

单圈图的 Steiner k -Wiener 指标的下界

王鹏飞^{1*}, 殷凤¹, 王朝平², 何瑞强¹

(1. 忻州师范学院 数学系, 山西 忻州 034000;

2. 兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730030)

摘要: 为了发展并完善图论中拓扑指标的基本理论, 本文利用图形变换的方法确定了单圈图 Steiner k -Wiener 指标的下界, 并刻画了达到下界时的极图。首先, 通过研究单圈图的结构对 Steiner k -Wiener 指标的影响, 确定了一系列使该指标减小的图形变换。进而找到了不同条件下最小 Steiner k -Wiener 指标所对应的极值图。最后, 得到了上述极值图所对应的 Steiner k -Wiener 指标数值。基于此, 本文推广并完善了单圈图 Steiner k -Wiener 指标下界问题的研究成果, 丰富了拓扑指标问题的研究内容, 为图论中拓扑指标问题在数学以及化学领域的广泛应用提供了理论依据。

关键词: 单圈图; Steiner k -Wiener 指标; Steiner 距离

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-2395(2024)06-1155-09

The Lower Bound of the Steiner k -Wiener Index of Unicyclic Graphs

WANG Pengfei^{1*}, YIN Feng¹, WANG Chaoping², HE Ruiqiang¹

(1. Department of Mathematics, Xinzhou Normal University, Xinzhou 034000, China;

2. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730030, China)

Abstract: In order to develop and perfect the basic theory of topological index in graph theory, a lower bound of the Steiner k -Wiener index of unicyclic graphs is determined by the method of graph transformation, and the extremal graphs are described when the lower bound is reached. Firstly, by studying the influence of the structure of unicyclic graphs on the Steiner k -Wiener index, a series of graph transformations are determined to reduce the index. Then, the extremal graphs corresponding to the minimum Steiner k -Wiener index under different conditions are obtained. Finally, the Steiner k -Wiener index values corresponding to the above the extremal graphs are presented. Based on this, this paper extends and improves the research results of the Steiner k -Wiener index lower bound problem of unicyclic graphs, enriches the research content of topological index problem, and provides a theoretical basis for the wide application of topological index problem of graph theory in mathematics and chemistry.

Key words: unicyclic graph; Steiner k -Wiener index; Steiner distance

0 引言

在图论中, 图被定义为一组顶点以及连接这些顶点的边的集合^[1]。化学图论是用图论和网络分析方法来研究和描述化学分子的结构和性质的学科领域, 利用化合物的分子结构来获取化学特性。化学图论的主要研究内容之一是拓扑指标, 是通过分子图到实数集的一个映射, 建立起分子结构与分子性质之间的桥梁。化学家 Wiener 于 1947 年提出的 Wiener 指标是非常重要的拓扑指标

收稿日期: 2024-03-08; 接受日期: 2024-07-24

基金项目: 山西省基础研究计划(202303021221175)

* 通信作者: 王鹏飞(1975-), 男, 山西偏关人, 硕士, 副教授, 研究方向为图论。E-mail: 573723120@qq.com

引文格式: 王鹏飞, 殷凤, 王朝平, 等. 单圈图的 Steiner k -Wiener 指标的下界[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(6): 1155-1163. DOI: 10.13451/j.sxu.ns.2024114

之一^[2],该指标在数学中的研究可以追溯到二十世纪七十年代^[3]。自此,Wiener 指标开始被广泛研究^[4-15]。

单圈图是无向图中所有顶点都不同且至少有一个边的简单环,其在图论和网络分析中具有重要的意义,被广泛用于描述和分析各种实际系统中的闭合结构和循环关系。因此,研究单圈图的 Wiener 指标是非常重要的。Tang 研究了具有 2 个顶点的单圈图的 Wiener 指标,给出了一个计算公式,并借此刻画了具有最大、最小 Wiener 指标的单圈图的特征^[13]。Lai 等将这一结果推广到了 Steiner $(n - 1)$ -Wiener 指标,确定了顶点数为 n 的单圈图 Steiner $(n - 1)$ -Wiener 指标的上界与下界,并分别刻画了达到上界与下界时的极图^[14]。Li 等将 Wiener 指标推广到了 Steiner k -Wiener 指标^[15],并给出了顶点为 n 的单圈图的 Steiner k -Wiener 指标的计算式。但目前关于顶点数为 n 的单圈图 Steiner k -Wiener 指标在 $3 \leq k \leq n - 2$ 的下界尚无结论,因此,本文将对顶点数 $n \geq 5$ 且 $3 \leq k \leq n - 2$ 条件下的这一问题展开讨论,并进一步研究达到下界时的极图刻画。

1 预备知识

简单连通图 G 的点集为 $V(G)$,边集为 $E(G)$, G 的顶点数用 $n(G)$ 表示,称为 G 的阶。对于 $u, v \in V(G)$, $d_G(u, v)$ 表示 u, v 两点之间的距离,即连接 u, v 最短路的长度。对于 $v \in V(G)$, $d_G(v)$ 和 $N_G(v)$ 分别表示点 v 的度和邻点集。 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 。对于 $S \subseteq V(G)$,点集 S 的 Steiner 距离表示 G 中包含点集 S 的最小连通子树的边数^[7],即 $d_G(S) = \min \{|E(T)|: T \text{ 是 } G \text{ 的子树 } S \subseteq V(T)\}$ 。

特别地,当 $S = \{u, v\}$ 时, $d_G(S) = d_G(u, v)$ 。

定义 1 Wiener 指标表示图 G 中任意两点的距离之和,即

$$W(G) = \sum_{\{u, v\} \subseteq V(G)} d_G(u, v)。$$

定义 2 对于正整数 $k, 2 \leq k \leq n - 1$,图 G 的 Steiner k -Wiener 指标 $SW_k(G)$ 表示图 G 中所有 k 子集 S 的 Steiner 距离之和,即

$$SW_k(G) = \sum_{S \subseteq V(G), |S|=k} d_G(S)。$$

当 $k = 2$ 时,Steiner 2-Wiener 指标就是 Wiener 指标。

定义 3 设 G 为一个 n 阶单圈图,其中圈 $C_g = v_1 v_2 \cdots v_g v_1, G - E(C_g)$ 的连通分支 T_1, T_2, \dots, T_m 都是树, T_i 与 C_g 的公共顶点记为 $u_i, i = 1, 2, \dots, m$ (T_i 是非平凡树),则单圈图表示为 $G = C_g^{u_1, u_2, \dots, u_m}(T_1, T_2, \dots, T_m)$ 。若 $n(T_i) = l_i + 1$,则 $n - g = l_1 + l_2 + \dots + l_m$ 。特别对于单圈图 $G_1 = C_g^{u_1, u_2, \dots, u_m}(S_{l_1+1}, S_{l_2+2}, \dots, S_{l_m+1})$,顶点 u_1, u_2, \dots, u_m 在 G_1 中分别是

$$S_{l_1+1}, S_{l_2+2}, \dots, S_{l_m+1}$$

的中心。

例如, $C_6^{u_1, u_2}(S_4, S_5)$,其中 $u_1 = v_2, u_2 = v_5$,如图 1 所示。

引理 1 设 G 是一个 n 阶连通图,顶点 $u \in V(G)$ 是一个拟星根点,其中 $N_G[u] = \{v, u_1, u_2, \dots, u_s\}$ 满足

$$d_G(v) > 1, d_G(u_i) = 1 (1 \leq i \leq s)。$$

通过删除 G 中的边 uu_i ,添加新的边 vu_i ,从而得到 G' ,如图 2 所示。则对于 $2 \leq k \leq n - 1$,有 $SW_k(G) > SW_k(G')$ 。

证明 将 G 的所有 k -子集 S 分为三类:

$$S \subseteq V(G) \setminus N_G[u]; S \subseteq N_G[u]; S \cap V(G) \setminus N_G[u] \neq \emptyset \text{ 且 } S \cap N_G[u] \neq \emptyset。$$

对于 $S \subseteq V(G) \setminus N_G[u]$,显然有 $d_G(S) = d_{G'}(S)$ 。对于 $S \subseteq N_G[u]$,由于

$$G[N_G[u]] \cong G'[N_G[u]],$$

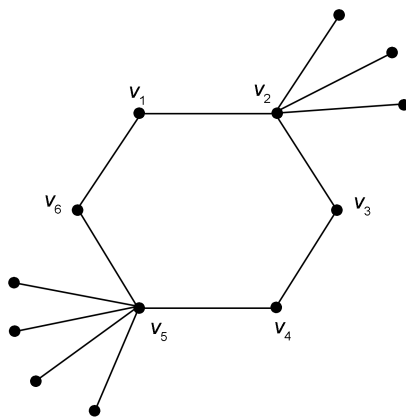


图1 单圈图 $C_6^{u_1, u_2}(S_4, S_5)$, 其中 $u_1 = v_2, u_2 = v_5$

Fig. 1 The unicyclic graph $C_6^{u_1, u_2}(S_4, S_5)$, where $u_1 = v_2, u_2 = v_5$

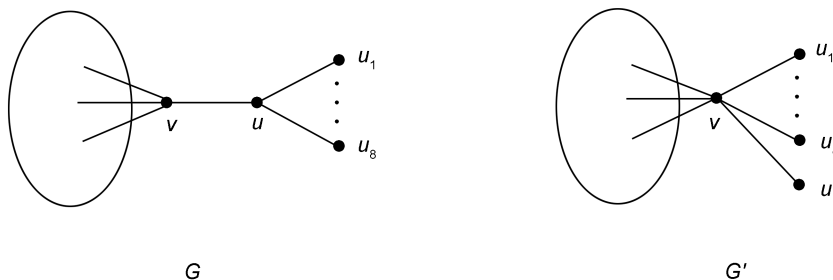


图2 图 G 关于顶点 u 的图形变换

Fig. 2 Transformations of graph G with respect to the vertex u

因此

$$\sum_{S \subseteq N_G[u]} d_G(s) = \sum_{S \subseteq N_{G'}[u]} d_{G'}(S).$$

下面考虑 $S \cap V(G) \setminus N_G[u] \neq \emptyset$ 且 $S \cap N_G[u] \neq \emptyset, \{u, v\} \subseteq S \cap N_G[u]$, 显然, $d_G(S) = d_{G'}(S)$. $u \in S \cap N_G[u]$ 且 $v \notin S \cap N_G[u]$, 显然, $d_G(S) = d_{G'}(S), v \in S \cap N_G[u]$ 且 $u \notin S \cap N_G[u]$, 若 $S \cap N_G[u] \setminus \{u, v\} \neq \emptyset$, 则 $d_G(S) = d_{G'}(S)$, 否则 $d_G(S) - d_{G'}(S) = 1, u \notin S \cap N_G[u]$ 且 $v \notin S \cap N_G[u]$, 显然, $d_G(S) > d_{G'}(S)$. 综合以上所有类型, 得到 $SW_k(G) - SW_k(G') > 0$.

引理2 设 H, X, Y 是三个两两不相交的连通图. 假设 u, v 是 H 的两个顶点, v' 是 X 的一个顶点, u' 是 Y 的一个顶点. 设 G 是由 H, X, Y 通过将 v 和 v', u 和 u' 分别重合后得到的图, G'_1 是由 H, X, Y 通过将 v, v', u' 重合后得到的图, G'_2 是由 H, X, Y 通过将 u, v', u' 重合后得到的图(如图3所示). 则对于 $2 \leq k \leq n - 1$, 有

$$SW_k(G) > SW_k(G'_1), \text{ 或 } SW_k(G) > SW_k(G'_2).$$

证明 对于 $S \subseteq V(H)$ 或 $S \subseteq V(X) \setminus \{v'\}$ 或 $S \subseteq V(Y) \setminus \{u'\}$, 显然有 $d_G(S) > d_{G'_1}(S)$ 且 $d_G(S) >$

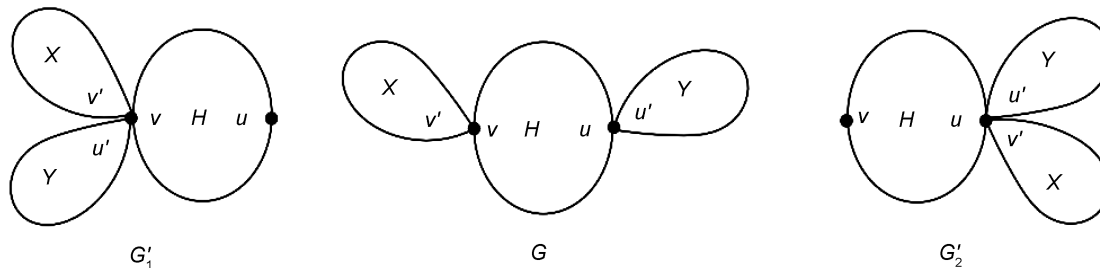


图3 以顶点 u', v' 为基准的图 G 的变换

Fig. 3 Transformations of graph G with respect to the vertices u', v'

$d_{G'_2}(S)$, 因此

$$\begin{aligned}
 SW_k(G) > SW_k(G'_1) &= \sum_{\substack{S \cap V(H) = \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} \neq \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} \neq \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_1}(S)) + \sum_{\substack{S \cap V(H) \neq \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} \neq \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} = \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_1}(S)) + \\
 &\sum_{\substack{S \cap V(H) \neq \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} = \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} \neq \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_1}(S)) + \sum_{\substack{S \cap V(H) \neq \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} \neq \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} \neq \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_1}(S)) > \sum_{\substack{S \cap V(H) \neq \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} = \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} \neq \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_1}(S)) = \\
 &\sum_{S' = S \cap V(H)} (d_H(S' \cup \{u\}) - d_H(S' \cup \{v\})), \\
 SW_k(G) > SW_k(G'_2) &= \sum_{\substack{S \cap V(H) = \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} \neq \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} \neq \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_2}(S)) + \sum_{\substack{S \cap V(H) \neq \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} \neq \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} = \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_2}(S)) + \\
 &\sum_{\substack{S \cap V(H) \neq \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} = \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} \neq \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_2}(S)) + \sum_{\substack{S \cap V(H) \neq \emptyset \\ S \cap V(X) \setminus \{v\} \neq \emptyset \\ S \cap V(Y) \setminus \{u\} = \emptyset}} (d_G(S) - d_{G'_2}(S)) = \\
 &\sum_{S' = S \cap V(H)} (d_H(S' \cup \{v\}) - d_H(S' \cup \{u\})),
 \end{aligned}$$

$SW_k(G) - SW_k(G'_1) \leq 0$, 则 $\sum_{S' = S \cap V(H)} [d_H(S' \cup \{u\}) - d_H(S' \cup \{v\})] < 0$, 此时, $SW_k(G) - SW_k(G'_2) > 0$ 。

推论 1 设 G 是一个连通图, $u, v \in V(G)$ 。假设 $G_{s,t}$ 是 G 通过分别给 u, v 附加 s, t 个悬挂点得到的图。则对于 $2 \leq k \leq n - 1$, 有 $SW_k(G_{s,t}) > SW_k(G_{s-i,t+i}) (1 \leq i \leq s)$ 或 $SW_k(G_{s,t}) > SW_k(G_{s+i,t-i}) (1 \leq i \leq t)$ 。

定义 4 设 C_n 是 n 阶圈, $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 将 v_i 顺时针标记为 i , 如图 4(a) 所示, 对于每一个 k -子集 $S \subseteq V(C_n)$, 从 $V(C_n)$ 中顺时针选择元素, 即 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 。则存在一个对应的向量 (x_1, x_2, \dots, x_k) , 其中 $x_i = a_{i+1} - a_i \pmod n (1 \leq i \leq k - 1)$, $x_k = a_1 - a_k \pmod n$ 且 $\sum_{i=1}^k x_i = n$ [如图 4(b) 所示], 使得 $d(S) = n - \max\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 。

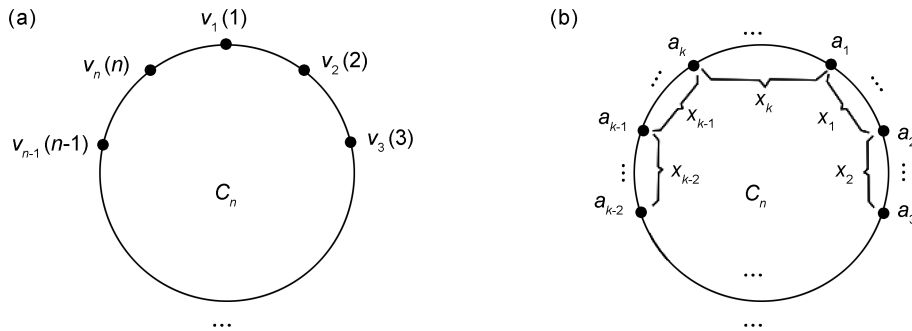


图 4 C_n 为 n 阶单圈图

(a) C_n 为 n 阶单圈图, 其中 $v(i)$ 顺时针标记为 i ; (b) C_n 为 n 阶单圈图, 其中 k -子集 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 。

Fig. 4 C_n is an unicyclic graph of order n

(a) C_n is an unicyclic graph of order n , where $v(i)$ is marked clockwise by i ; (b) C_n is an unicyclic graph of order n , where $s = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ is k -subset.

例如, 于 $C_{10}, S(3, 4, 7)$, 有 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 6)$ 且 $d(S) = 4$ 。

引理 3 对于 k -子集 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq V(C_n)$, 若 S 沿逆时针移动 $i (1 \leq i \leq n)$ 个单位得到 $S' = \{(a_1 - i) \pmod n, (a_2 - i) \pmod n, \dots, (a_k - i) \pmod n\}$, 则 S 与 S' 的对应向量相同且 $d(S) = d(S')$ 。

引理 4 设 $G_a = C_g^{v_1}(S_{n-g+1})$ 为 n 阶单圈图。 G_b 是由 G_a 将边 v_1, v_2 收缩到顶点 v_1 , 并在顶点 v_1 上

添加一条悬挂边 v_1v_2 得到的单圈图 (如图 5 所示)。则对于 $3 \leq k \leq n-2$, 有 $SW_k(G_a) \geq SW_k(G_b)$ 。

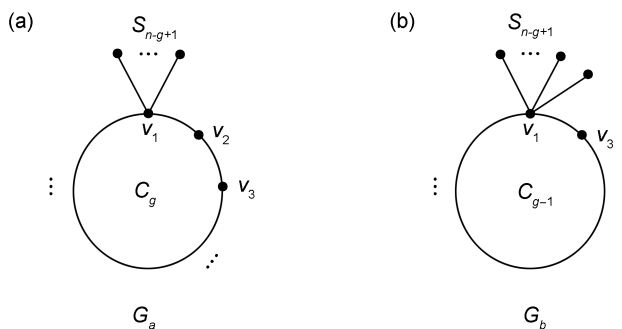


图 5 n 阶单圈图 G_a (a) 通过移动顶点 v_2 得到 n 阶单圈图 G_b (b)

Fig. 5 Figure G_a (a) of order n cycles gets Figure G_b (b) of order n cycles by moving vertex v_2

证明 令 $V(G_a) = V(G_b) = X \cup Y \cup \{v_2\}$, 其中 $X = V(S_{n-g+1}) \setminus \{v_1\}$, $Y = \{v_1, v_3, \dots, v_g\}$ 将所有 k -子集 $S \subseteq V(G_a)$ 分为以下几种情况:

情形 1 $v_2 \in S$ 。

子情形 1.1 $S \setminus \{v_2\} \subseteq X$, 显然 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$ 。

子情形 1.2 $S \setminus \{v_2\} \subseteq Y$, 设 $S = \{v_2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$, 则

$$d_{G_a}(S) = d_{C_g}(\{v_2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}), d_{G_b}(S) = d_{C_{g-1}}(\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}) + 1。$$

令 $\{v_2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ 在 G_a 中的对应向量为 (x_1, x_2, \dots, x_k) , 则 $\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ 在 G_b 中的对应向量为 $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1)$ 。

若在 G_a 中满足 $\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = x_i (i \neq k)$, 则在 G_b 中满足

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1) = x_i (i \neq k)。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - x_i, d_{G_b}(S) = (g - 1) - x_i - 1 = g - x_i$ 。因此 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$ 。

若在 G_a 中满足 $\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = x_k$ 且在 G_b 中满足

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1) = x_j (j \neq k),$$

则有 $x_k = x_j$ 或 $x_k = x_j + 1$ 。此时 $d_{G_a}(S) = g - x_k, d_{G_b}(S) = (g - 1) - x_j + 1 = g - x_j$ 。因此对于 $x_k = x_j$, 有 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$, 对于 $x_k = x_j + 1$, 有 $d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = -1$ 。

若在 G_a 中满足 $\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = x_k$ 且在 G_b 中满足

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1) = x_k - 1。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - x_k, d_{G_b}(S) = (g - 1) - (x_k - 1) + 1 = g - x_k + 1$ 。因此,

$$d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = -1。$$

子情形 1.3 $S \setminus \{v_2\} \cap X \neq \emptyset$, 且 $S \setminus \{v_2\} \cap Y \neq \emptyset$, 设 $|S \setminus \{v_2\} \cap X| = p, |S \setminus \{v_2\} \cap Y| = q, p + q + 1 = k$ 且 $S \setminus \{v_2\} \cap Y = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$, 则 $d_{G_a}(S) = d_{C_g}(\{v_1, v_2, a_1, a_2, \dots, a_q\}) + p, d_{G_b}(S) = d_{C_{g-1}}(\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_q\}) + p + 1$ 。令 $\{v_1, v_2, a_1, a_2, \dots, a_q\}$ 在 G_a 中的对应向量为 $(x_1 = 1, x_2, \dots, x_{q+1}, x_{q+2})$, 则 $\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_q\}$ 在 G_b 中的对应向量为 $(x_2, \dots, x_{q+1}, x_{q+2})$ 。注意到 $x_i \geq 1 (2 \leq i \leq q + 1), x_{q+2} \geq 0$ 。

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1 = 1, x_2, \dots, x_{q+1}, x_{q+2}\} = x_1 = 1$, 则在 G_b 中满足

$$\max\{x_2, \dots, x_{q+1}, x_{q+2}\} = x_i = 1 (i \neq 1)。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - 1 + p, d_{G_b}(S) = (g - 1) - 1 + p + 1 = g - 1 + p$ 。因此 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$ 。

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1 = 1, x_2, \dots, x_{q+1}, x_{q+2}\} = x_i (i \neq 1)$, 则在 G_b 中满足

$$\max\{x_2, \dots, x_{q+1}, x_{q+2}\} = x_i (i \neq 1)。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - x_i + p, d_{G_b}(S) = (g - 1) - x_i + p + 1 = g - x_i + p$ 。因此,

$$d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)。$$

情形2 $v_2 \notin S$ 。

子情形2.1 $S \subseteq X$, 显然 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$ 。

子情形2.2 $S \subseteq Y$, 设 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 则

$$d_{G_a}(S) = d_{C_k}(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}), d_{G_b}(S) = d_{C_{k-1}}(\{a_1, a_2, \dots, a_k\})。$$

令 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 在 G_a 中的对应向量为 $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$, 则 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 在 G_b 中的对应向量为 $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1)$ 。

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\} = x_i (i \neq k)$, 则在 G_b 中满足

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1) = x_i (i \neq k)。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - x_i, d_{G_b}(S) = (g - 1) - x_i = g - x_i - 1$ 。因此, $d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = 1$ 。

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\} = x_k$ 且在 G_b 中满足

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1) = x_j (j \neq k),$$

则有 $x_k = x_j$ 或 $x_k = x_j + 1$ 。此时 $d_{G_a}(S) = g - x_k, d_{G_b}(S) = (g - 1) - x_j$ 。因此对于 $x_k = x_j + 1$, 有 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$, 对于 $x_k = x_j$, 有 $d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = 1$ 。

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\} = x_k$ 且在 G_b 中满足

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1) = x_k - 1。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - x_k, d_{G_b}(S) = (g - 1) - (x_k - 1) = g - x_k$ 。因此 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$ 。

子情形2.3 $S \cap X \neq \emptyset, S \cap Y \neq \emptyset$ 。设 $|S \cap X| = p, |S \cap Y| = q, p + q = k$ 且 $S \cap Y = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$, 则

$$d_{G_a}(S) = d_{C_k}(\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_q\}) + p, d_{G_b}(S) = d_{C_{k-1}}(\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_q\}) + p。$$

令 $\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_q\}$ 在 G_a 中的对应向量为 $(x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1})$, 则 $\{v_1, a_1, a_2, \dots, a_q\}$ 在 G_b 中的对应向量为 $(x_1 - 1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1})$ 。

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}\} = x_1$ 且在 G_b 中满足

$$\max\{x_1 - 1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}\} = x_1 - 1。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - x_1 + p, d_{G_b}(S) = (g - 1) - (x_1 - 1) + p = g - x_1 + p$ 。因此

$$d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)。$$

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}\} = x_1$ 且在 G_b 中满足

$$\max\{x_1 - 1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}\} = x_j (j \neq 1),$$

则有 $x_1 = x_j$ 或 $x_1 = x_j + 1$ 。 $d_{G_a}(S) = g - x_1 + p, d_{G_b}(S) = (g - 1) - x_j + p$ 。因此对于 $x_1 = x_j + 1$, 有 $d_{G_a}(S) = d_{G_b}(S)$, 对于 $x_1 = x_j$, 有 $d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = 1$ 。

若在 G_a 中满足 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}\} = x_i (i \neq 1)$, 则在 G_b 中满足

$$\max\{x_1 - 1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}\} = x_i (i \neq 1)。$$

此时 $d_{G_a}(S) = g - x_i + p, d_{G_b}(S) = (g - 1) - x_i + p = g - x_i - 1 + p$ 。因此

$$d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = 1。$$

注意到只有子情形 1.2, 2.2 和 2.3 对最终结果有影响。因此下面事实成立。

事实1 设子情形 1.2 中满足 $d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = -1$ 的 k -子集 S 的集合为 δ^- , 子情形 2.2 和 2.3 中满足 $d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = 1$ 的 k -子集 S 的集合为 δ^+ , 则有 $|\delta^+| \geq |\delta^-|$ 。

证明 若 $g < n, k \geq g$, 容易得到 $|\delta^-| = 0$, 此时事实 1 显然成立。因此只需考虑 $g = n$ 和 $k < g < n$ 两种情况。令 $\delta^- = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k$, 其中

$$\delta_i = \{S | v_2, v_3, \dots, v_{i+1} \in S, v_{i+2} \notin S, S \setminus \{v_2, v_3, \dots, v_{i+1}\} \subseteq \{v_{i+3}, \dots, v_g, v_1\}\} (1 \leq i \leq k-1),$$

$$\delta_k = \{S | S = \{v_2, v_3, \dots, v_{k+1}\}, |\delta_i| = s_i (1 \leq i \leq k)。$$

对于 $1 \leq i \leq k-1, \forall S_{ij} \in \delta_i (1 \leq j \leq s_i)$, 令 $S_{ij} = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-i}, v_2, v_3, \dots, v_{i+1}\}$, 将 S_{ij} 沿顺时针方向移动 i 个单位得到

$$S'_{ij} = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_{k-i}, v_{g+2-i}, v_{g+3-i}, \dots, v_1\}.$$

此时 S_{ij} 和 S'_{ij} 的对应向量是相同的, 令该向量为 (x_1, x_2, \dots, x_k) 。由于 $S_{ij} \in \delta_i$, 结合子情形 1.2 可知该向量满足 $\max(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_{k-i}$ 且 $x_{k-i} \neq x_j (j \neq k-i)$ 。根据子情形 2.2, 有 S'_{ij} 满足 $d_{G_a}(S') > d_{G_b}(S')$ 且 $d_{G_a}(S'_{ij}) - d_{G_b}(S'_{ij}) = 1$, 因此 $S'_{ij} \in \delta^+$ 。

令 $\delta'_i = \{S'_{ij} | 1 \leq j \leq s_i\}$, 若 $S'_{iz}, S'_{iw} \in \delta'_i (z \neq w)$, 则 $S'_{iz} \neq S'_{iw}$; 否则, $S_{iz} = S_{iw}$, 这与 $S_{iz} \neq S_{iw}$ 相矛盾。

若 $S'_{pi} \in \delta'_p, S'_{qi} \in \delta'_q (p \neq q)$, 假设 $1 \leq p < q \leq k-1$, 则 $S'_{pi} \neq S'_{qi}$; 否则, $a'_{k-p} = v_{g+1-p} \in S'_{pi}$, 此时有 $x_{k-p} = 1$, 这与 $\max(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_{k-p}$ 且 $x_{k-p} \neq x_j (j \neq k-p)$ 相矛盾。因此 $\sum_{i=1}^{k-1} |\delta'_i| = \sum_{i=1}^{k-1} |\delta_i|$ 。

设子情形 2.2 中满足 $\max(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = x_k$ 且 $x_k = x_j (j \neq k)$ 的 k -子集 S 的集合为 δ'_{k1} , 子情形 2.3 中满足 $d_{G_a}(S) - d_{G_b}(S) = 1$ 的 k -子集 S 的集合为 $\delta'_{k2}, \delta'_k = \delta'_{k1} \cup \delta'_{k2}$, 则有 $|\delta'_k| \geq |\delta_k|$ 。这是由于:

若 $g = n, |\delta_k| = 1$ 。当 $g - k$ 是奇数时, 存在子集 $S \in \delta'_{k1}$, 其对应向量为

$$(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = \left(1, 1, \dots, 1, 2, \frac{g-k+1}{2}, \frac{g-k+1}{2}\right).$$

当 $g - k$ 是偶数时, 存在子集 $S \in \delta'_{k1}$, 其对应向量为

$$(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = \left(1, 1, \dots, 1, 1, \frac{g-k+2}{2}, \frac{g-k+2}{2}\right).$$

因此 $|\delta'_{k1}| \geq |\delta_k|$ 。

若 $k < g < n, |\delta_k| = 1$ 。存在子集 $S = \{v_{g+1}, v_3, v_5, v_6, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}\}$, 其对应向量为

$$(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = (2, 2, 1, \dots, 1, g-k-1).$$

容易验证, $S \in \delta'_{k2}$, 因此 $|\delta'_{k2}| \geq |\delta_k|$ 。令 $\delta' = \delta'_1 + \delta'_2 + \dots + \delta'_k$, 则有 $\delta' \subseteq \delta^+$ 且 $|\delta'| = |\delta^-|$, 因此 $|\delta^+| \geq |\delta^-|$ 。事实 1 成立。根据事实 1, 引理 4 成立。

2 主要结论

引理 5^[13] 设 G 是 n 阶单圈图, 则有 $W(G) \geq n^2 - 2n$; 等号成立当且仅当

- (1) $n = 4, G \cong C_4$ 或 $C_3^{v_1}(S_2)$;
- (2) $n = 5, G \cong C_5$ 或 $C_3^{v_1}(S_3)$; (3) $n \geq 6, G \cong C_3^{v_1}(S_{n-2})$ 。

引理 6^[14] 设 G 是 n 阶单圈图, 则有 $SW_{n-1}(G) \geq n^2 - 2n$; 等号成立当且仅当 $G \cong C_n$ 。

引理 7 对于 $3 \leq k \leq n-2$, 有 $SW_k[C_4^{v_1}(S_{n-3})] \geq SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})]$ (如图 6 所示), 当且仅当 $n = 5$ 且 $k = 3$ 时等号成立。

证明 令 $|S| = 3$, 则在 $C_4^{v_1}(S_{n-3})$ 或 $C_3^{v_1}(S_{n-2})$ 中 S 的取法有 8 种:

- (1) $v_1, v_2, v_3 \notin S$;
- (2) $v_1 \in S, v_2, v_3 \notin S$;
- (3) $v_1 \notin S, v_2 \in S, v_3 \notin S$;
- (4) $v_1 \notin S, v_2 \notin S, v_3 \in S$;
- (5) $v_1 \in S, v_2 \in S, v_3 \notin S$;
- (6) $v_1 \in S, v_2 \notin S, v_3 \in S$;
- (7) $v_1 \notin S, v_2 \in S, v_3 \in S$;
- (8) $v_1 \in S, v_2 \in S, v_3 \in S$ 。

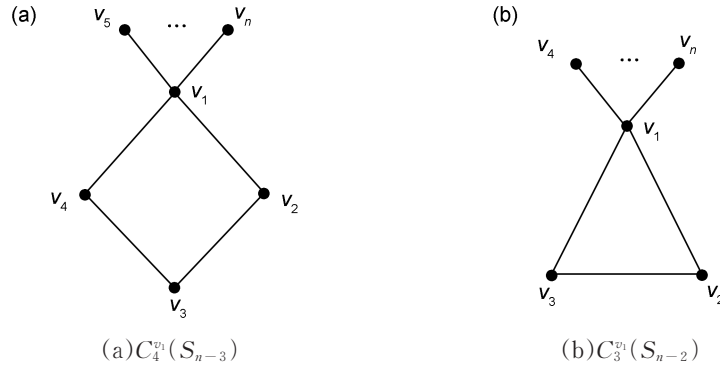


图6 达到Steiner k -Wiener指标下界时的两种极值图

Fig. 6 Two extremal graphs attained the lower bound of the Steiner k -Wiener

以上8种情况对 $SW_k[C_4^{v_1}(S_{n-3})]$ 的贡献分别是

$$3\binom{n-3}{3}, 2\binom{n-3}{2}, 3\binom{n-3}{2}, 3\binom{n-4}{1} + 4\binom{n-4}{2},$$

$$2\binom{n-3}{1}, 2\binom{n-4}{0} + 3\binom{n-4}{1}, 2\binom{n-4}{0} + 3\binom{n-4}{1}, 2\binom{n-3}{0},$$

同理, 以上8种情况对 $SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})]$ 的贡献分别是

$$3\binom{n-3}{3}, 2\binom{n-3}{2}, 3\binom{n-3}{2}, 3\binom{n-3}{2},$$

$$2\binom{n-3}{1}, 2\binom{n-3}{1}, 3\binom{n-3}{1}, 2\binom{n-3}{0}.$$

因此, $SW_k[C_4^{v_1}(S_{n-3})] - SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})] = \binom{n-4}{2} + \binom{n-4}{1} - \binom{n-4}{0}.$

若 $n = 5$, $SW_k[C_4^{v_1}(S_{n-3})] - SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})] = 0.$

若 $n \geq 6$, $SW_k[C_4^{v_1}(S_{n-3})] - SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})] > 0.$

同理, 令 $|S| = k$ 且 $4 \leq k \leq n - 2$. 设 S 的取法与上述相同, 则其对 $SW_k[C_4^{v_1}(S_{n-3})]$ 的贡献分别是

$$k\binom{n-3}{k}, (k-1)\binom{n-3}{k-1}, k\binom{n-3}{k-1}, k\binom{n-4}{k-2} + (k+1)\binom{n-4}{k-1},$$

$$(k-1)\binom{n-3}{k-2}, (k-1)\binom{n-4}{k-3} + k\binom{n-4}{k-2}, k\binom{n-4}{k-3} + k\binom{n-4}{2}, (k-1)\binom{n-3}{k-3}.$$

对 $SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})]$ 的贡献分别是

$$k\binom{n-3}{k}, (k-1)\binom{n-3}{k-1}, k\binom{n-3}{k-1}, k\binom{n-3}{k-1},$$

$$(k-1)\binom{n-3}{k-2}, (k-1)\binom{n-3}{k-2}, k\binom{n-3}{k-2}, (k-1)\binom{n-3}{k-3}.$$

因此

$$SW_k[C_4^{v_1}(S_{n-3})] - SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})] = \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-2} > 0.$$

综上所述, 引理7成立。

定理1 设 G 为 $n \geq 5$ 阶的单圈图, 对于 $3 \leq k \leq n - 2$, 有

$$SW_k(G) \geq k\binom{n-3}{k} + (3k-1)\binom{n-3}{k-1} + (3k-2)\binom{n-3}{k-2} + (k-1)\binom{n-3}{k-3}.$$

若 $n = 5$, 当且仅当 $G \cong C_4^{v_1}(S_2)$ 或 $C_3^{v_1}(S_3)$ 时等号成立; 若 $n \geq 6$, 当且仅当 $G \cong C_3^{v_1}(S_{n-2})$ 时等

号成立。

证明 对于 $n = 5$, 根据 Steiner k -Wiener 指标的定义, 结论可证。

对于 $n \geq 6$, 根据引理 1、推论 1、引理 4 和引理 7, 有 $SW_k(G) \geq SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})]$, 当且仅当 $G \cong C_3^{v_1}(S_{n-2})$ 时等号成立。根据引理 7 的证明, 有

$$SW_k[C_3^{v_1}(S_{n-2})] = k \binom{n-3}{k} + (3k-1) \binom{n-3}{k-1} + (3k-2) \binom{n-3}{k-2} + (k-1) \binom{n-3}{k-3}.$$

综上所述, 定理 1 成立。

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. New York: Springer, 2008.
- [2] WIENER H. Structural Determination of Paraffin Boiling Points[J]. *J Am Chem Soc*, 1947, **69**(1): 17–20. DOI: 10.1021/ja01193a005.
- [3] ENTRINGER R C, JACKSON D E, SNYDER D A. Distance in Graphs[J]. *Czech Math J*, 1976, **26**(2): 283–296. DOI: 10.21136/cmj.1976.101401.
- [4] DANKELMANN P. On the Wiener Index of Orientations of Graphs[J]. *Discrete Appl Math*, 2023, **336**: 125–131. DOI: 10.1016/j.dam.2023.04.004.
- [5] WANG M, LIU M M. On the Difference Between the Szeged Index and the Wiener Index of Cacti[J]. *Discrete Appl Math*, 2022, **311**: 35–37. DOI: 10.1016/j.dam.2021.12.030.
- [6] DANKELMANN P. Proof of a Conjecture on the Wiener Index of Eulerian Graphs[J]. *Discrete Appl Math*, 2021, **301**: 99–108. DOI: 10.1016/j.dam.2021.05.006.
- [7] CHARTRAND G, OELLERMANN O R, TIAN S L, et al. Steiner Distance in Graphs[J]. *Časopis Pěst Mat*, 1989, **114**(4): 399–410. DOI: 10.21136/cpm.1989.118395.
- [8] GUTMAN I, LI X L, MAO Y P. The Steiner Wiener Index of a Graph[J]. *Discuss Math Graph Theory*, 2016, **36**(2): 455. DOI: 10.7151/dmgt.1868.
- [9] GUTMAN I, FURTULA B, LI X L. Multicenter Wiener Indices and Their Applications[J]. *J Serb Chem Soc*, 2015, **80**(8): 1009–1017. DOI: 10.2298/jsc150126015g.
- [10] GUTMAN I, LI X L, MAO Y P. Inverse Problem on the Steiner Wiener Index[J]. *Discuss Math Graph Theory*, 2018, **38**(1): 83. DOI: 10.7151/dmgt.2000.
- [11] MAO Y, WANG Z, GUTMAN I. Steiner Wiener Index of Graph Products[J]. *Trans Comb*, 2016, **5**(3): 39–50. DOI: 10.22108/TOC.2016.13499.
- [12] Steiner Wiener Index and Line Graphs of Trees[J]. *Discrete Math Lett*, 2022, **9**: 86–91. DOI: 10.47443/dml.2021.s214.
- [13] 汤自凯. 单圈图的 Wiener 指数[D]. 长沙: 湖南师范大学, 2006.
TANG Z. Wiener Index of Unicyclic Graphs[D]. Changsha: Hunan Normal University, 2006.
- [14] 来金花, 刘蒙蒙. 单圈图的 Steiner $(n-1)$ -Wiener 指标[J]. 兰州交通大学学报, 2021, **40**(2): 141–143+155. DOI: 10.3969/j.issn.1001-4373.2021.02.021.
LAI J, LIU M. The Steiner $(n-1)$ Wiener Index of Unicyclic Graphs[J]. *J Lanzhou Jiaotong Univ*, 2021, **40**(2): 141–143+155. DOI: 10.3969/j.issn.1001-4373.2021.02.021.
- [15] LI X, ZHANG M. Results on Two Kinds of Steiner Distance-based Indices for Some Classes of Graphs[J]. *MATCH Commun Math Comput Chem*, 2020, **84**: 567–578.