即 $n_1^* \rightarrow 0$),混合BEC的密度和2组分单分量BEC的密度都趋于临界点密度 n_2^c ,相图中的PM2态随之消失。在此极限下,方程(22)约化为

$$4\alpha^{-1} I'\left(\frac{1}{\beta}, 0\right) - 4\alpha^{-2} I''\left(\frac{1}{\beta}, 0\right) + 8\alpha^{-5/2} \beta^{-3/2} - 3 = 0, \quad (27)$$

对于给定的 β ,我们把由上式确定 α 值的记为 α_I ,它给出了会发生三相共存的参数范围的上界。

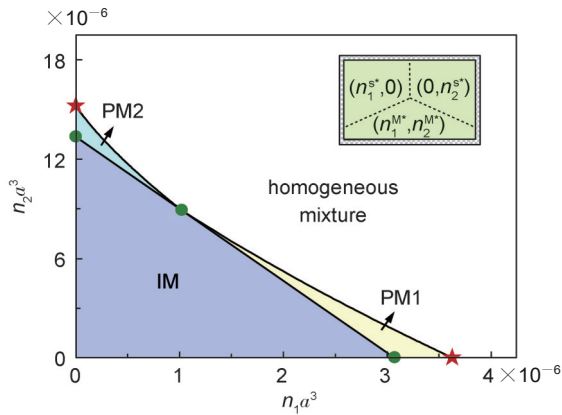


图2 两类部分混溶态都会出现的基态相图

相互作用参数 $\alpha = 0.23$ 。插图示意了三相点的相分离结构。符号 \star 标记混溶相变的临界点;符号 \bullet 标记了三个共存相的密度。质量比 β 与混溶参数 Δ_g 的取值及其他标记与图1相同。

Fig. 2 Ground state phase diagram accommodating both type of the partially-miscible states

With interaction parameter $\alpha = 0.23$. Inset illustrates the phase separation structure at the triple point. Symbol \star marks the critical point of miscible phase transition. Symbol \bullet marks the densities of the three coexisting phases. The mass ratio β , the miscible parameter Δ_g and other notations are same as in Fig. 1.

图3给出了阈值参数 α_I 和 α_{II} 随质量比 β 的变化曲线。这两条曲线将参数空间划分为三个区域,在不同区域内基态的混溶相变具有不同的形式:当相互作用参数 $\alpha > \alpha_I$ 时,体系会发生PM1态对应的混溶相变,其典型的相图结构如图1(a)示;当相互作用参数 $\alpha < \alpha_{II}$ 时,体系会发生PM2态对应的混溶相变,其相图结构如图1(b)示;当相互作用参数处于 $\alpha_{II} < \alpha < \alpha_I$ 区间

时,两类部分混溶相变都会发生,并且可以在特定密度下实现三相共存,基态相图结构如图2所示。值得注意的是,对于等质量情形($\beta = 1$), $\alpha_I = \alpha_{II} = 1$,因而没有三相共存。也就是说,混溶相变的三相点只在不等质量的二元体系中才可能出现。

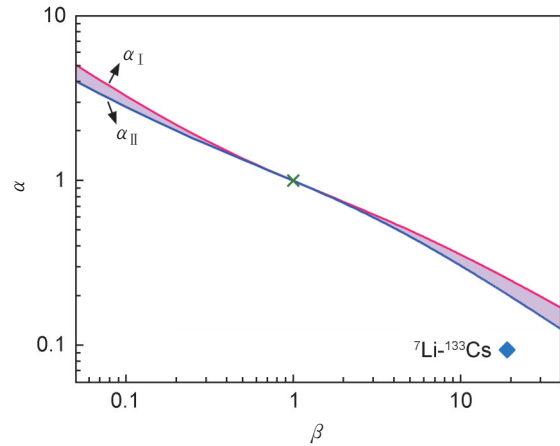


图3 出现三相点的参数范围(阴影区域)

符号 \times 表示 $\beta = 1$ 时没有三相共存。符号 \blacklozenge 标记了 ${}^7\text{Li}-{}^{133}\text{Cs}$ 原子体系在混溶-不混溶转变附近的参数值^[30-31],其中 $\alpha = 0.092, \beta = 19$ 。

Fig. 3 The parameters window with the triple point being present (shadow area)

Symbol \times means the three-phases-coexistence does not occur at $\beta = 1$. Symbol \blacklozenge indicates the values of α and β of ${}^7\text{Li}-{}^{133}\text{Cs}$ mixture near the miscible-immiscible transition^[30-31], with $\alpha = 0.092$ and $\beta = 19$.

3 讨论

本文重点研究了原子质量不等会对双组分BEC的混溶相变带来哪些新的影响。从数学表达式上看,质量因素包含在无量纲函数 $I(z, x)$ 中。若取等质量情形,该函数简化为 $I(1, x) = (1 + x)^{5/2}$,本文的结果即还原为之前文献中给出的形式^[29]。对于一般质量的情形,由于 $I(z, x)$ 包含了椭圆积分,基态相图的计算会更为复杂。但另一方面,在计算不混溶态的相边界、相变临界点以及三相点出现的阈值参数时,其实我们并不需要知道函数 $I(z, x)$ 的全部信息,而只用到 $I'(z, 0)$ 和 $I''(z, 0)$ 的函数值,即

$$I'(z, 0) = \frac{15z}{4(z^2 - 1)} \left(\frac{z^2}{\sqrt{z^2 - 1}} \arccos \frac{1}{z} - 1 \right), \quad (28)$$

$$I''(z, 0) = \frac{45z^2}{16(z^2 - 1)} \left(\frac{z^2 - 2}{\sqrt{z^2 - 1}} \arccos \frac{1}{z} + 1 \right), \quad (29)$$

因此方程(12)、(13)、(16)、(17)、(26)、(27)实际上都可以用相对更易计算的初等函数表达。

实验上可以通过吸收成像观测原子云的密度分布变化,进而指认混溶相变的发生。运用本文的结果,可以针对特定的冷原子体系计算相分离结构中各相区的组分密度,为实验探测提供明确的参考依据。相较于单一类型的部分混溶态而言,三相共存态在实验上更不易观测,因为后者对于相互作用参数的限定更加严苛,而且两组分原子质量越接近,出现三相点的参数范围就越窄。在碱金属元素中,质量差别最悬殊的玻色子组合是 ${}^7\text{Li}$ - ${}^{133}\text{Cs}$ 。理论上,在该质量比下($\beta = 19$),三相点可以出现在更宽的参数范围。最近,已有实验组成功获得了这种双组分BEC^[31]。根据文献报道的 α 值数据,我们预期此体系中可以观测到PM2型的部分混溶态,但并不满足实现三相共存的参数条件(见图3中的符号标记)。

4 结论

综上所述,本文基于包含量子涨落修正的物态方程研究了不等质量双组分BEC的混溶性,揭示了质量失配给基态相图带来的丰富性。通过求解热力学平衡条件,我们导出了在 Δ_g 很小的条件下不混溶态、部分混溶态以及均匀混溶态之间的相边界方程。对于给定的原子质量比,我们得到了判别混溶相变类型的阈值参数 α_1 和 α_{11} ,并由此归纳出三种可能的情形:当相互作用参数 $\alpha > \alpha_1$ 时,会发生不混溶态到PM1态的转变;当 $\alpha < \alpha_{11}$ 时,会发生不混溶态到PM2态的转变;当相互作用参数处于 $\alpha_{11} < \alpha < \alpha_1$ 区间时,两类部分混溶态都会出现,它们与均匀混溶态之间的相边界相交于三相点。我们计算了发生三相共存时的原子密度,并指出三相共存只能在质量不等的双组分体系中发生。这些结果进一步揭示了量子涨落对于双组分BEC混溶性的影响,同时也为冷原子的实验探索提供了有价值的理论参考。本文对于量子临界点附近的声子模软化、关联长度发散等现

象未作深入探讨。更细致地刻画这些临界行为将是我们下一步工作的研究目标。

参考文献:

- [1] GRAF E H, LEE D M, REPPY J D. Phase Separation and the Superfluid Transition in Liquid ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ Mixtures[J]. *Phys Rev Lett*, 1967, **19**(8): 417-419. DOI: 10.1103/physrevlett.19.417.
- [2] PRICAUPENKO L, TREINER J. Phase Separation of Liquid ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ Mixtures: Effect of Confinement[J]. *Phys Rev Lett*, 1995, **74**(3): 430-433. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.430.
- [3] MACIOLEK A, KRECH M, DIETRICH S. Phase Diagram of a Model for ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ Mixtures in Three Dimensions[J]. *Phys Rev E*, 2004, **69**(3): 036117. DOI: 10.1103/physreve.69.036117.
- [4] MCCARRON D J, CHO H W, JENKIN D L, *et al.* Dual-Species Bose-Einstein Condensate of ${}^{87}\text{Rb}$ and ${}^{133}\text{Cs}$ [J]. *Phys Rev A*, 2011, **84**(1): 011603. DOI: 10.1103/physreva.84.011603.
- [5] SCHULZE T A, HARTMANN T, VOGES K K, *et al.* Feshbach Spectroscopy and Dual-species Bose-Einstein Condensation of ${}^{23}\text{Na}$ - ${}^{39}\text{K}$ Mixtures[J]. *Phys Rev A*, 2018, **97**: 023623. DOI: 10.1103/physreva.97.023623.
- [6] TANZI L, CABRERA C R, SANZ J, *et al.* Feshbach Resonances in Potassium Bose-bose Mixtures[J]. *Phys Rev A*, 2018, **98**(6): 062712. DOI: 10.1103/physreva.98.062712.
- [7] SCHÄFER F, MIZUKAMI N, YU P, *et al.* Experimental Realization of Ultracold Yb-Li7 Mixtures in Mixed Dimensions[J]. *Phys Rev A*, 2018, **98**(5): 051602. DOI: 10.1103/physreva.98.051602.
- [8] BURCHIANTI A, D'ERRICO C, ROSI S, *et al.* Dual-species Bose-Einstein Condensate of ${}^{41}\text{K}$ and ${}^{87}\text{Rb}$ in a Hybrid Trap[J]. *Phys Rev A*, 2018, **98**(6): 063616. DOI: 10.1103/physreva.98.063616.
- [9] WANG F D, XIONG D Z, LI X K, *et al.* Observation of Feshbach Resonances between Ultracold Na and Rb Atoms [J]. *Phys Rev A*, 2013, **87**(5): 050702. DOI: 10.1103/physreva.87.050702.
- [10] WANG F D, LI X K, XIONG D Z, *et al.* A Double Species ${}^{23}\text{Na}$ and ${}^{87}\text{Rb}$ Bose-Einstein Condensate with Tunable Miscibility via an Interspecies Feshbach Resonance [J]. *J Phys B: At Mol Opt Phys*, 2016, **49**: 015302. DOI: 10.1088/0953-4075/49/1/015302.
- [11] WACKER L, JØRGENSEN N B, BIRKMOSE D, *et al.* Tunable Dual-species Bose-Einstein Condensates of ${}^{39}\text{K}$ and ${}^{87}\text{Rb}$ [J]. *Phys Rev A*, 2015, **92**: 053602. DOI: 10.1103/physreva.92.053602.

- [12] MI C D, NAWAZ K S, WANG P J, *et al.* Production of Dual Species Bose-Einstein Condensates of ^{39}K and ^{87}Rb [J]. *Chin Phys B*, 2021, **30**(6): 063401. DOI: 10.1088/1674-1056/abee6d.
- [13] BURCHIANTI A, D'ERRICO C, PREVEDELLI M, *et al.* A Dual-species Bose-einstein Condensate with Attractive Interspecies Interactions[J]. *Condens Matter*, 2020, **5**(1): 21. DOI: 10.3390/condmat5010021.
- [14] THALHAMMER G, BARONTINI G, DE SARLO L, *et al.* Double Species Bose-Einstein Condensate with Tunable Interspecies Interactions[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **100**(21): 210402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.210402.
- [15] PAPP S B, WIEMAN C E. Observation of Heteronuclear Feshbach Molecules from a ^{85}Rb - ^{87}Rb Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, **97**(18): 180404. DOI: 10.1103/physrevlett.97.180404.
- [16] PAPP S B, PINO J M, WIEMAN C E. Tunable Miscibility in a Dual-species Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **101**(4): 040402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.040402.
- [17] PETHICK C, SMITH H. Bose-Einstein condensation in dilute gases[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [18] PITAEVSKIĬ L P, STRINGARI S. Bose-Einstein Condensation and Superfluidity[M]. New York: Oxford University Press, 2016.
- [19] PATTINSON R W, BILLAM T P, GARDINER S A, *et al.* Equilibrium Solutions for Immiscible Two-species Bose-Einstein Condensates in Perturbed Harmonic Traps[J]. *Phys Rev A*, 2013, **87**: 013625. DOI: 10.1103/physreva.87.013625.
- [20] LEE K L, JØRGENSEN N B, LIU I K, *et al.* Phase Separation and Dynamics of Two-component Bose-Einstein Condensates[J]. *Phys Rev A*, 2016, **94**(1): 013602. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.013602.
- [21] CIKOJEVIĆ V, VRANJEŠ MARKIĆ L, BORONAT J. Harmonically Trapped Bose-Bose Mixtures: A Quantum Monte Carlo Study[J]. *New J Phys*, 2018, **20**(8): 085002. DOI: 10.1088/1367-2630/aad6cc.
- [22] WEN L, GUO H, WANG Y J, *et al.* Effects of Atom Numbers on the Miscibility-immiscibility Transition of a Binary Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev A*, 2020, **101**(3): 033610. DOI: 10.1103/physreva.101.033610.
- [23] GUTIERREZ E M, DE OLIVEIRA G A, FARIAS K M, *et al.* Miscibility Regimes in a ^{23}Na - ^{39}K Quantum Mixture[J]. *Appl Sci*, 2021, **11**(19): 9099. DOI: 10.3390/app11199099.
- [24] VAN SCHAEYBROECK B. Weakly Interacting Bose Mixtures at Finite Temperature[J]. *Phys A Stat Mech Appl*, 2013, **392**(17): 3806–3811. DOI: 10.1016/j.physa.2013.04.026.
- [25] OTA M, GIORGINI S, STRINGARI S. Magnetic Phase Transition in a Mixture of Two Interacting Superfluid Bose Gases at Finite Temperature[J]. *Phys Rev Lett*, 2019, **123**(7): 075301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.075301.
- [26] SPADA G, PARISI L, PASCUAL G, *et al.* Phase Separation in Binary Bose Mixtures at Finite Temperature [J]. *SciPost Phys*, 2023, **15**(4): 171. DOI: 10.21468/sci-postphys.15.4.171.
- [27] NAIDON P, PETROV D S. Mixed Bubbles in Bose-bose Mixtures[J]. *Phys Rev Lett*, 2021, **126**(11): 115301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.115301.
- [28] 贺丽, 张天琪, 李可芯, 等. 双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的混溶性[J]. *物理学报*, 2023, **72**(11): 110302. DOI: 10.7498/aps.72.20230001.
- HE L, ZHANG T Q, LI K X, *et al.* Miscibility of Dual-Species Bose-Einstein Condensates[J]. *Acta Physica Sinica*, 2023, **72**(11): 110302. DOI: 10.7498/aps.72.20230001.
- [29] PETROV D S. Quantum Mechanical Stabilization of a Collapsing Bose-bose Mixture[J]. *Phys Rev Lett*, 2015, **115**(15): 155302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.155302.
- [30] LI W X, CHEN Y D, SUN Y T, *et al.* Feshbach Resonances in an Ultracold ^7Li - ^{133}Cs Bose-bose Mixture[J]. *Phys Rev A*, 2022, **106**(2): 023317. DOI: 10.1103/physreva.106.023317.
- [31] CHEN Y D, LI W X, SUN Y T, *et al.* Dual-species Bose-einstein Condensates of ^7Li and ^{133}Cs [J]. *Phys Rev A*, 2023, **108**(3): 033301. DOI: 10.1103/physreva.108.033301.