山西大学学报(自然科学版)48(4):705－712,2025
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024128

一般超图规范化拉普拉斯张量的谱性质

张磊[1,2,3*],任海珍[1,2]

(1.青海师范大学 数学与统计学院,青海 西宁 810008;
2.藏语智能信息处理及应用国家重点实验室,青海 西宁 810008;
3.湖南师范大学 数学与统计学院,湖南 长沙 410000)

摘 要:超图的规范化拉普拉斯张量在涉及超图模型的多类聚类问题中有着广泛的应用。本文证明了如果H是rank(H)=m的连通一般超图,则H的邻接张量谱是对称的,当且仅当m是偶数且H是奇着色的。在此基础上,利用一般超图的奇着色性,给出了一般超图的规范化拉普拉斯张量谱半径为2的刻画。

关键词:超图的谱;张量乘积;奇着色

中图分类号:O436 **文献标志码:**A **文章编号:**0253-2395(2025)04-0705-08

The Properties of the Spectra of Normalized Laplace Tensor in General Hypergraphs

ZHANG Lei[1,2,3*], REN Haizhen[1,2]

(1. *School of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining* 810008*, China;*
2. *The State Key Laboratory of Tibetan Information Processing and Application, Xining* 810008*, China;*
3. *School of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha* 410000*, China*)

Abstract: The normalized Laplacian tensor of hypergraphs has a wide range of applications in multi class clustering problems involving hypergraph models. In this paper, we prove that if H is a connected general hypergraph with rank (H)=m, then the spectrum of the adjacency tensor of H is symmetric if and only if m is even and H is odd-colorable. Furthermore, we give a characterization of the general hypergraphs with the normalized Laplace spectral radius 2 in terms of the odd-colorability of general hypergraphs.

Key words: spectra of hypergraphs; tensor product; odd-colorable

0 引言

1997年,Chung[1]首次引入了普通图的规范化拉普拉斯矩阵及其谱的概念。此后,图的规范化拉普拉斯谱得到了深入的研究,并被用于描述图的各种结构性质。例如,图的最小的规范化拉普拉斯特征值是0,而第二小的规范化拉普拉斯特征值大于0当且仅当图是连通的。同样,图的最大规范化拉普拉斯特征值不超过2,当且仅当连通图是二部图时,其最大规范化拉普拉斯特征值等于2。对应于一致超图,Hu等[2]在2015年将普通图的规范化拉普拉斯矩阵推广到一致超图的规范化拉普拉斯张量。在同一篇论文中,他们还研究了一致超图的规范化拉普拉斯张量和规范化拉普拉斯谱,得到了关于一致超图的规范化拉普拉斯谱的各种结果。2017年,Shao等[3]进一步研究了一

收稿日期:2024-05-02;**接受日期:**2024-10-09

基金项目:湖南省自然科学基金(2023JJ40424);青海省自然科学基金(2022-ZJ-973Q);中国博士后基金(2023M741147)

* **通信作者:**张磊(1992－),男,甘肃省武威人,副教授,研究方向为代数图论、超图谱理论。Email:shuxuezhanglei@163.com

引文格式:张磊,任海珍.一般超图规范化拉普拉斯张量的谱性质[J].山西大学学报(自然科学版),2025,48(4):705-712. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2024128.

致超图的规范化拉普拉斯谱的一些性质,完整地回答了文献[2]中的一个问题。学者们已经在研究这些参数之间的关系方面做了很多工作。Banerjee 等[4]在研究一致超图谱的基础上,于2017年定义了一般超图的邻接、拉普拉斯、无符号拉普拉斯和规范化拉普拉斯张量。在他们的文章中,讨论了与一般超图相关的几种张量的各种谱性质。

给定一组对象,划分是为了某些目的将项目分为几个组。它是分析或解决科学、技术、人文、医学和工程问题的有用工具。通过机器对非结构化数据进行划分是降低噪声、提取有意义信息和选择关键组件的有效方法。聚类在许多领域都有广泛的应用,例如图像分割,生物信息学,对象识别,数据挖掘,空间数据分析等。作为一类重要的分割聚类方法,谱聚类方法基于谱图理论对项目进行聚类。它们在计算机视觉、VLSI(Very Large Scale Integration)设计等领域很受欢迎。

用于超图聚类的一种广泛使用的谱聚类算法是规范化超图切割方法。Chang 等[5]考虑了涉及超图模型的多类聚类问题,研究了偶数均匀加权超图的规范化拉普拉斯张量。他们将基于拉普拉斯张量的方法从双聚类推广到多类聚类,建立并分析了具有正交约束的张量优化模型,将超图聚类方法应用于图像分割和运动分割问题。Duan 等[6]给出一般超图无符号拉普拉斯谱的一些性质,如无符号拉普拉斯张量特征值的界和两个超图笛卡尔积的无符号拉普拉斯谱半径的关系,同时还获得了一般超图的规范化拉普拉斯子张量最小特征值的界。Maurya 和 Ravindran[7]将最小比割和规范化割的概念从图扩展到超图,并表明可以使用拉普拉斯张量的特征值分解来解决松弛优化问题。

基于上述研究拉普拉斯张量的应用背景,本文研究了一般超图的规范化拉普拉斯谱的一些性质。首先,在第1节中介绍了一些必要的符号。然后,在第2节中,利用 Nikiforov 在文献[8]中引入的奇可着色张量的概念和性质,我们首先得到如果 H 是秩 $\mathrm{rank}(H)=m$ 的连通一般超图,那么 H 的邻接张量的谱是对称的,当且仅当 m 是偶的且 H 是奇着色的。此外,我们还利用张量的乘积给出了规范化拉普拉斯张量 $\boldsymbol{\mathcal{N}}(H)$ 的表达式(或等价定义)。利用这个表达式,结合非负(弱不可约)张量 Perron-Frobenius 定理、张量乘积的性质以及张量的对角相似性,我们研究了一般超图的规范化拉普拉斯谱,并根据一般超图的奇可色性得到规范化拉普拉斯谱半径为2的一般超图的刻画。

1 定义和符号

一般超图 H 是一个二元组 $H=(V,E)$,其中 V 是元素的集合,E 是 V 的非空子集的集合。因此,E 是 $\mathcal{P}(V)\backslash\{\varnothing\}$ 的子集,其中 $\mathcal{P}(V)$ 是 V 的幂集。V 的元素称为顶点,而 E 的元素则称为边。一般超图 H 的秩是 H 中边的最大基数,用 $\mathrm{rank}(H)$ 表示。

复数域上一个 m 阶 n 维张量 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 是一个多维数组,即:$\boldsymbol{\mathcal{A}}=(a_{i_1i_2\cdots i_m})$, $1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n$。如果张量 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的项在其指标的任意排列下都是不变的,则称其为对称张量。特别地,当 $m=2$ 时,一个张量就是一个矩阵。众所周知,矩阵理论是谱图理论中的一个重要工具。张量作为矩阵的一种推广,自然在超图谱理论的发展中起着重要的作用。

与一致超图的邻接张量和规范化拉普拉斯张量的定义类似,Banerjee 等[4]给出了一般超图的邻接张量和规范化拉普拉斯张量的定义。

定义 1[9] 设 $H=(V,E)$ 是一个一般超图,其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$E=e_1,e_2,\cdots,e_k$。设 H 的秩 $\mathrm{rank}(H)=m$,H 的邻接张量 $\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$ 为:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_H=(a_{i_1i_2\cdots i_m}),1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n。$$

对于基数 $s\leqslant m$ 的所有边 $e=\{v_{l_1},v_{l_2},\cdots,v_{l_s}\}\in E$,

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=\frac{s}{\alpha(s)},\ 其中\ \alpha(s)=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_s\geqslant 1\\ k_1+\cdots+k_s=m}}\frac{m!}{k_1!\ k_2!\ \cdots k_s!},$$

并且 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 以所有可能的方式从 $L=\{l_1,l_2,\cdots,l_s\}$ 中选择,其中对于集合 L 的每个元素至少选

择一次。除此之外,张量的其他位置为零。

定义 2[9] 设 $H=(V,E)$ 是一个一般超图,其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$。设 $\mathrm{rank}(H)=m$,规范化拉普拉斯张量 $\mathcal{N}(H)=(l_{i_1i_2\cdots i_m})$ 是一个 m 阶 n 维的对称张量,定义为:对于基数 $s\leqslant m$ 的所有边 $e=\{v_{l_1},v_{l_2},\cdots,v_{l_s}\}\in E$,

$$l_{p_1p_2\cdots p_m}=-\frac{s}{\alpha}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt[m]{d(v_{p_j})}},\text{其中}\alpha(s)=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_s\geqslant 1\\ \sum k_i=m}}\frac{m!}{k_1!\ k_2!\ \cdots k_s!}。$$

并且 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 以所有可能的方式从 $\{l_1,l_2,\cdots,l_s\}$ 中选择,其中对于集合的每个元素至少选择一次。$\mathcal{N}(H)$ 的对角线元素为1,其他位置为零。

设 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶、n 维的张量,对于向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$,则 $\mathcal{A}x^{m-1}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个向量,其第 i 个分量定义为

$$(\mathcal{A}x^{m-1})_i=\sum_{i_2,\cdots,i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\forall i\in[n]。$$

令 $x^{[m-1]}:=(x_1^{m-1},x_2^{m-1},\cdots,x_n^{m-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$。如果 $\mathcal{A}x^{m-1}=\lambda x^{[m-1]}$ 有一个解 $x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$,则 λ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值,$\boldsymbol{x}$ 是 λ 对应的特征向量。特别地,如果 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 是 $\mathcal{A}$ 的实特征向量,显然对应的特征值 λ 也是实数。在这种情况下,$\boldsymbol{x}$ 称为一个 H-特征向量,λ 是一个 H-特征值。更进一步,如果 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^n$,我们说 λ 是 $\mathcal{A}$ 的 H^+-特征值。若 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_{++}^n$,则 λ 是 $\mathcal{A}$ 的 H^{++}-特征值,则 $\mathcal{A}$ 的谱半径定义为

$$\rho(\mathcal{A})=\max\{|\lambda|\,|\,\lambda\text{是}\mathcal{A}\text{的特征值}\}。$$

设 $\|\boldsymbol{x}\|_m=(\sum_{i=1}^{n}x_i^m)^{\frac{1}{m}}$。与 $\rho(\mathcal{A})$ 对应的且满足 $\|\boldsymbol{x}\|_m=1$ 的正特征向量 $\boldsymbol{x}$ 称为张量 $\mathcal{A}$ 的 Perron 特征向量。

根据定义1,一般超图 H 的邻接张量 $\mathcal{A}_H$ 总是一个非负张量。

定理1[9] (一般超图的 Perron-Frobenius 定理)

(1)设 H 是一般超图,则 $\rho(\mathcal{A}_H)$ 是 H 的 H^+-特征值。

(2)如果 H 是连通的,则 $\rho(\mathcal{A}_H)$ 是 H 的唯一 H^{++}-特征值,且其唯一特征向量是 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_{++}^n$。

下面这个在文献[6]中定义的张量的乘积是矩阵乘积的推广。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别为维数为 n 和阶数为 $m\geqslant 2$ 且 $k\geqslant 1$ 的张量。乘积 $\mathcal{AB}$ 是一个维数为 n,阶为 $(m-1)(k-1)+1$ 的张量 $\mathcal{C}$,其元素表示为:

$$c_{\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}}=\sum_{i_2,\cdots,i_m\in[n_2]}a_{ii_2\cdots i_m}b_{i_2\alpha_1}\cdots b_{i_m\alpha_{m-1}},\tag{1}$$

上式中 $i\in[n]$, $\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}\in[n]^{k-1}$,且 $b_{i\alpha}$ 是 $b_{ii_2\cdots i_k}$ 的缩写,其中 $\alpha=i_2\cdots i_k$。

定理2[10] 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 m 阶 n 维张量。假设存在 n 阶的非奇异对角矩阵 $\boldsymbol{M}$,使得

$$\mathcal{B}=\boldsymbol{M}^{-(k-1)}\mathcal{A}\boldsymbol{M},$$

则 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 称为对角相似。

文献[10]的定理2.1对相似张量有如下的结果,因此对于对角相似张量也有类似结果如下。

引理1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 m 阶 n 维的相似张量,那么 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有相同的谱。

在文献[11]中,非负张量的弱不可约性定义如下:

定义3[11] 设 $\mathcal{A}$ 是一个 m 阶 n 维非负张量。如果存在集合 $[n]$ 的真子集 I,使得

$$a_{i_1i_2\cdots i_m}=0(\forall i_1\in I,\text{且至少有一个 }i_2\cdots i_m\notin I),$$

则 $\mathcal{A}$ 称为弱可约。如果 $\mathcal{A}$ 不是弱可约的,则 $\mathcal{A}$ 称为弱不可约。

在文献[9]中证明了一般超图 H 是连通的,当且仅当其邻接张量 $\mathcal{A}_H$ 是弱不可约的。

以下结果是关于非负张量和非负弱不可约张量的著名的 Perron-Frobrnius 定理的一部分,将在本文主要结果的证明中起关键作用。

引理2

(1)(文献[12]引理5.5)如果$\mathcal{A}$是具有正特征向量的非负张量,则$\rho(\mathcal{A})$是具有正特征向量的$\mathcal{A}$的唯一特征值。

(2)(文献[13]定理3.6)设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是两个m阶n维张量,满足$|\mathcal{B}|\leqslant\mathcal{A}$,且$\mathcal{A}$弱不可约,则

(i) $\rho(\mathcal{B})\leqslant\rho(\mathcal{A})$,

(ii) 如果$\rho(\mathcal{A})\mathrm{e}^{i\theta}$是$\mathcal{B}$的特征值,且存在一个非奇异对角矩阵$U$,其所有对角项都具有绝对值1,则

$$\mathcal{B}=\mathrm{e}^{i\theta}U^{-(k-1)}\mathcal{A}U。$$

2 主要结果

在本节中,我们首先证明$\mathrm{rank}(H)=m$的一般超图H是奇可着色的,当且仅当在$m\equiv 2(\mathrm{mod}4)$的情况下H是奇横贯的。然后证明了连通一般超图中邻接张量的奇可着色性与特征值之间的等价性。最后,根据一般超图的奇可着色性,刻画了规范化拉普拉斯谱半径为2的一般超图。

2.1 奇着色和奇横贯

对于张量(在文献[8]中称为m-矩阵)和m-一致超图的奇着色的定义在文献[14]引入。以类似的方式,奇着色和一般超图的奇着色的定义如下。

定义4 设m为偶的正整数且$m\geqslant 2$。$\mathrm{rank}(H)=m$且$V(H)=[n]$的一般超图称为奇着色,如果存在一个映射φ: $[n]\to[m]$使得对于$H(2\leqslant s\leqslant m)$的任意边$\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}$,我们有

$$k_1\varphi(j_1)+k_2\varphi(j_2)+\cdots+k_s\varphi(j_s)\equiv m/2(\mathrm{mod}\,m),$$

其中k_i为正整数,$k_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,s$,且$k_1+k_2+\cdots+k_s=m$。

这样的函数φ被称为H的奇着色。

下面的一般超图的奇横贯的定义是奇二部一致超图的自然推广。

定义5 集合$X\subset[n]$的指示函数写作I_X,设$\mathcal{A}_H$是$\mathrm{rank}(H)=m$且$V(H)=[n]$的一般超图H的邻接张量。如果$a_{i_1i_2\cdots i_m}\neq 0$,集合$X\subset V(H)$称为$\mathcal{A}_H$的奇横贯,意味着

$$k_1I_X(i_1)+k_2I_X(i_2)+\cdots+k_sI_X(i_s)\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),$$

其中k_i为正整数,$k_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,s$,且$k_1+k_2+\cdots+k_s=m$。

具有奇横贯的张量$\mathcal{A}_H$称为奇横贯张量。

因此,我们说一个一般超图是奇横贯超图,如果它的邻接张量有奇横贯;也就是说,一般超图的奇横贯是每条边与奇数个顶点相交的顶点集。在下面的引理中,我们证明了如果m是偶的正整数,那么具有奇横贯的一般超图总是意味着它是奇着色的。

引理3 设m是偶的正整数,$\mathcal{A}_H$为$\mathrm{rank}(H)=m$且$V(H)=[n]$的一般超图H的邻接张量。如果H有一个奇横贯,那么$\mathcal{A}_H$是奇着色的。

证明 设X是H的一个奇横贯。对于每一个$i\in[n]$,令$\varphi(i):=(m/2)I_X(i)$。如果$a_{i_1i_2\cdots i_m}\neq 0$,即:$\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}\in E(H)(2\leqslant s\leqslant m)$,那么

$$k_1I_X(i_1)+k_2I_X(i_2)+\cdots+k_sI_X(i_s)\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),$$

其中k_i为正整数,$k_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,s$,且$k_1+k_2+\cdots+k_s=m$。从而有,

$$k_1\varphi(i_1)+\cdots+k_s\varphi(i_s)=(m/2)k_1I_X(i_1)+\cdots+(m/2)k_sI_X(i_s)\equiv(m/2)(\mathrm{mod}\,m)。$$

因此,$\varphi(i)$是$\mathcal{A}_H$的奇着色,因此$\mathcal{A}_H$是奇着色的。证毕。

由上述证明可以表明,如果$m\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$,则引理3可以被反转,即$m\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$时,“具有奇横贯”和“奇着色”是一般超图的等价性质。

引理4 设$m\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$。一个$\mathrm{rank}(H)=m$且$V(H)=[n]$的一般超图$H$是奇着色的当且仅

当它有一个奇横贯。

证明 令 $m=4k+2$。令 $\mathcal{A}_H$ 为 rank$(H)=m$ 且 $V(H)=[n]$ 的一般超图 H 的邻接张量。根据引理3,只需证明如果 $\mathcal{A}_H$ 是奇着色的,则它有一个奇横贯。设 $\varphi:[n]\to[4k+2]$ 为 $\mathcal{A}_H$ 的一个奇着色。记 X 为所有 $i\in[n]$ 且使得 $\varphi(i)$ 为奇数的集合。接下来,我们要证明 X 是 $\mathcal{A}_H$ 的一个奇横贯。实际上,如果 $\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}\in E(H)(2\leqslant s\leqslant m)$,则

$$k_1\varphi(i_1)+\cdots+k_s\varphi(i_s)\equiv 2k+1 \bmod (4k+2)。$$

因此,在 $k_1\varphi(i_1),\cdots,k_s\varphi(i_s)$ 这些数中,奇数的个数为奇数,这意味着

$$k_1I_X(i_1)+\cdots+k_sI_X(i_s)\equiv 1 \pmod 2,$$

所以 X 是 $\mathcal{A}_H$ 的奇横贯。证毕。

根据引理3和引理4,我们很容易得到以下结果。

定理3 设 m 为偶的正整数,则 rank$(H)=m$ 的奇横贯一般超图 H 总是奇着色的。更进一步,当 $m\equiv 2 \pmod 4$ 时,一个 rank$(H)=m$ 的一般超图 H 是奇着色的当且仅当 H 是奇横贯的。

2.2 奇着色和特征值

下面的引理给出了连通一般超图中邻接张量谱对称的充分条件。

引理5 设 H 是一个 rank$(H)=m$ 且 $V(H)=[n]$ 的连通一般超图,$\mathcal{A}_H$ 是 H 的邻接张量。如果 H 是奇着色的,m 是偶数且 $m\geqslant 2$,则 $\mathcal{A}_H$ 的谱是对称的。

证明 设 $\mathcal{A}_H$ 是 m 阶 n 维张量,其中 $\varphi:[n]\to[m]$ 是 $\mathcal{A}_H$ 的一个奇着色,即:

如果 $\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}\in E(H)(2\leqslant s\leqslant m)$,则

$$k_1\varphi(j_1)+\cdots+k_s\varphi(j_s)\equiv m/2 \pmod m,$$

其中 k_i 为正整数,$k_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,s$,且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=m$。

注意,由文献[6]中的结论表明,如果 $(z_1,\cdots,z_n)$ 是一个具有非零分量的向量,张量 $\mathcal{B}$ 定义为

$$b_{j_i,\cdots,j_m}=z_{j_1}^{-m}a_{j_i,\cdots,j_m}z_{j_1,\cdots,j_m},\ (j_1,\cdots,j_m)\in[n]^m,$$

那么 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有相同的谱。

设对于每个 $k\in[n]$,$z_k=\mathrm{e}^{2\varphi(k)\pi\mathrm{i}/m}$。我们有

$$b_{j_1,\cdots,j_m}=z_{j_1}^{-m}a_{j_1,\cdots,j_m}z_{j_1}\cdots z_{j_m}=$$

$$\mathrm{e}^{-2\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}}a_{j_1,\cdots,j_m}\mathrm{e}^{2\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}/m+\cdots+2\varphi(j_s)\pi\mathrm{i}/m+2\varphi(j_{s+1})\pi\mathrm{i}/m+\cdots+2\varphi(j_m)\pi\mathrm{i}/m}=$$

$$\mathrm{e}^{-2\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}}a_{j_i,\cdots,j_m}\mathrm{e}^{[\varphi(j_1)+\cdots+\varphi(j_s)+\varphi(j_{s+1})+\cdots+\varphi(j_m)]\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}}。$$

通过一般超图的奇着色定义和一般超图的邻接张量的对称性,我们发现

$$b_{j_1,\cdots,j_m}=\mathrm{e}^{-2\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}}a_{j_1,\cdots,j_m}\mathrm{e}^{[k_1\varphi(j_1)+\cdots+k_s\varphi(j_s)]\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}}=$$

$$\mathrm{e}^{-2\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(km+\frac{m}{2})\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}}a_{j_1,\cdots,j_m}=\mathrm{e}^{-2\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}}a_{j_1,\cdots,j_m}=-a_{j_1,\cdots,j_m},$$

则 $b_{j_1,\cdots,j_m}=-a_{j_1,\cdots,j_m}\Rightarrow\mathcal{B}=-\mathcal{A}$。因此,$\mathcal{A}_H$ 的谱是对称的。证毕。

回顾文献[13]中,Yang 等给出了关于弱不可约非负张量的一些结果,即:一个以上特征值的模等于谱半径。对于对称张量,他们的定理3.9,3.10和3.11表明了下面的结果。

定理4 设 $\mathcal{A}_H$ 为 rank$(H)=m$ 且 $V(H)=[n]$ 的连通一般超图 H 的邻接张量。如果 $\rho(\mathcal{A}_H)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是 $\mathcal{A}_H$ 的一个特征值,则存在一个函数 $\varphi:[n]\to[m]$,使得对于任意边 $\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}\in E(H)(2\leqslant s\leqslant m)$,我们有

$$\mathrm{e}^{2k_1\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}/m}\cdots\mathrm{e}^{2k_s\varphi(j_s)\pi\mathrm{i}/m}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{2\varphi(j_1)\pi\mathrm{i}}=\cdots=\mathrm{e}^{2\varphi(j_s)\pi\mathrm{i}}。$$

定理5 设 $\mathcal{A}_H$ 为 rank$(H)=m$ 且 $V(H)=[n]$ 的连通一般超图 H 的邻接张量。如果 $-\rho(\mathcal{A}_H)$ 是 $\mathcal{A}_H$ 的一个特征值,则 m 是偶数且 $\mathcal{A}_H$ 是奇着色的。

证明 设 $\mathcal{A}_H$ 是一个 m 阶 n 维张量,根据定理3,我们可知存在一个函数 $\varphi:[n]\to[m]$,使得如果

$\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}\in E(H)(2\leqslant s\leqslant m)$,则

$$e^{2k_1\varphi(j_1)\pi i/m}\cdots e^{2k_s\varphi(j_s)\pi i/m}=e^{i\theta}e^{2\varphi(j_1)\pi i}。$$

两边取m次幂,我们得到

$$\big(k_1\varphi(j_1)+\cdots+k_s\varphi(j_s)\big)2\pi\equiv m\pi(\mathrm{mod}\ 2m\pi)。$$

从而得知,m是偶数,且

$$k_1\varphi(j_1)+\cdots+k_s\varphi(j_s)\equiv m/2(\mathrm{mod}\ m)。$$

因此,φ是$\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$的一个奇着色。从而,$\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$是奇着色的。证毕。

根据引理4和引理5,很容易得到以下结果。

定理6 如果H是一个$\mathrm{rank}(H)=m$且$V(H)=[n]$的连通一般超图,$\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$是$H$的邻接张量,则$\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$的谱是对称的当且仅当$m$是偶数且$H$是奇可着色的。

2.3 奇着色和规范化拉普拉斯谱张量

设$\boldsymbol{\mathcal{A}}$和$\boldsymbol{\mathcal{B}}$是两个m阶n维张量,$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$为两个$n$阶的矩阵。在文献[10]中,张量和矩阵的乘积定义如下:

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{Q})_{i_1\cdots i_m}=\sum\nolimits_{j_1,\cdots,j_m=1}^{n}p_{i_1j_1}a_{j_1\cdots j_m}q_{j_2i_2}\cdots q_{j_mi_m}。\tag{2}$$

此外,分配律成立,即:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\mathcal{A}}+\boldsymbol{\mathcal{B}})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{Q}。\tag{3}$$

定理7 设H是$\mathrm{rank}(H)=m$且$V(H)=[n]$的一般超图(没有孤立顶点),$\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$是$H$的邻接张量,$\boldsymbol{\mathcal{D}}_H$是$H$的度对角张量。设$\boldsymbol{\mathcal{L}}_H=\boldsymbol{\mathcal{D}}_H-\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$和$\boldsymbol{\mathcal{Q}}_H=\boldsymbol{\mathcal{D}}_H+\boldsymbol{\mathcal{A}}_H$分别是$H$的拉普拉斯张量和无符号拉普拉斯张量。令$\boldsymbol{D}_0=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$为$H$的度对角矩阵,其中$d_i=d(v_i)$为$H$的顶点$v_i$的度数,则有:

(i)$\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{D}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{\mathcal{I}}$是单位张量,

(ii)$\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{L}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{\mathcal{I}}-\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{A}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}$,

(iii)$\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{\mathcal{I}}+\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{A}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}$。

证明 (i)利用张量乘积的公式(2),我们有

$$(\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{D}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}})_{i_1\cdots i_m}=$$
$$\sum\nolimits_{j_1,\cdots,j_m=1}^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}})_{i_1j_1}d_{j_1\cdots j_m}(\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}})_{j_2i_2}\cdots(\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}})_{j_mi_m}=$$
$$d_{i_1}^{-\frac{1}{m}}d_{i_1\cdots i_m}d_{i_2}^{-\frac{1}{m}}\cdots d_{i_m}^{-\frac{1}{m}}=\begin{cases}1 & \text{如果 } i_1=i_2=\cdots=i_m\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}。$$

因此,我们有$\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{D}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{\mathcal{I}}$。

(ii)通过(i)和分配律公式(3),我们有

$$\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{L}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{D}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}-\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{A}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{\mathcal{I}}-\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{A}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}。$$

(iii)类似地,我们有

$$\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{D}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}+\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{A}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}=\boldsymbol{\mathcal{I}}+\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{A}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}。$$

注意到,通过(ii)和公式(2),我们得到

$$(\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}}\boldsymbol{\mathcal{L}}_H\boldsymbol{D}_0^{-\frac{1}{m}})_{i_1i_2\cdots i_m}=\begin{cases}-\dfrac{s}{\alpha}\prod\nolimits_{j=1}^{m}\dfrac{1}{\sqrt[m]{d(v_{i_j})}} & \text{如果}\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}\in E(H);\\ 0 & \text{其他情况。}\end{cases}$$

证毕。

因此，我们可以给出一般超图H规范化拉普拉斯张量$\mathcal{N}(H)$的等价定义，即：

$$\mathcal{N}(H)=D_0^{-\frac{1}{m}}\mathcal{L}_H D_0^{-\frac{1}{m}}。$$

这与Chung在文献[1]中给出的普通图的规范化拉普拉斯矩阵的定义形式一致。通过$\mathcal{N}(H)$的这个表达式，可以更方便地利用张量乘积的性质和张量的对角相似性来研究一般超图的规范化拉普拉斯谱。

在文献[4]中，对$\mathrm{rank}(H)=m$的一般超图H的规范化邻接张量$D_0^{-\frac{1}{m}}\mathcal{A}_H D_0^{-\frac{1}{m}}$有如下结果，即：$H$的规范化邻接张量$D_0^{-\frac{1}{m}}\mathcal{A}_H D_0^{-\frac{1}{m}}$的特征值分布范围是半径为1的圆盘。

引理6[9]　设H是一个$\mathrm{rank}(H)=m$的一般超图（无孤立顶点），$\mathcal{A}_H$是H的邻接张量，则H的规范化邻接张量$D_0^{-\frac{1}{m}}\mathcal{A}_H D_0^{-\frac{1}{m}}$的谱半径为$\rho(D_0^{-\frac{1}{m}}\mathcal{A}_H D_0^{-\frac{1}{m}})=1$。

下面的定理根据一般超图的奇着色性给出了具有规范化拉普拉斯谱半径2的一般超图。

定理8　设H是一个$\mathrm{rank}(H)=m$的一般超图（无孤立顶点），其符号如定理7所示。令$\mathcal{N}(H)=D_0^{-\frac{1}{k}}\mathcal{L}_H D_0^{-\frac{1}{k}}$为$H$的规范化拉普拉斯张量。那么我们有：

（1）$\rho(\mathcal{N}(H))\leqslant 2$，$\rho(\mathcal{N}(H))=2$当且仅当2是$\mathcal{N}(H)$的特征值，

（2）2是$\mathcal{N}(H)$的特征值（即：$\rho(\mathcal{N}(H))=2$）当且仅当m是偶数且H的连通分量中至少有一个是奇着色的。

证明　（1）由定理5，我们得到规范化拉普拉斯张量与规范化邻接张量之间的关系：

$$\mathcal{N}(H)=D_0^{-\frac{1}{k}}\mathcal{L}_H D_0^{-\frac{1}{k}}=\mathcal{I}-D_0^{-\frac{1}{k}}\mathcal{A}_H D_0^{-\frac{1}{k}}。$$

因此，对于规范化拉普拉斯张量$\mathcal{N}(H)$的任意特征值λ，存在一个规范化邻接张量的特征值μ，使得$\lambda=1-\mu$。

根据引理6，我们也知道规范化邻接张量的谱半径是1。因此我们有$|\mu|\leqslant 1$。所以我们有

$$|\lambda|=|1-\mu|\leqslant 1+|\mu|\leqslant 2。$$

因此我们得到$\rho(\mathcal{N}(H))\leqslant 2$。

通过以上论证，我们有

$$|\lambda|=2\Leftrightarrow\mu=-1。$$

因此，$\rho(\mathcal{N}_H)=2\Leftrightarrow -1$是规范化邻接张量的特征值，$\Leftrightarrow 2$是$\mathcal{N}_H$的特征值。证毕。

（2）充分性。如果m是偶数，并且H的某个连通分量（比如H_1）是奇着色的。然后由定理6可知，H_1的邻接张量$\mathcal{A}_{H_1}$的谱是对称的。因此，弱不可约非负张量的Perron-Frobrnius定理（见引理2中的（2）），存在复对角矩阵$U=\mathrm{diag}(u_1,\cdots,u_n)$，其中$|u_j|=1$对于$j=1,\cdots,n$，使得

$$\mathcal{A}_{H_1}=-U^{-(k-1)}\mathcal{A}_{H_1}U。$$

设$(D_0)_{H_1}$是H_1的度对角矩阵，则H_1的规范化邻接张量为$\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1})=(D_0)_{H_1}^{-\frac{1}{k}}\mathcal{A}_{H_1}(D_0)_{H_1}^{-\frac{1}{k}}$。因此，通过上面的关系和对角矩阵的交换性，我们得到

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1})=-U^{-(k-1)}(\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1}))U。$$

由此可知，H_1的规范化邻接张量$\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1})$的谱也是对称的（$\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1})$和$-\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1})$对角相似）。

根据引理6，我们知道H_1的规范化邻接张量的谱半径为1，因此-1是H_1的规范化邻接张量的特征值。则-1也是H的规范化邻接张量的特征值，即2是$\mathcal{N}(H)$的特征值。

必要性。如果2是$\mathcal{N}(H)$的特征值，则-1是H的规范化邻接张量的特征值。此外，-1也是H的某个连通分量（如H_1）的规范化邻接张量$\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1})$的特征值。因此，根据弱不可约非负张量的Perron-Frobenius定理（见引理2中的（2）），存在复对角矩阵$U=\mathrm{diag}(u_1,\cdots,u_n)$，其中$|u_j|=1$对于

$j=1,\cdots,n$,使得

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1})=-U^{-(k-1)}(\mathcal{N}(\mathcal{A}_{H_1}))U。$$

由此我们得到

$$\mathcal{A}_{H_1}=-U^{-(k-1)}\mathcal{A}_{H_1}U。$$

因此,H_1的邻接张量$\mathcal{A}_{H_1}$的谱也是对称的,由此通过定理6,我们知道m是偶数,H_1是奇着色的。

参考文献:

[1] CHUNG F. Spectral Graph Theory[M]. Am Math Soc, Providence: RI, 1997.

[2] HU S L, QI L Q. The Laplacian of a Uniform Hypergraph [J]. *J Comb Optim*, 2015, **29**(2): 331-366. DOI: 10.1007/s10878-013-9596-x.

[3] SHAO J Y, YUAN X Y. Some Properties of the Laplace and Normalized Laplace Spectra of Uniform Hypergraphs[J]. *Linear Algebra Appl*, 2017, **531**: 98-117. DOI: 10.1016/j.laa.2017.05.039.

[4] BANERJEE A, CHAR A, MONDAL B. Spectra of General Hypergraphs[J]. *Linear Algebra Appl*, 2017, **518**: 14-30. DOI: 10.1016/j.laa.2016.12.022.

[5] CHANG J Y, CHEN Y N, QI L Q, *et al*. Hypergraph Clustering Using a New Laplacian Tensor with Applications in Image Processing[J]. *SIAM J Imaging Sci*, 2020, **13**(3): 1157-1178. DOI: 10.1137/19m1291601.

[6] DUAN C X, WANG L G, LI X H. Some Properties of the Signless Laplacian and Normalized Laplacian Tensors of General Hypergraphs[J]. *Taiwanese J Math*, 2020, **24**(2): 265-281. DOI: 10.11650/tjm/190606.

[7] MAURYA D, RAVINDRAN B. Hypergraph Partitioning Using Tensor Eigenvalue Decomposition[J]. *PLoS One*, 2023, **18**(7): e0288457. DOI: 10.1371/journal.pone.0288457.

[8] NIKIFOROV V. Hypergraphs and Hypermatrices with Symmetric Spectrum[J]. *Linear Algebra Appl*, 2017, **519**: 1-18. DOI: 10.1016/j.laa.2016.12.038.

[9] ZHANG W, LIU L L, KANG L Y, *et al*. Some Properties of the Spectral Radius for General Hypergraphs[J]. *Linear Algebra Appl*, 2017, **513**: 103-119. DOI: 10.1016/j.laa.2016.10.005.

[10] SHAO J Y. A General Product of Tensors with Applications[J]. *Linear Algebra Appl*, 2013, **439**(8): 2350-2366. DOI: 10.1016/j.laa.2013.07.010.

[11] FRIEDLAND S, GAUBERT S, HAN L. Perron - Frobenius Theorem for Nonnegative Multilinear Forms and Extensions[J]. *Linear Algebra Appl*, 2013, **438**(2): 738-749. DOI: 10.1016/j.laa.2011.02.042.

[12] YANG Y N, YANG Q Z. Further Results for Perron - Frobenius Theorem for Nonnegative Tensors[J]. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2010, **31**(5): 2517-2530. DOI: 10.1137/090778766.

[13] YANG Q Z, YANG Y N. Further Results for Perron-Frobenius Theorem for Nonnegative Tensors II[J]. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2011, **32**(4): 1236-1250. DOI: 10.1137/100813671.

[14] QI L Q. Symmetric Nonnegative Tensors and Copositive Tensors[J]. *Linear Algebra Appl*, 2013, 439(1): 228-238. DOI: 10.1016/j.laa.2013.03.015.